



Suma wyrazów ciągu geometrycznego

Twierdzenie o sumie n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. Animacja: wyprowadzenie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. Przykłady na wykorzystanie wzoru na sumę wyrazów w zadaniach tekstowych.

Stosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. Obliczanie wyrazów ciągu. Obliczanie liczby wyrazów ciągu. Zasób zawiera zadania z wyjaśnieniami i rozwiązaniami.

Stosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. Obliczanie wyrazów ciągu. Obliczanie liczby wyrazów ciągu. Zasób zawiera zadania z wyjaśnieniami i rozwiązaniami.

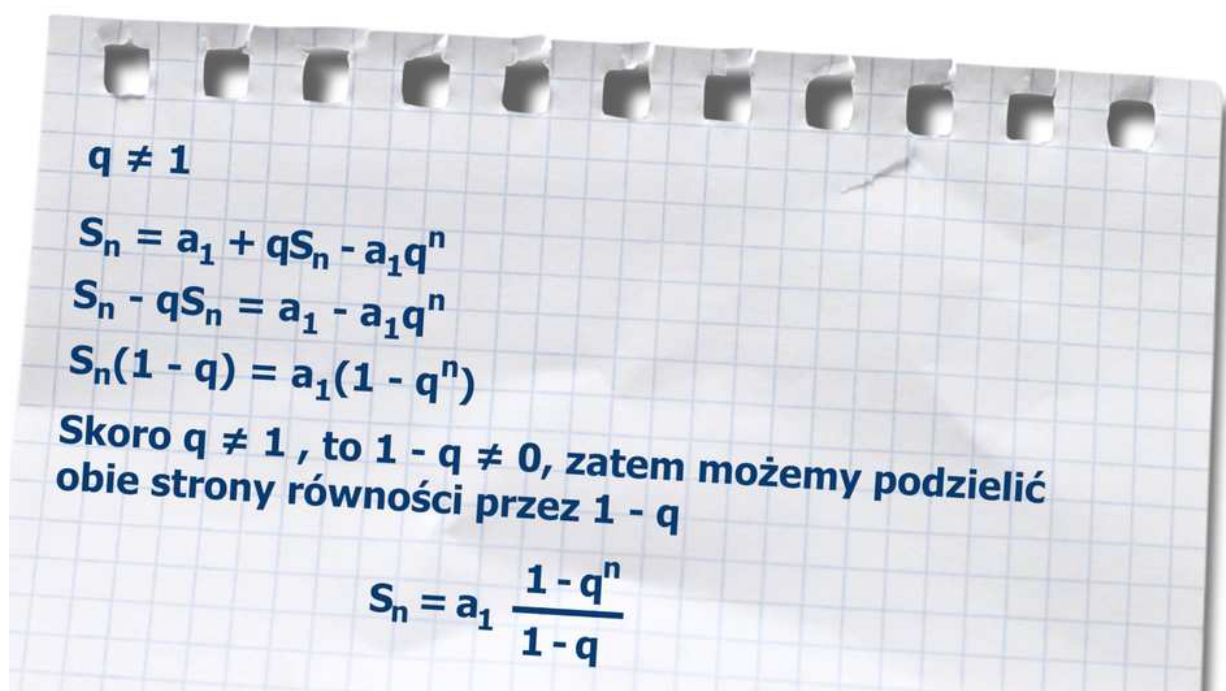
Suma wyrazów ciągu geometrycznego

W tym materiale poznasz podstawowe twierdzenie dotyczące sumy n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. Zamieszczone tu przykłady pokazują sposoby rozwiązywania ćwiczeń związanych z tym pojęciem.

Twierdzenie: Twierdzenie o sumie n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q , to suma S_n jego n początkowych wyrazów jest równa:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \text{ dla } q \neq 1 \text{ albo } S_n = na_1 \text{ dla } q = 1.$$



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1MUhCm2kdUxn>

Suma wyrazów ciągu geometrycznego. Procent składany_animacja_dowod_twierdzenia

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje w jaki sposób obliczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Przykład 1

Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = \frac{1}{2}$ oraz $q = 2$.

Iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest różny od 1, więc suma S_{10} jego dziesięciu początkowych wyrazów jest równa

$$S_{10} = a_1 \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 2^{10}}{-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2^{10} - 1) = \frac{1024 - 1}{2} = \frac{1023}{2} = 511 \frac{1}{2}.$$

Przykład 2

Oblicz sumę wyrazów od ósmego do dwunastego ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 3$ oraz $q = -2$.

Suma, którą należy obliczyć, to $a_8 + a_9 + \dots + a_{12}$. Zrobimy to dwoma sposobami.

- sposób I:

Zauważmy, że wystarczy obliczyć sumy S_{12} oraz S_7 , odpowiednio dwunastu i siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu, a następnie od pierwszej z obliczonych sum odjąć drugą.

$$S_{12} = a_1 \frac{1 - q^{12}}{1 - q} = 3 \cdot \frac{1 - (-2)^{12}}{1 - (-2)} = 3 \cdot \frac{1 - 2^{12}}{3} = 1 - 2^{12} = 1 - 4096 = -4095,$$

$$S_7 = a_1 \frac{1 - q^7}{1 - q} = 3 \cdot \frac{1 - (-2)^7}{1 - (-2)} = 3 \cdot \frac{1 + 2^7}{3} = 1 + 2^7 = 1 + 128 = 129.$$

Zatem

$$a_8 + a_9 + \dots + a_{12} = S_{12} - S_7 = -4095 - 129 = -4224.$$

- sposób II:

Zauważmy, że ciąg, którego kolejnymi wyrazami są $a_8, a_9, \dots, a_{12}$, to pięciowyrazowy ciąg geometryczny, którego pierwszym wyrazem jest ósmy wyraz ciągu (a_n) i którego iloraz jest taki sam, jak iloraz ciągu (a_n) czyli $q = -2$. Zatem

$$a_8 + a_9 + \dots + a_{12} = a_8 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} = a_1 q^7 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} = 3 \cdot (-2)^7 \cdot \frac{1 - (-2)^5}{1 - (-2)} =$$

$$= -3 \cdot 128 \cdot \frac{1 + 2^5}{3} = -128 \cdot 33 = -4224.$$

Przykład 3

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_1 = 27$ oraz $a_4 = 1$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu trzeba dodać, żeby otrzymać $40\frac{1}{3}$?

Na początek obliczmy iloraz tego ciągu. Ponieważ $a_4 = a_1 q^3$, więc $q^3 = \frac{a_4}{a_1} = \frac{1}{27}$. Stąd $q = \frac{1}{3}$. Pozostaje obliczyć n , dla którego $S_n = 40\frac{1}{3}$. Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$27 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = 40\frac{1}{3}.$$

Równanie to przekształcamy równoważnie

$$27 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \frac{121}{3},$$

$$1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{121}{3 \cdot 27} \cdot \frac{2}{3},$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{242}{243},$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{243},$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^5.$$

Stąd $n = 5$. Zatem należy dodać pięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

Przykład 4

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest określona wzorem $S_n = 3^{n+1} - 3$ dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$.

1. Oblicz czwarty wyraz ciągu (a_n) .
2. Udowodnij, że ciąg (a_n) jest geometryczny oraz oblicz iloraz tego ciągu.

Rozwiązanie:

1. Zauważmy, że czwarty wyraz ciągu jest równy $S_4 - S_3$, czyli
$$a_4 = (3^5 - 3) - (3^4 - 3) = 3^5 - 3^4 = 3^4(3 - 1) = 81 \cdot 2 = 162.$$
2. Wyznamy wzór na n -ty wyraz ciągu (a_n) . Postępujemy podobnie jak w punkcie 1. Dla każdej liczby całkowitej $n > 1$ otrzymujemy
$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (3^{n+1} - 3) - (3^n - 3) = 3^{n+1} - 3^n = 3^n(3 - 1) = \\ &= 2 \cdot 3^n = 6 \cdot 3^{n-1}. \end{aligned}$$

To oznacza, że (a_n) jest ciągiem geometrycznym, w którym pierwszy wyraz jest równy $a_1 = 6$, a iloraz $q = 3$.

Przykład 5

Stosunek sumy ośmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego do sumy jego czterech początkowych wyrazów jest równy 82. Oblicz iloraz tego ciągu.

Trzeba zauważyć najpierw, że $q \neq 1$. Gdyby $q = 1$, to $S_8 = 8a_1$, $S_4 = 4a_1$, więc $\frac{S_8}{S_4} = \frac{8a_1}{4a_1} = 2 \neq 82$. Wobec tego ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wyznaczamy sumę ośmiu i sumę czterech jego początkowych wyrazów

$$S_8 = a_1 \frac{1 - q^8}{1 - q}, S_4 = a_1 \frac{1 - q^4}{1 - q}.$$

Ich stosunek jest równy 82, zatem

$$82 = \frac{a_1 \frac{1 - q^8}{1 - q}}{a_1 \frac{1 - q^4}{1 - q}} = \frac{1 - q^8}{1 - q^4} = \frac{(1 - q^4)(1 + q^4)}{1 - q^4} = 1 + q^4.$$

Stąd $q^4 = 81$, czyli $q = 3$ lub $q = -3$.

Ćwiczenie 1



Oblicz sumę ośmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) określonego wzorem $a_n = 512 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$. Uzupełnij lukę, wpisując poprawną wartość.

Odpowiedź: Suma ośmiu początkowych wyrazów wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_3 = -4$ oraz $a_6 = 32$. Uzupełnij lukę, wpisując poprawną wartość.

Odpowiedź: Suma dziesięciu początkowych wyrazów wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów o numerach parzystych ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 3$ oraz $q = \frac{1}{2}$. Uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Suma sześciu początkowych wyrazów o numerach parzystych wynosi .

$$\frac{2725}{2028}$$

$$\frac{4095}{2048}$$

$$\frac{2023}{2138}$$

$$\frac{3257}{4096}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Łamana o długości 1270 mm składa się z odcinków, z których pierwszy odcinek ma długość 640 mm, a każdy następny jest dwa razy krótszy od poprzedniego. Uzupełnij lukę, wpisując poprawną wartość.

Odpowiedź: Łamana składa się z odcinków.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Ile wynosi suma 7 wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = \frac{81}{8}$ oraz $q = \frac{2}{3}$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $\frac{1957}{66}$

☐ $\frac{2059}{72}$

☐ $\frac{2027}{69}$

☐ $\frac{1849}{58}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Jaką wartość przyjmuje pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q = \sqrt{2}$, jeżeli suma $S_8 = 30 + 30\sqrt{2}$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $3\sqrt{2}$

☐ 2

☐ 3

☐ $2\sqrt{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego a_n jest równy (-8) , iloraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{2}$ oraz suma pierwszych n wyrazów jest równa $(-15\frac{3}{4})$. Wyznacz n -ty wyraz tego ciągu geometrycznego. Uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiedni wyraz lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Odpowiedź: Szukanym wyrazem jest .

- $(a_6) = -\frac{1}{3}$
- $(a_5) = \frac{3}{4}$
- $(a_6) = -\frac{1}{4}$
- $(a_7) = -\frac{1}{3}$
- $(a_7) = -\frac{1}{4}$
- $(a_7) = \frac{1}{4}$
- $(a_5) = \frac{1}{4}$
- $(a_6) = \frac{1}{4}$
- $(a_5) = -\frac{2}{3}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Ile wyrazów ciągu geometrycznego a_n , który jest dany wzorem ogólnym $a_n = (-2)^{n+1}$, trzeba zsumować, żeby otrzymać (-340) ? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ 7

☐ 6

☐ 9

☐ 8

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



W pewnym sześciowyrazowym ciągu geometrycznym suma wyrazów stojących na pozycjach nieparzystych jest równa 63, a suma wyrazów stojąca na pozycjach parzystych jest równa 126. Jaką wartość przyjmuje szósty wyraz tego ciągu? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $a_6 = 66$

☐ $a_6 = 86$

☐ $a_6 = 96$

☐ $a_6 = 30$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Oblicz sumę wyrazów od szóstego do dziesiątego ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 5$ oraz $q = 2$. Uzupełnij lukę, wpisując poprawną wartość.

Odpowiedź: Suma wyrazów od szóstego do dziesiątego wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Jaką wartość może przyjąć piąty wyraz ciągu geometrycznego, jeżeli $S_2 = 21$ oraz $S_3 = 129$? Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi.

☐ $a_5 = 147$

☐ $a_5 = 882$

☐ $a_5 = \frac{3888}{49}$

☐ $a_5 = 3888$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o numerach nieparzystych, w którym $a_1 = 7$ oraz $q = -\frac{1}{2}$. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $S_6 = \frac{5426}{884}$

☐ $S_6 = \frac{7855}{914}$

☐ $S_6 = \frac{9555}{1024}$

☐ $S_6 = \frac{8752}{928}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



W pewnym ciągu suma n początkowych wyrazów wyraża się wzorem $S_n = 4^{n+1} - 4$. Wykaż, że jest to ciąg geometryczny.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Stosunek sumy dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego do sumy pierwszych pięciu wyrazów ciągu geometrycznego jest równy 33. Oblicz iloraz tego ciągu.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$(5 - 3) + (5^2 - 3^2) + (5^3 - 3^3) + \dots + (5^n - 3^n) = \frac{5^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} + 1}{4}.$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Uzasadnij, że suma wszystkich potęg liczby 3 o wykładnikach naturalnych mniejszych od 10 jest równa $\frac{3^{10}-1}{2}$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Wiedząc, że w pewnym ciągu geometrycznym pierwszy wyraz jest równy a_1 , ostatni wyraz jest równy a_n oraz suma wszystkich n wyrazów jest równa S_n , wyznacz sumę odwrotności wyrazów tego ciągu.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Wykaż, że różnica liczb $\underbrace{11 \dots 1}_{2n} - \underbrace{22 \dots 2}_n$, gdzie w zapisie odjemnej występuje $2n$ jedynek, a w zapisie odjemnika n dwójek, jest kwadratem liczby naturalnej.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Oblicz sumę $2 + 22 + 222 + \dots + \underbrace{2 \dots 22}_n$, gdzie w zapisie ostatniego składnika występuje n dwójek.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.