



Deltoid

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



W Internecie możesz znaleźć instrukcje budowy klasycznego latawca jak na obrazku poniżej. Fragment jednej z instrukcji brzmi:

1. Weź dwie drewniane listewki. Przytnij listewki do odpowiedniej długości. Krótsza z nich powinna mieć długość równą $\frac{3}{4}$ długości dłuższej listewki.
2. Wyznacz dokładny środek krótszej z listewek i zwiąż listewki ze sobą sznurkiem na kształt krzyża (pod kątem 90°). Krótsza listwa powinna znajdować się na wysokości około $\frac{2}{3}$ dłuższej listewki.
3. Wiązanie wzmocnij za pomocą kleju. Pamiętaj, że musi być zachowany dokładny kąt 90° – inaczej latawiec nie będzie latał.



Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

Przytoczony fragment instrukcji mówi o tym, jak zbudować szkielet latawca, który będzie miał kształt deltoidu. Listewki są wtedy przekątnymi deltoidu.

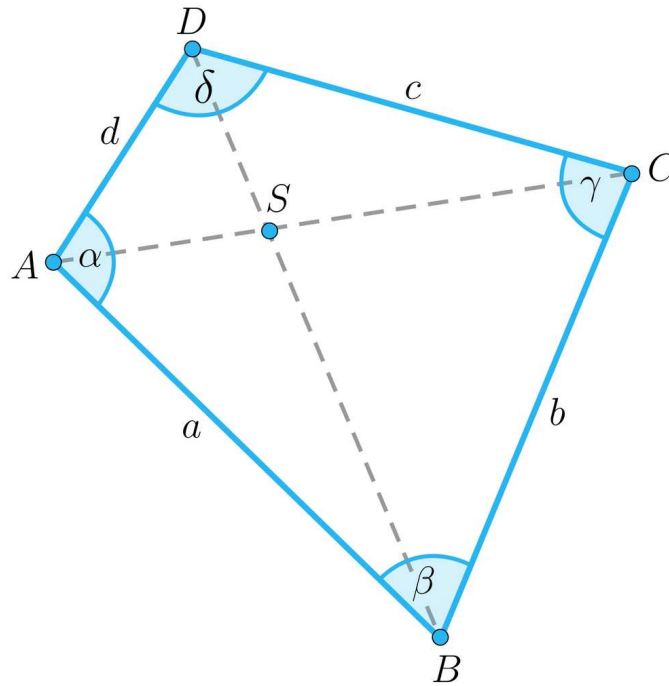
W tym materiale omówimy własności czworokąta zwanego deltoidem. W języku angielskim stosuje się te samą nazwę *kite* dla latawca i dla deltoidu.

Twoje cele

- Zdefiniujesz deltoid.
- Wymienisz własności deltoidu.
- Wyznaczysz pole i długości boków deltoidu na podstawie długości przekątnych.
- Zastosujesz własności deltoidów w problemach praktycznych i zagadnieniach matematycznych.

Przeczytaj

Na rysunku przedstawiony jest czworokąt $ABCD$ z zaznaczonymi kątami, bokami i przekątnymi.



Jeśli wierzchołki leżą na jednym boku, to mówimy, że są sąsiednie, w przeciwnym przypadku – są przeciwległe.

Boki, które mają wspólny wierzchołek, nazywamy bokami sąsiednimi; w przeciwnym przypadku – przeciwległymi.

Kąty α , β , γ , δ nazywamy kątami wewnętrznymi (lub krócej: kątami) czworokąta.

Jeśli dwa kąty mają wspólne ramię (bok czworokąta), to są kątami sąsiednimi; w przeciwnym przypadku – przeciwległymi.

Kąt jest wypukły, jeśli ma miarę mniejszą lub równą 180° .

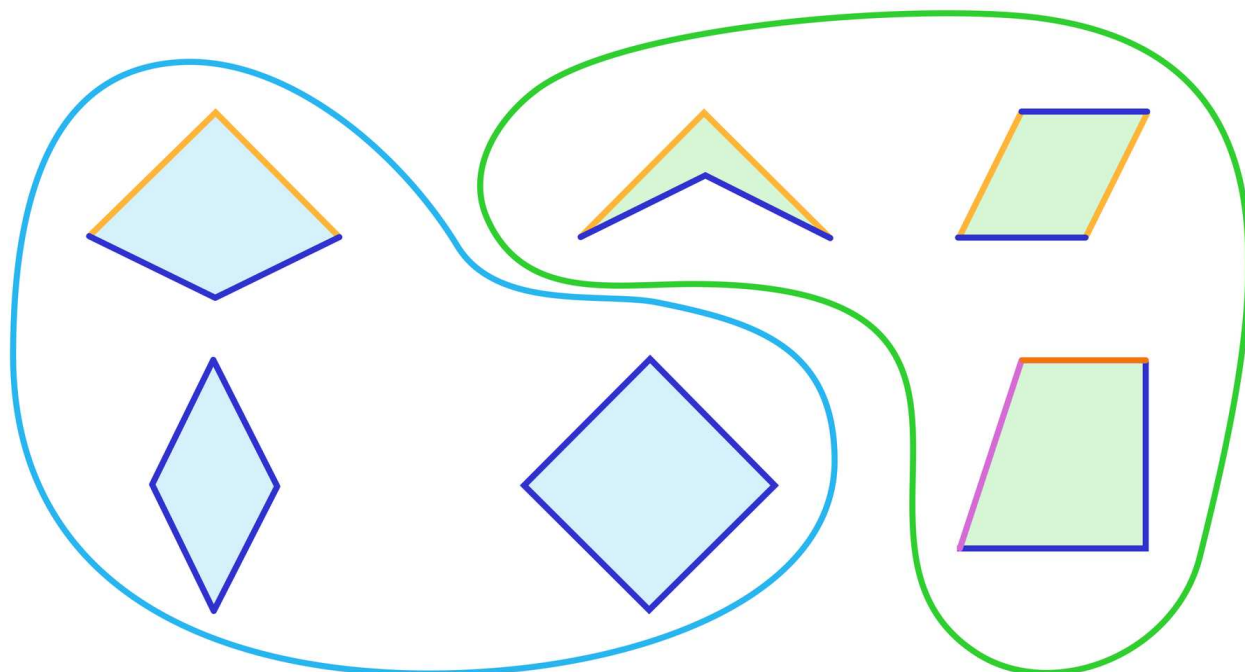
Czworokąt jest wypukły, gdy jego wszystkie cztery kąty wewnętrzne są wypukłe.

W czworokącie wypukłym przekątne przecinają się w punkcie leżącym wewnątrz czworokąta.

Definicja: deltoid

Deltoidem nazywamy wypukły czworokąt, który ma dwie pary sąsiednich boków równych.

Na rysunku przedstawiono czworokąty z zaznaczonymi parami boków równych. Niebieskie czworokąty są deltoidami, a zielone – nie są deltoidami.



Zielony **czworokąt deltoidalny** ma dwie pary sąsiednich boków równych, ale nie jest wypukły.

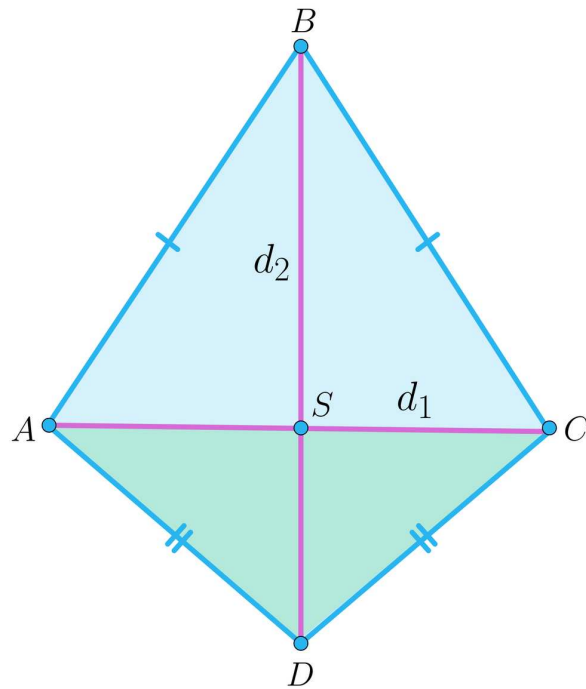
Zielony równoległobok ma dwie pary boków równych, ale nie są to boki sąsiednie.

Zielony trapez ma jedną parę sąsiednich boków równych.

Romb jest deltoidem, bo ma wszystkie boki równe. **Kwadrat** jest deltoidem, bo jest rombem.

Własności deltoidów

Popatrzmy na rysunek przedstawiający **deltoid**.



Ponieważ deltoid ma dwie pary sąsiednich boków równych, to każda z par tworzy ramiona trójkąta równoramiennego o podstawie, która jest przekątną AC deltoidu.

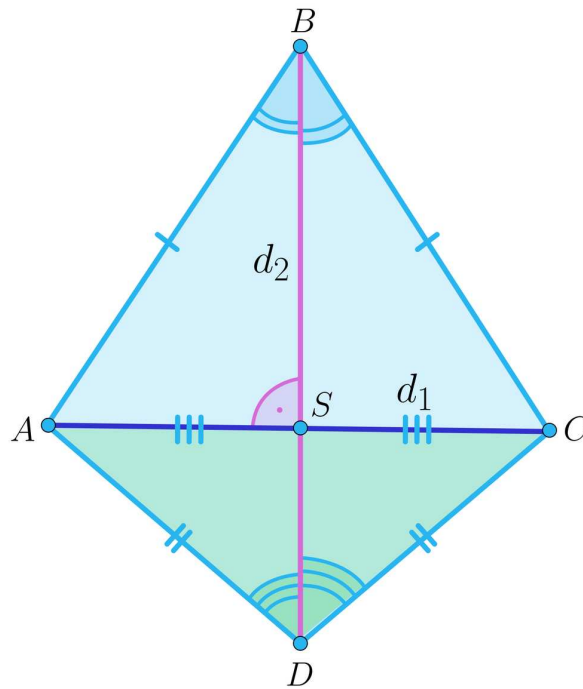
Zauważmy, że wysokości w tych trójkątach leżą na symetralnej podstawy AC i przekątną BD deltoidu jest sumą wysokości tych trójkątów.

Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy, że w deltoidzie:

1. przekątna, która dzieli deltoid na trójkąty równoramienne, oznaczana jest symbolem d_1 ,
2. przekątna, która jest sumą wysokości tych trójkątów równoramiennych, oznaczana jest symbolem d_2 .

Przykład 1

1. Pokażemy, że przekątna d_2 leży na symetralnej przekątnej d_1 oraz, że przekątne deltoidu przecinają się pod kątem prostym i przekątna d_2 dzieli przekątną d_1 na połowy.
2. Pokażemy, że przekątna d_2 w deltoidzie jest dwusieczną kątów leżących przy wierzchołkach, które ona łączy.



Rozwiązanie

Rzeczywiście, wystarczy zauważyć, że w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta leżącego naprzeciwko podstawy oraz wysokość poprowadzona do podstawy leżą na symetralnej podstawy.

Własność: Charakteryzacja deltoidu

1. Czworokąt wypukły jest deltoidem wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z przekątnych jest symetralną drugiej przekątnej.
2. Czworokąt wypukły jest deltoidem wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z przekątnych leży na dwusiecznej kątów przy wierzchołkach, które łączy.
3. Czworokąt wypukły jest deltoidem wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z przekątnych jest jego osią symetrii.

Dowód

1. Jeśli czworokąt jest deltoidem, to przekątna d_2 leży na symetralnej przekątnej d_1 .

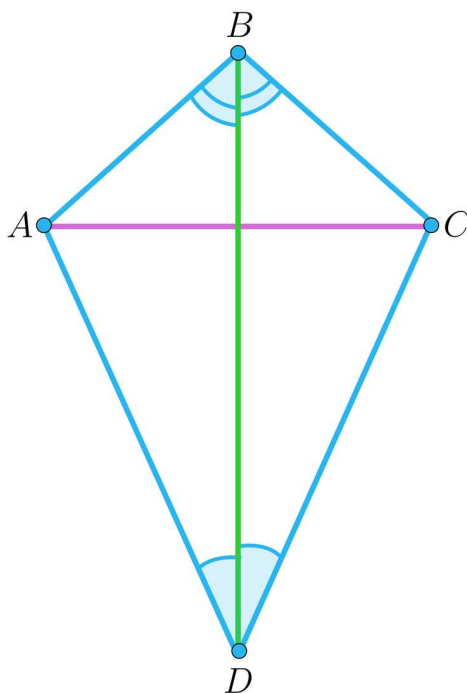
W drugą stronę, odwołajmy się do własności [symetralnej odcinka](#):

Symetralna odcinka jest zbiorem punktów równoodległych od końców tego odcinka.

Załóżmy, że jedna przekątna czworokąta wypukłego $ABCD$, na przykład BD , leży na symetralnej przekątnej AC . Z własności symetralnej wynika, że $|AB| = |BC|$ i $|AD| = |DC|$, więc czworokąt $ABCD$ jest deltoidem.

2. Jeśli czworokąt jest deltoidem, to przekątna d_2 leży na **dwusiecznej kątów** leżących naprzeciwko przekątnej d_1 .

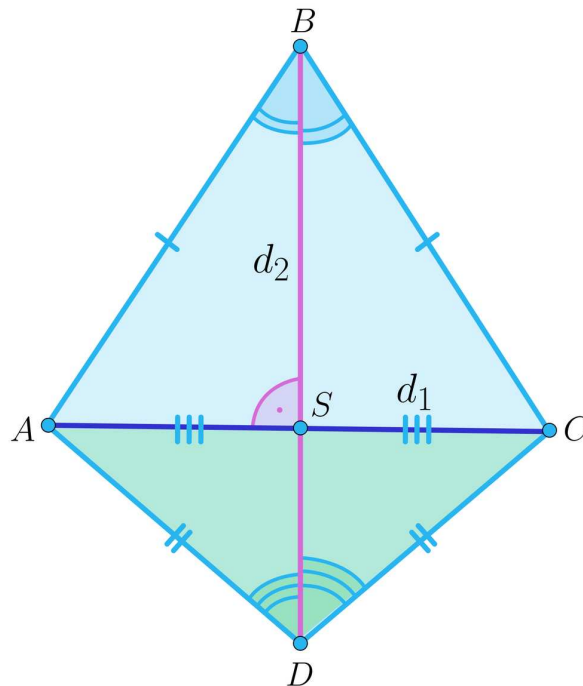
W drugą stronę, założmy, że jedna przekątna czworokąta wypukłego $ABCD$, na przykład BD , jest dwusieczną kątów przy wierzchołkach B i D . Wtedy z cechy przystawania trójkątów **kbk** wynika, że trójkąty ABD i CBD są przystające, więc mają równe wysokości opuszczone na wspólną podstawę BD .



3. Jeśli przekątna leży na osi symetrii czworokąta, to jest dwusieczną kątów przy wierzchołkach będącymi końcami tej przekątnej, a stąd własność 3 jest prawdziwa.

Przykład 2

Wskazemy w deltoidzie pary trójkątów przystających. Zastosujmy oznaczenia z powyższego rysunku i niech S będzie punktem przecięcia przekątnych deltoidu.



Rozwiązanie

Trójkąty ABD i CBD są przystające na mocy cechy **kbk**, bo mają wspólny bok BD i równe odpowiednie kąty leżące przy tym boku. Również cecha **bbb** dowodzi przystawania tych trójkątów.

Trójkąty ABS i CBS są przystające, zarówno na mocy cechy **bbb** jak i cechy **kbk**.

Podobnie, trójkąty ADS i CDS są przystające na mocy obu tych cech

Własność: równość kątów w deltoidzie

Dwa kąty przy wierzchołkach, które łączy przekątna d_1 , są równe.

Dowód

Własność ta wynika wprost z faktu, że przekątna d_2 leży na osi symetrii deltoidu.

Przykład 3

Powtórzmy fragment instrukcji budowy latawca.

1. Weź dwie drewniane listewki. Przytnij listewki do odpowiedniej długości. Krótsza z nich powinna mieć długość równą $\frac{3}{4}$ długości dłuższej listewki.
2. Wyznacz dokładny środek krótszej z listewek i zwiąż listewki ze sobą sznurkiem na kształt krzyża (pod kątem 90°). Krótsza listwa powinna znajdować się na wysokości około $\frac{2}{3}$ dłuższej listewki.
3. Wiązanie wzmocnij za pomocą kleju. Pamiętaj, że musi być zachowany dokładny kąt 90° – inaczej latawiec nie będzie latał.

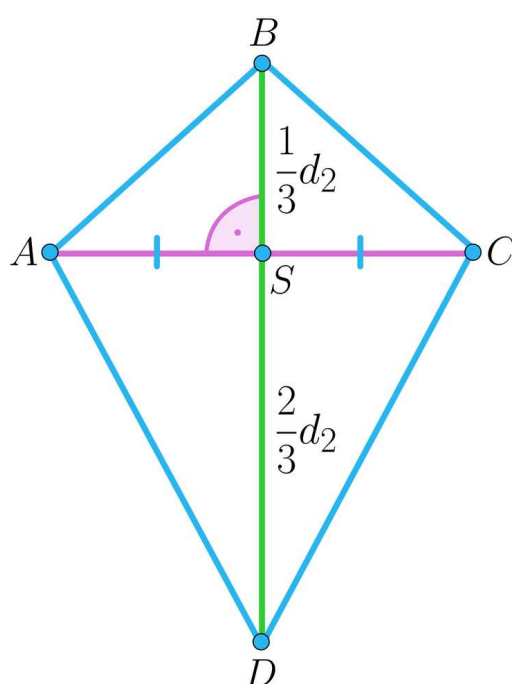
Pokażemy, że instrukcja ta wskazuje jak zbudować przekątne deltoidu, który nie jest rombem.

Wyznamy też obwód tego latawca przy założeniu, że $d_2 = 96$ cm.

Rozwiązanie

Rzeczywiście, po pierwsze, krótsza przekątna ma długość $\frac{3}{4}$ długości dłuższej. Po drugie, punkt przecięcia jest na wysokości $\frac{2}{3}$ dłuższej przekątnej i w połowie krótszej przekątnej, czyli krótsza przekątna dzieli się w połowie. Ostatecznie, przekątne przecinają się pod kątem prostym.

Obliczamy $d_1 = \frac{3}{4}d_2 = \frac{96 \cdot 3}{4} = 72$ cm. Niech S będzie punktem przecięcia przekątnych.



Wtedy $|BS| = \frac{96}{3} = 32$ cm, $|SD| = \frac{96 \cdot 2}{3} = 64$ cm,

$|AS| = |CS| = 36$ cm.

Aby wyznaczyć obwód tego deltoidu trzeba wyznaczyć długości boków AB i AD . Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

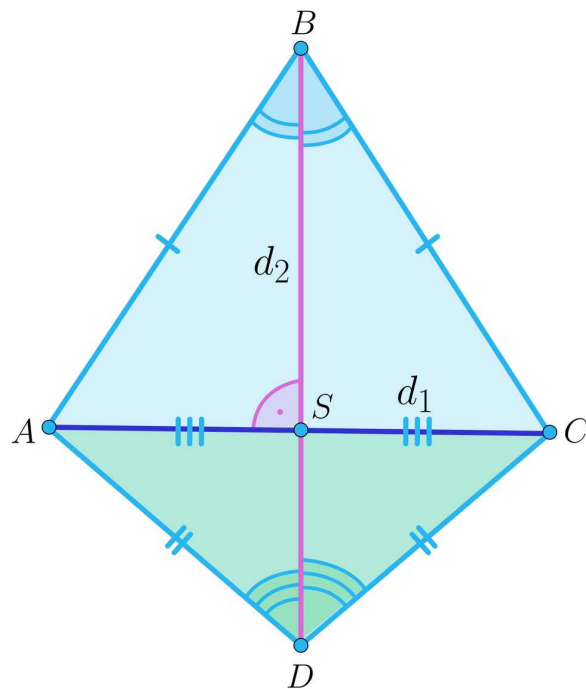
$$|AB|^2 = 36^2 + 32^2 = 2320, |AB| = \sqrt{2320} = 4\sqrt{145} \text{ cm}$$

$$|AD|^2 = 64^2 + 36^2 = 5392, |AD| = \sqrt{5392} = 4\sqrt{337} \text{ cm}$$

Obwód deltoidu jest równy $8\sqrt{145} + 8\sqrt{337}$ centymetrów.

Pole deltoidu

Aby wyznaczyć pole deltoidu skorzystamy z umiejętności obliczania pól trójkątów prostokątnych. Przy oznaczeniach z rysunku zauważamy, że deltoid jest sumą trójkątów ABC i ADC , więc pole deltoidu jest sumą pól tych trójkątów.



$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ADC} = \frac{|BS| \cdot |AC|}{2} + \frac{|DS| \cdot |AC|}{2} = \frac{|AC|}{2} (|BS| + |DS|) = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Pokazaliśmy w ten sposób następujące twierdzenie

Twierdzenie: o polu deltoidu 1

Pole deltoidu o przekątnych d_1 i d_2 jest równe $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

Przykład 4

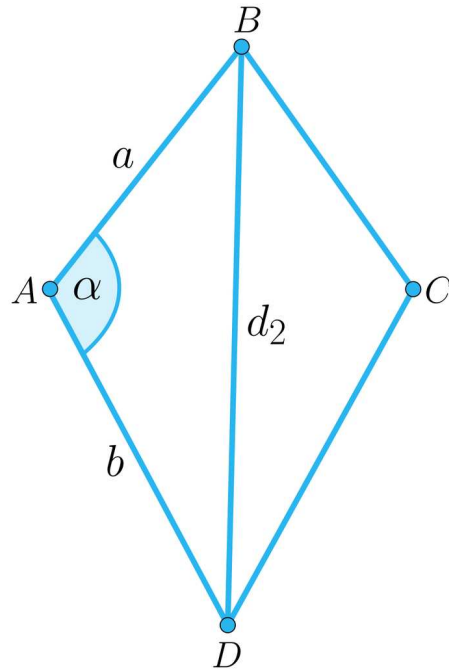
Policzymy pole deltoidu wiedząc, że jego przekątne mają długości 72 i 96 centymetrów.

Rozwiązanie

$$P = \frac{72 \cdot 96}{2} = 3456 \text{ cm}^2$$

Zauważmy, że deltoid jest również sumą trójkątów ABD i CBD , więc pole deltoidu jest sumą pól tych trójkątów. Wiemy, że te trójkąty są przystające, więc

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{CBD} = 2P_{ABD}$$



Stąd wynika, że do policzenia pola deltoidu wystarczy znać pole trójkąta, którego bokiem jest przekątna d_2 . Jeśli znamy długości pozostałych boków $a = |AB|$, $b = |AD|$ oraz kąt α między tymi bokami, to otrzymujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie: o polu deltoidu 2

Pole deltoidu jest równe $P = ab \sin \alpha$, gdzie a , b są długościami boków przy jednym z wierzchołków, które łączy przekątna d_1 a kąt α jest kątem między tymi bokami.

Przykład 5

Obliczymy pole deltoidu przy założeniu, że $\alpha = 120^\circ$, $|AB| = 5$, $|AD| = 10$

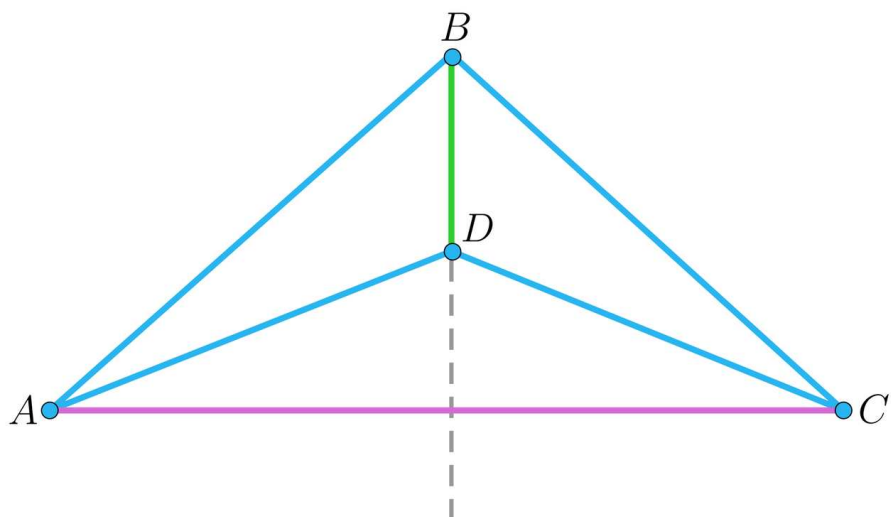
Rozwiązanie

$$P = 5 \cdot 10 \cdot \sin 120^\circ = \frac{50\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}.$$

Porównanie własności deltoidu i wklęsłego czworokąta deltoidalnego

Czworokąt, który ma dwie pary sąsiednich boków równych, ale nie jest wypukły, nazywany jest [wklęsłym czworokątem deltoidalnym](#).

Na rysunku przedstawiony jest wklęsły czworokąt deltoidalny.



Własności wspólne dla omawianych czworokątów to:

1. Jedna z przekątnych leży na symetralnej drugiej przekątnej.
2. Jedna z przekątnych leży na dwusiecznej kątów przy wierzchołkach, z których wychodzi.
3. Jedna z przekątnych leży na jego **osi symetrii**.

W poniższej tabeli zaznaczone są różnice między omawianymi czworokątami.

Deltoid	Wklęsły czworokąt deltoidalny
Przekątne przecinają się	Przekątne nie przecinają się
Jedna z przekątnych dzieli drugą w połowie pod kątem prostym	Linia zawierająca jedną z przekątnych dzieli drugą w połowie pod kątem prostym
Jest sumą trójkątów równoramiennych	Jest różnicą trójkątów równoramiennych

Słownik

kąt wypukły

kąt, który ma miarę mniejszą lub równą 180°

czworokąt wypukły

czworokąt, którego wszystkie cztery kąty wewnętrzne są wypukłe

czworokąt wklęsły

czworokąt, którego jeden z kątów wewnętrznych jest wklęsły

kwadrat

czworokąt, który ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty proste

romb

czworokąt, który ma wszystkie boki równe

deltoid

czworokąt wypukły, który ma dwie pary równych boków sąsiednich

czworokąt deltoidalny

czworokąt, który ma dwie pary równych boków sąsiednich

symetralna odcinka

prosta prostopadła do danego odcinka przechodząca przez jego środek

dwusieczna kąta

prosta dzieląca ten kąt na dwa równe kąty

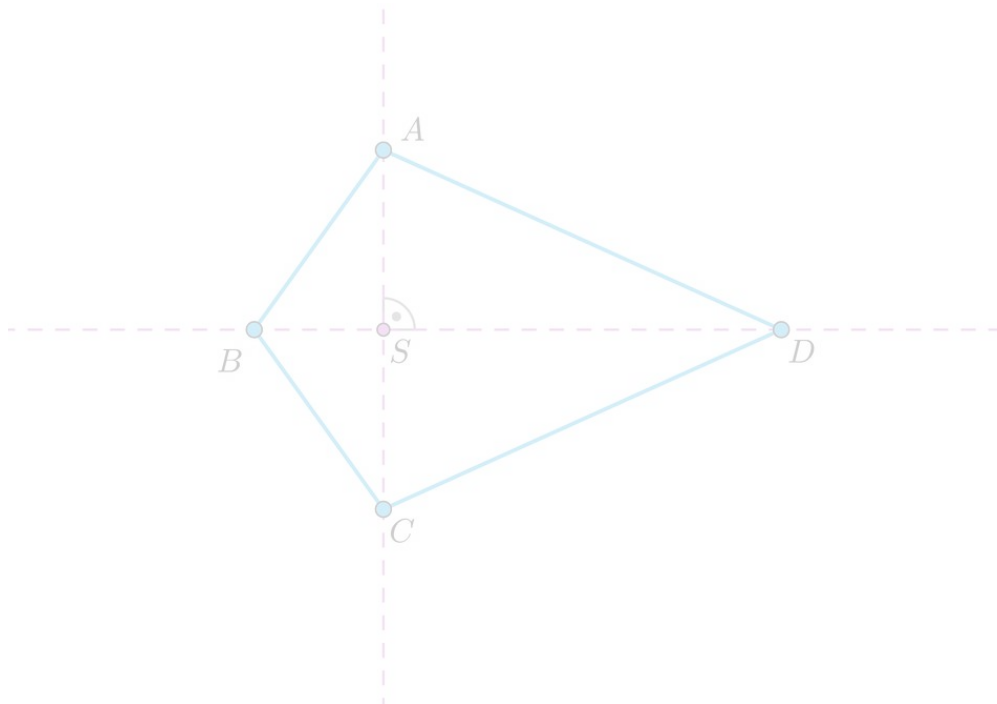
oś symetrii figury

prosta, względem której ta figura jest do siebie osiowo symetryczna

Aplet

Polecenie 1

1. Na ekranie przedstawiony jest deltoid $ABCD$ oraz proste zawierające przekątne tego deltoidu.
2. Poruszaj punktami A , B , D , aby uzyskać różne deltoidy i wklęsłe czworokąty deltoidalne.
3. Poruszając punktem A zmieniasz figurę na podobną do niego (długości boków zmieniają się proporcjonalnie) możesz obrócić figurę.
4. Punkty B i D mogą poruszać się wzdłuż prostej BD . Poruszając tymi punktami możesz dostać różne deltoidy oraz wklęsłe czworokąty deltoidalne.






Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D11Q6jwtn>

Polecenie 2

Ustaw punkty A , B , D tak, by:

1. otrzymana figura była wklęsła
2. otrzymana figura była deltoidem
3. otrzymana figura była równoległobokiem
4. otrzymana figura była kwadratem

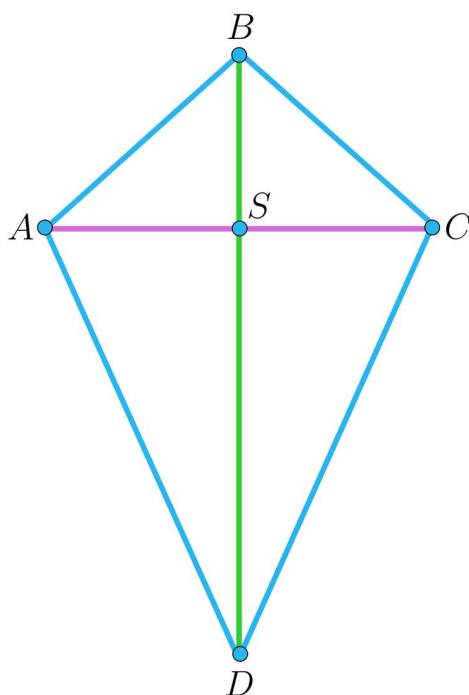
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



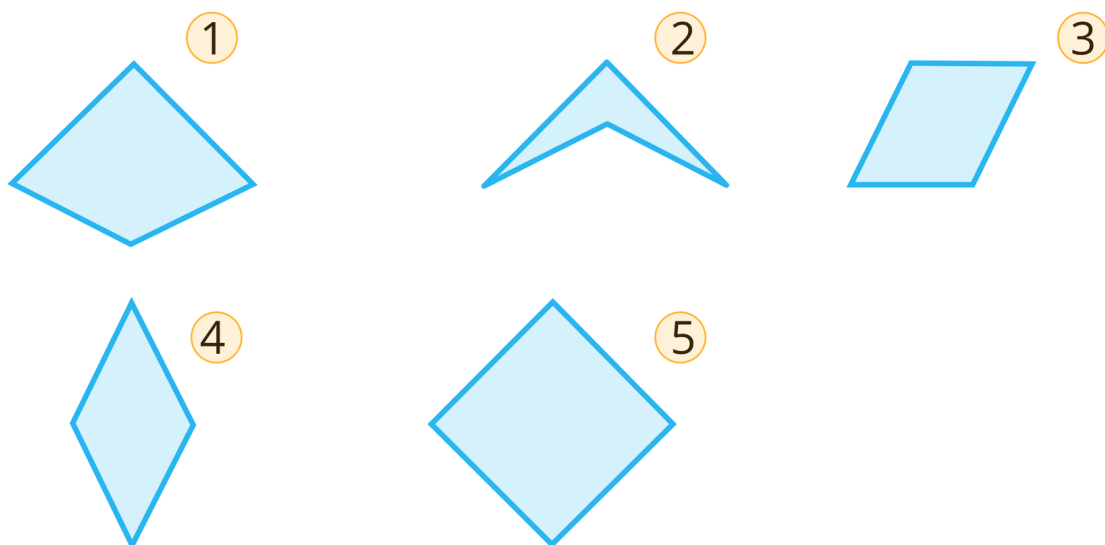
Stosując oznaczenia z rysunku, oceń prawdziwość zdań.



Ćwiczenie 2



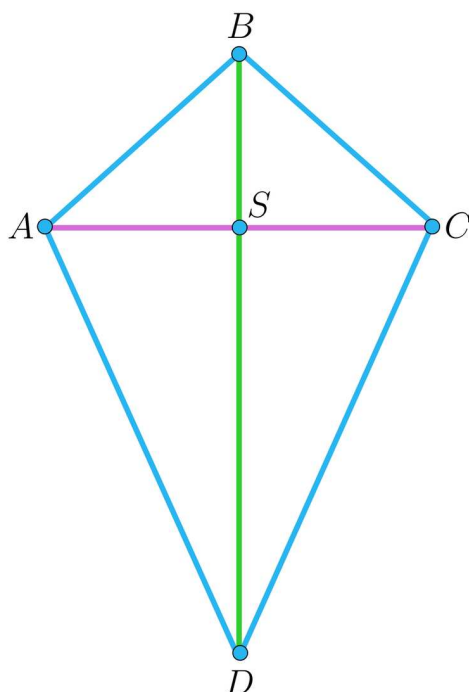
Na rysunku poniżej przedstawiono 4 deltoidy i 1 czworokąt deltoidalny. Przyporządkuj cechy do figur. Przeciągnij w luki właściwe zestawienie figur.



Ćwiczenie 3

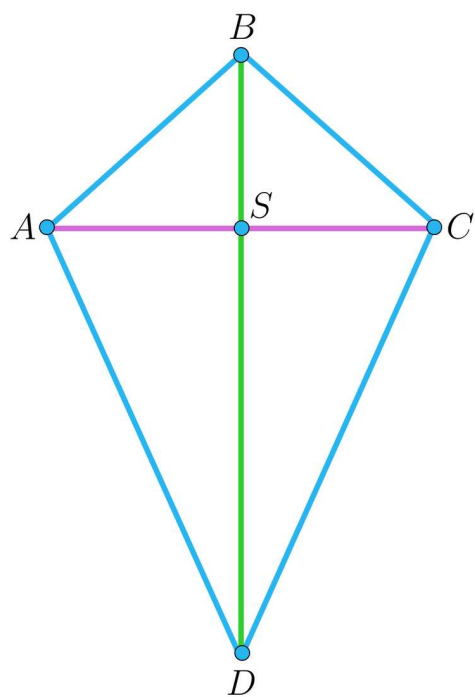


Na rysunku przedstawiony jest deltoid.



Ćwiczenie 4

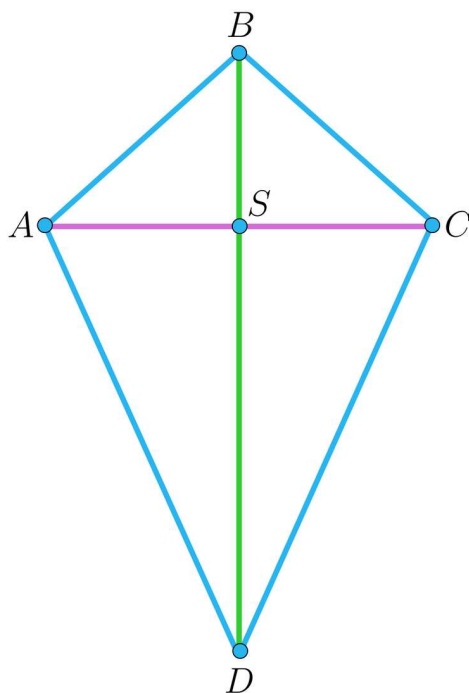
Zapoznaj się z poniższą ilustracją.



Ćwiczenie 5



Dany jest deltoid $ABCD$, S jest punktem przecięcia jego przekątnych.



Zaznacz prawidłową odpowiedź.

Ćwiczenie 6



Zaznacz prawidłową odpowiedź.

Ćwiczenie 7



W deltoidzie dwa sąsiednie boki mają długość 21 i 28, odpowiednio. Kąt między tymi bokami jest prosty. Wyznacz pole i długości przekątnych tego deltoidu.

Ćwiczenie 8



W deltoidzie suma kątów, których dwusieczną jest przekątna BD , jest równa 120° a długości dwóch boków są równe 4, 7, odpowiednio. Oblicz pole deltoidu.

Dla nauczyciela

Autor: Bogdan Staruch

Przedmiot: Matematyka

Temat: Deltoid

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

Zakres podstawowy. Uczeń:

4. korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;

7. stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;

12. przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje i rozpoznaje deltoidy,
- formułuje i rozpoznaje cechy charakteryzujące deltoid, w tym własności boków i przekątnych,
- zna i potrafi wykorzystać wzory na pole deltoidu,
- uzasadnia, że romby są deltoidami i stosuje własności deltoidów w odniesieniu do rombów i kwadratów,
- potrafi podać różnice w pojęciach deltoidu i wypukłego czworokąta deltoidalnego,

- wykorzystuje własności deltoidów w rozwiązywaniu zadań.

Strategie nauczania

- konstruktywizm
- konektywizm
- kognitywizm

Metody i techniki nauczania:

- Pogadanka,
- Praca z interaktywną aplikacją

Formy zajęć:

- praca indywidualna,
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- Komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń lub para uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Nauczyciel przedstawia temat lekcji. Nawiązuje do budowy klasycznego latawca. Przedstawia instrukcję budowania latawca.
2. Uczniowie określają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel przedstawia definicję i przykłady deltoidów oraz czworokątów, które nie są deltoidami.
2. Uczniowie formułują własności charakteryzujących deltoidy w powiązaniu z symetralną, dwusieczną i osią symetrii i ich związkiem z przekątnymi.
3. Nauczyciel omawia trójkąty przystające w deltoidzie. Formułuje własności kątów w deltoidzie.
4. Uczniowie analizują przykłady, w których obliczane jest pole deltoidu z wykorzystaniem wzorów na obliczanie pól trapezów: z wykorzystaniem przekątnych oraz boków i kąta między szczególnymi bokami.
5. Nauczyciel inicjuje dyskusję na temat różnic w pojęciach deltoidu i wypukłego czworokąta deltoidalnego.

6. Na podsumowanie nauczyciel wyświetla aplet, dzięki któremu uczniowie utrwalają własności deltoidów.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie sprawdzają nabyte umiejętności i wiedzę wykonując wskazane ćwiczenia sprawdzające.
2. Nauczyciel podsumowuje lekcję w kontekście postawionych na początku kryteriów sukcesu.

Praca domowa:

1. Uczniowie wyszukują w internecie instrukcję budowy latawca na bazie krzyża, opisują, dlaczego zbudowany latawiec będzie deltoidem lub nie.
2. Uczniowie rozwiązują pozostałe ćwiczenia interaktywne

Materiały pomocnicze

[Pole trapezu](#)

[Pole równoległoboku](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczeń może wykorzystać Aplet

- podczas przygotowywania się do zajęć,
- do utrwalania wiedzy,
- jako inspiracja do stworzenia własnego samouczka lub prezentacji.