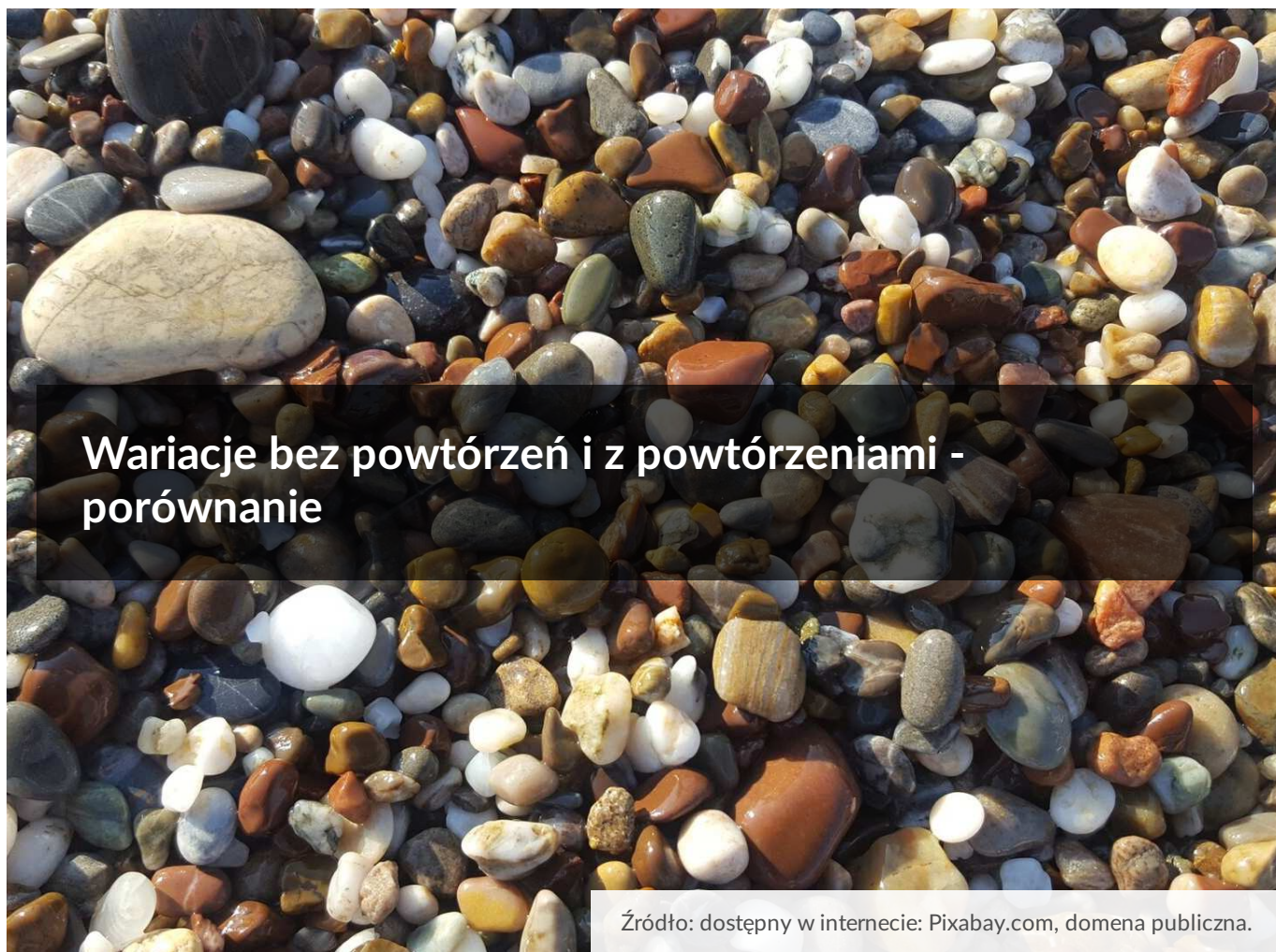




Wariacje bez powtórzeń i z powtórzeniami - porównanie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wariacje bez powtórzeń i z powtórzeniami - porównanie

Źródło: dostępny w internecie: Pixabay.com, domena publiczna.

Na pewno znasz już pojęcie wariacji z powtórzeniami i wariacji bez powtórzeń, czyli dwóch z czterech najważniejszych działań kombinatorycznych. W obu przypadkach tworzymy pewne ciągi, złożone z elementów danych zbiorów. W zależności od rodzaju wariacji, otrzymane ciągi posiadają pewne szczególne własności.

W tym materiale porównamy wariację z powtórzeniami i wariację bez powtórzeń. Zwrócimy szczególną uwagę na to, jak obecność powtórzeń lub ich brak wpływa na liczbę wszystkich możliwych wariacji.

Twoje cele

- Poznasz różnicę, między dwoma rodzajami wariacji,
- Zrozumiesz, w jakich sytuacjach stosować wariację z powtórzeniami, a w jakich wariację bez powtórzeń,
- Wykorzystasz wzory na liczbę wszystkich możliwych wariacji w zadaniach.

Przeczytaj

Znasz już zagadnienie wariacji bez powtórzeń oraz zagadnienie wariacji z powtórzeniami. W tym materiale przypomnimy oba te pojęcia i porównamy je ze sobą.

Wariacja bez powtórzeń

Definicja: k -wyrazowa wariacja bez powtórzeń

k -wyrazową wariacją bez powtórzeń zbioru n -elementowego, gdzie $k \leq n$, nazywamy dowolny k -wyrazowy ciąg utworzony z k różnych elementów danego zbioru.

Przyjmujemy, że liczby k i n są liczbami całkowitymi dodatnimi.

Wariację bez powtórzeń stosujemy wtedy, gdy chcemy poznać liczbę możliwych konfiguracji elementów danego zbioru, przy czym w każdej konfiguracji dany element występuje tylko raz. Poniżej kilka przykładów.

- Na ile sposobów możemy ustawić różne rośliny na parapecie?
- Na ile sposobów możemy ustawić cyfry w ustalonej liczbie, aby była podzielna przez 5?
- Na ile sposobów może wysiąść pięć osób z windy w dziesięciopiętrowym budynku, jeśli każdy wysiada na innym piętrze?

Przykład 1

Przedstawmy n -elementowy zbiór jako worek z pięcioma literami: a , b , c , d i e . Z naszego worka wyciągamy kolejno dwie litery i układamy je w dwuwyrazowy ciąg. Oznacza to, że w tym przypadku $n = 5$ oraz $k = 2$. W bardzo łatwy sposób możemy obliczyć liczbę wszystkich takich ciągów.

Pierwszy wyraz ciągu możemy wybrać na pięć sposobów, ponieważ w naszym worku znajduje się pięć liter. Załóżmy, że wybraliśmy literę c . To oznacza, że drugi wyraz możemy wybrać na cztery sposoby, ponieważ w worku pozostały tylko cztery litery. Załóżmy, że wybraliśmy literę a .

Otrzymany ciąg składający się z liter c i a jest jednym z 20 wszystkich możliwych ciągów. Liczbę 20 otrzymaliśmy wykonując działanie

$$5 \cdot 4 = 20.$$

Skorzystaliśmy tutaj z [reguły mnożenia](#).

Mamy zatem 20 wszystkich dwuwyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru pięcioelementowego.

Ważne!

Zanim zapiszemy ten wynik w postaci ogólnego wzoru, warto dokonać pewnego sprytnego przekształcenia. Zauważmy, że

$$5 \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

To pozwala zmienić wygląd tego wyrażenia, ponieważ

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5!}{3!}$$

Uzyskany rezultat nie koresponduje z naszymi parametrami. Parametrami naszej wariacji są liczby 2 i 5. Przedstawmy zatem liczbę 3 z mianownika jako różnicę naszych parametrów. W ten sposób otrzymaliśmy równość postaci

$$20 = \frac{5!}{(5-2)!}.$$

Powyższe rozważania uzasadniają ogólny wzór na liczbę k -wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego.

Definicja: Liczba k -wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego

Liczba k -wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego, gdzie $k \leq n$, wynosi:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Przyjrzyjmy się następującemu, prostemu przykładowi.

Przykład 2

Pięć obcych osób wsiada do pustego wagonu, w którym jest dziesięć przedziałów. Każda z osób chce siedzieć sama. Zastanówmy się, na ile sposobów można ulokować te pięć osób w dziesięciu przedziałach.

W naturalny sposób przyporządkowujemy pięciu osobom numery przedziałów, które będą zajmowali. Mamy zbiór z numerami przedziałów i tworzymy z elementów tego zbioru pięciowyrazowy ciąg. Stąd wynika, że nasz parametr $k = 5$, a parametr $n = 10$. Mamy tutaj do czynienia z pięciowyrazowymi wariacjami bez powtórzeń zbioru dziesięcioelementowego.

Oznacza to, że liczbę sposobów na ulokowanie tych pięciu osób, można policzyć ze wzoru

$$V_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{10!}{(10-5)!} = 30240.$$

Ten iloczyn możemy otrzymać wprost z reguły mnożenia. Pierwsza osoba może zająć jeden z dziesięciu przedziałów, druga osoba jeden z dziewięciu przedziałów, itd. Nie ma zatem konieczności odwoływania się wprost do wariacji, wystarczy zwykła **reguła mnożenia**.

Przykład 3

Szyfr składa się z dwóch bloków. Pierwszy blok składa się z trzech różnych wielkich liter spośród 26 liter alfabetu angielskiego, po czym następuje blok trzech różnych cyfr wybranych spośród wszystkich dziesięciu cyfr. Ile różnych szyfrów można w ten sposób stworzyć?

Rozwiązanie

Pierwszy z bloków tego szyfru możemy utożsamić z trójwyrazową wariacją bez powtórzeń zbioru dwudziestosześcioelementowego, a drugi z bloków możemy utożsamić z trójwyrazową wariacją bez powtórzeń zbioru dziesięcioelementowego. Aby otrzymać liczbę wszystkich możliwych szyfrów, należy pomnożyć liczby tych wariacji, zgodnie z regułą mnożenia.

Liczbę szyfrów wyliczamy ze wzoru:

$$V_{26}^3 \cdot V_{10}^3 = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 11232000.$$

Odpowiedź

Można w ten sposób utworzyć 11232000 takich szyfrów.

Wariacje z powtórzeniami

Definicja: Wariacja z powtórzeniami

k -wyrazową wariacją z powtórzeniami zbioru n -elementowego nazywamy każdy k -wyrazowy ciąg elementów z tego zbioru, w którym elementy mogą się powtarzać (mogą wystąpić co najwyżej k razy). Liczbę wariacji z powtórzeniami obliczamy ze wzoru

$$W_n^k = n^k.$$

Wariację z powtórzeniami stosujemy wtedy, kiedy chcemy poznać możliwą liczbę konfiguracji elementów zbioru, przy czym pojedyncze elementy mogą występować w danej konfiguracji wielokrotnie. Poniżej kilka przykładów.

- Ile jest możliwych konfiguracji wyrzucenia orła i reszki w piętnastu rzutach **symetryczną monetą**?

- Ile jest wszystkich konfiguracji rzutu trzema identycznymi kostkami do gry?
- Ile jest możliwych ustawień sześciu różnych cyfr na czterech pozycjach, jeśli mogą się one powtarzać?

Przykład 4

Obliczymy, ile można utworzyć liczb trzycyfrowych z cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$.

Rozwiązanie

Mamy do wyboru siedem cyfr, zatem nasz zbiór jest siedmioelementowy. Ciąg jest z kolei trzejelementowy, a cyfry mogą się w nim powtarzać. Nie mamy w zbiorze zera, zatem nie mamy ograniczeń co do ustawienia cyfr w liczbie.

Przykłady liczb: 222, 369, 522.

Zatem:

$$n^k = 7^3 = 343.$$

Przykład 5

Gracz rzuca w jednej turze trzema różnymi kostkami k20 (kostkami dwudziestościennymi): białą, czarną i zieloną. Ile jest możliwych wyników takiego rzutu?

Rozwiązanie

Oczywiście istnieje możliwość, aby na wszystkich kostkach wypadła taka sama liczba oczek.

Przykłady wyników: (18, 19, 10), (12, 10, 17), (6, 6, 6).

Zatem mamy:

n – liczba oczek: $\{1, 2, \dots, 20\}$,

k – liczba kostek: 3.

Zatem podstawiamy liczby do wzoru.

$$n^k = 20^3 = 8000.$$

Przykład 6

Joanna postanowiła narysować dwie figury. Założyła, że będą to dwa m -kąty foremne dla $m \in \{3, 4, \dots, 30\}$. Pierwszą figurę Joanna narysuje czerwonym atramentem z lewej strony kartki, a drugą zielonym z prawej. Konfiguracje brył są dowolne. Ile par figur może narysować Joanna?

Rozwiązanie

Określmy najpierw przykłady możliwych konfiguracji figur na rysunku. W związku z tym, że nie mamy żadnych ograniczeń, przyjmujemy, że figury na rysunku mogą być zarówno m -kątami o różnej liczbie wierzchołków, jak i wielokątami o równej liczbie wierzchołków. Joanna może zatem narysować na przykład takie pary figur: $(3, 10)$, $(30, 12)$, $(6, 6)$, gdzie liczby w ciągu oznaczają liczbę wierzchołków wybranego m -kąta, a kolejność figur wskazuje na umieszczenie figur na kartce oraz na ich kolor. Zauważmy, że para $(4, 5)$ oraz $(5, 4)$ są rozróżnialne, ponieważ pierwsza para składa się z czerwonego kwadratu narysowanego po lewej stronie kartki i zielonego pięciokąta po prawej stronie kartki. Druga para z kolei składa się z czerwonego pięciokąta narysowanego po lewej stronie kartki i z zielonego kwadratu po prawej stronie kartki.

Mamy zatem następujące wartości:

n – liczba wartości przyjmowanych przez parametr m w każdym ze zbiorów: 28,

k – liczba wylosowanych figur: 2.

Zatem podstawiamy liczby do wzoru.

$$n^k = 28^2 = 784.$$

Przykład 7

Ile można stworzyć różnych pięciocyfrowych liczb z cyfr ze zbioru $\{1, 2\}$?

Rozwiązanie

Zauważmy, że mamy znaleźć różne liczby. Czy zatem nie możemy skorzystać ze wzoru na liczbę wariacji bez powtórzeń, skoro liczby nie mogą się powtarzać? Otóż nie. Brak możliwości powtórzeń dotyczy powstałych liczb, a nie cyfr w obrębie danej liczby. Cyfry mogą się powtarzać. Będą to zatem wariacje z powtórzeniami.

Przykłady liczb: 11221, 22112, 11111.

Mamy zatem następujące wartości:

n – liczba osób: 2,

k – liczba kostek: 5.

Zatem podstawiamy liczby do wzoru.

$$n^k = 2^5 = 32.$$

Porównanie

Przyjrzyjmy się teraz kilku przykładom, w których spojrzymy na daną sytuację w dwojaki sposób, to znaczy zmienimy warunki zadania tak, aby wykorzystać raz wariację bez powtórzeń, a raz z powtórzeniami.

Przykład 8

Ile liczb sześciocyfrowych możemy skonstruować, używając cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$, jeżeli

- cyfry w liczbach nie mogą się powtarzać,
- cyfry w liczbach mogą się powtarzać?

Rozwiązanie

- a. Określmy jakie liczby możemy utworzyć, nie powtarzając cyfr.

Przykłady liczb: 123578, 328751, 813257.

Mamy więc taką sytuację: jako cyfrę setek tysięcy w liczbie możemy użyć dowolną z sześciu cyfr. Jako dziesiątek tysięcy dowolną z pięciu, ponieważ jedna została wykorzystana. Jako cyfrę tysięcy możemy ustawić jedną z czterech cyfr i tak dalej. Zatem, korzystając z reguły mnożenia, zapiszmy

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720.$$

Możemy również skorzystać ze wzoru na liczbę wariacji bez powtórzeń, przy czym n – liczba cyfr w zbiorze: 6,

k – liczba cyfr w liczbie sześciocyfrowej: 6.

Podstawiamy liczby do wzoru.

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{720}{0!} = \frac{720}{1} = 720$$

- b. Określmy, jakie liczby możemy utworzyć, jeśli cyfry w liczbie mogą się powtarzać.

Przykłady liczb: 123578, 323151, 555555.

Mamy więc taką sytuację: jako cyfrę setek tysięcy w liczbie możemy użyć dowolną z sześciu cyfr. Jako dziesiątek tysięcy dowolną z sześciu, ponieważ cyfry mogą się powtarzać. Jako cyfrę tysięcy możemy ustawić jedną z sześciu cyfr i tak dalej. Zatem, korzystając z reguły mnożenia, zapiszmy

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 46656.$$

Możemy również skorzystać ze wzoru na liczbę wariacji z powtórzeniami, przy czym n – liczba cyfr w zbiorze: 6,

k – liczba cyfr w liczbie sześciocyfrowej: 6.

Podstawiamy liczby do wzoru.

$$n^k = 6^6 = 46656$$

Jak widzimy, różnica w przypadku (a) i (b) jest znaczna.

Przykład 9

Janek kupił zapieczętowany rower na czterocyfrowy szyfr. Ile może ustawić konfiguracji szyfru przy założeniu, że

- cyfry nie mogą się powtarzać,
- cyfry mogą się powtarzać?

Rozwiązanie

- a. Określmy jakie konfiguracje szyfru może utworzyć Janek, nie powtarzając cyfr.

Przykłady szyfrów: 1563, 0872, 5467.

Mamy więc taką sytuację: jako pierwszą cyfrę szyfru Janek może użyć dowolną z dziesięciu cyfr. Jako drugą cyfrę, może użyć dowolną z dziewięciu, ponieważ jedna została wykorzystana. Jako trzecią cyfrę może ustawić jedną z ośmiu cyfr, a jako czwartą, jedną z siedmiu. Zatem, korzystając z reguły mnożenia, zapiszmy

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Możemy również skorzystać ze wzoru na liczbę wariacji bez powtórzeń, przy czym n – liczba cyfr w zbiorze: 10,

k – liczba cyfr szyfru: 4.

Podstawiamy liczby do wzoru.

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1} = 5040$$

- b. Określmy jakie konfiguracje szyfru może utworzyć Janek, jeśli założymy, że cyfry mogą się powtarzać.

Przykłady szyfrów: 1563, 0802, 7777.

Mamy więc taką sytuację: jako pierwszą cyfrę szyfru Janek może użyć dowolną z dziesięciu cyfr. Jako drugą cyfrę, może użyć dowolną z dziesięciu, ponieważ cyfry mogą się powtarzać. Jako trzecią cyfrę może ustawić jedną z dziesięciu cyfr i jako czwartą, jedną z dziesięciu. Zatem, korzystając z reguły mnożenia, zapiszmy

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000.$$

Możemy również skorzystać ze wzoru na liczbę wariacji z powtórzeniami, przy czym n – liczba cyfr w zbiorze: 10,

k – liczba cyfr w kodzie szyfru: 4.

Podstawiamy liczby do wzoru.

$$n^k = 10^4 = 10000$$

Przykład 10

Trzydzieścioro najlepszych uczniów wzięło udział w loterii zorganizowanej przez szkołę. Każdej z osób przydzielono pewną liczbę od jeden do trzydziestu zgodnie z kolejnością alfabetyczną. Każdy z uczniów wrzucił do urny karteczkę z liczbą mu przydzieloną. W loterii są trzy tury losowania nagród, przy czym każda z nich jest inna.

- a. Ile istnieje możliwości wylosowania trzech zwycięzców przy założeniu, że jedna osoba może wygrać nie więcej, niż jedną nagrodę?
(Podpowiedź: po wylosowaniu danego losu, odkładamy go na bok.)
- b. Ile istnieje możliwości wylosowania trzech zwycięzców przy założeniu, że jedna osoba może wygrać więcej, niż jedną nagrodę?
(Podpowiedź: po wylosowaniu danego losu, wrzucamy go z powrotem do puli.)

Rozwiązanie

W poleceniu podano informację, że każda z nagród jest inna. Czy jest to istotne? Otóż, gdybyśmy mieli trzy identyczne nagrody, to ciągi, np.: (1, 5, 12), (5, 1, 12) i (12, 1, 5) były tożsame, gdyż kolejność wyrazów nie miałaby znaczenia, bo każda z wygranych osób wygrałaby to samo. W przypadku różnych nagród kolejność ma znaczenie, co wbrew pozorom ułatwia nam obliczenia, ponieważ, nie mając tożsamych ciągów, nie musimy ich odejmować od wyniku.

- a. Określmy przykładowe konfiguracje wygranych losów przy założeniu, że po losowaniu odkładamy wygrany los na bok.

Przykłady wygranych: (1, 2, 3), (5, 30, 12), (10, 11, 29).

Mamy więc taką sytuację: pierwszym wyrazem ciągu może być dowolna liczba spośród trzydziestu zapisanych na losach. Drugim wyrazem ciągu może być już jedna z dwudziestu dziewięciu liczb, ponieważ los pierwszej wygranej osoby został odłożony. Trzecim wyrazem ciągu może być jedna z dwudziestu ośmiu liczb. Zatem, korzystając z reguły mnożenia, zapiszmy

$$30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360.$$

Możemy również skorzystać ze wzoru na liczbę wariacji bez powtórzeń, przy czym

n – liczba osób w grupie: 30,

k – liczba wygranych: 3.

Podstawiamy liczby do wzoru.

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{30!}{(30-3)!} = \frac{30!}{27!} = \frac{28 \cdot 29 \cdot 30}{1} = 24360$$

- b. Określmy przykładowe konfiguracje wygranych losów przy założeniu, że jedna osoba może wygrać wszystkie trzy nagrody. To oznacza, że los wygranej osoby wraca do puli losów po każdym losowaniu.

Przykłady wygranych: (1, 2, 3), (5, 12, 12), (10, 10, 10).

Mamy więc taką sytuację: pierwszym wyrazem ciągu może być dowolna liczba spośród trzydziestu zapisanych na losach. Drugim wyrazem ciągu może być jedna z trzydziestu liczb, ponieważ los pierwszej wygranej osoby wrócił do puli. Trzecim wyrazem ciągu może być również jedna z trzydziestu liczb. Zatem, korzystając z reguły mnożenia, zapiszmy

$$30 \cdot 30 \cdot 30 = 27000.$$

Możemy również skorzystać ze wzoru na liczbę wariacji z powtórzeniami, przy czym

n – liczba osób w grupie: 30,

k – liczba wygranych: 3.

Podstawiamy liczby do wzoru.

$$n^k = 30^3 = 27000$$

Słownik

reguła mnożenia

regułę mnożenia (zasadę mnożenia) wykorzystujemy do zliczenia zdarzeń elementarnych dla doświadczeń losowych, które można podzielić na etapy; jeśli doświadczenie losowe możemy podzielić na dwa etapy i pierwszy etap możemy wykonać na x sposobów, zaś drugi na y sposobów, to całą czynność możemy wykonać na $x \cdot y$ sposobów

symetryczna moneta

moneta nieobciążona ani ze strony reszki, ani ze strony orła, prawdopodobieństwo wyrzucenia orła taką monetą jest równe prawdopodobieństwu wyrzucenia reszki i wynosi $\frac{1}{2}$

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem dotyczącym wykorzystania wariacji bez powtórzeń.
Porównaj informacje zawarte w filmie z informacjami z filmu w Poleceniu 2.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D99aA05pl>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący wariacji bez powtórzeń.

Polecenie 2

Zapoznaj się z filmem samouczkiem dotyczącym wykorzystania wariacji z powtórzeniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D99aA05pl>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący wariacji z powtórzeniami.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz w pary działania oraz odpowiadające im wyniki.

$$4! \cdot 2!$$

36

$$3! \cdot 3!$$

9

$$\frac{9!}{8!}$$

1

$$2! \cdot 3!$$

24

$$5! \cdot 1!$$

72

$$\frac{9!}{7!}$$

12

$$\frac{4!}{1!}$$

120

$$\frac{4!}{4!}$$

48

Ćwiczenie 2



Ile istnieje czterocyfrowych kodów składających się z różnych cyfr? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $V_{10}^6 = \frac{10!}{4!} = 151200$

☐ $V_9^4 = \frac{9!}{5!} = 3024$

☐ $V_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 5040$

☐ $V_9^6 = \frac{9!}{3!} = 60480$

Ćwiczenie 3



Ile istnieje liczb trzycyfrowych, składających się z cyfr ze zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6\}$? Zakładamy, że cyfry mogą się powtarzać. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $W_5^2 = 5^2 = 25$

☐ $W_5^4 = 5^4 = 625$

☐ $W_6^3 = 6^3 = 216$

☐ $W_5^3 = 5^3 = 125$

Ćwiczenie 4



Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Liczba trójwyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru sześćelementowego jest o 96 mniejsza niż liczba trójwyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru sześćelementowego.

☐ Liczba czterowyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru siedmioelementowego jest 11 razy mniejsza niż liczba czterowyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru siedmioelementowego.

☐ Wszystkich liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ jest tyle samo co wszystkich liczb trzycyfrowych składających się z cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

☐ Wszystkich liczb pięciocyfrowych jest więcej niż liczb pięciocyfrowych złożonych z różnych cyfr.

☐ Liczba jednowyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru pięcioelementowego jest równa liczbie jednowyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru pięcioelementowego.

Ćwiczenie 5



Ile istnieje czterocyfrowych liczb złożonych z różnych cyfr? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ 4336

☐ 5200

☐ 4536

☐ 5040

Ćwiczenie 6



Oblicz liczbę wszystkich możliwych kodów w podanych przypadkach, a następnie uporządkuj je w kolejności rosnącej.

Kod może składać się z trzech dowolnych cyfr, ale cyfry nie mogą się powtarzać. 

Kod może składać się z czterech cyfr od 7 do 9 i cyfry mogą się powtarzać. 

Kod może składać się z czterech parzystych cyfr i cyfry mogą się powtarzać. 

Kod może składać się z trzech cyfr od 1 do 7 i cyfry mogą się powtarzać. 

Ćwiczenie 7



Uzupełnij poniższe zdania tak, aby były zdaniami prawdziwymi. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę i wybierz właściwą odpowiedź.

*Zakładamy, że **słowo** to ciąg liter mający sens lub nie.

- Z sześciu różnych liter możemy, przy założeniu, że w słowie nie może być dwóch takich samych liter, stworzyć słów trzyliterowych.
- Z pięciu różnych liter możemy, przy założeniu, że w słowie może być więcej niż jedna taka sama litera, stworzyć słów trzyliterowych.
- Z siedmiu różnych liter możemy, przy założeniu, że w słowie nie może być dwóch takich samych liter, stworzyć słów dwuliterowych.
- Z czterech różnych liter możemy, przy założeniu, że w słowie może być więcej niż jedna taka sama litera, stworzyć słów czteroliterowych.
- Z sześciu różnych liter możemy, przy założeniu, że w słowie nie może być dwóch takich samych liter, stworzyć słów czteroliterowych.

125

256

36

300

48

100

56

360

128

144

42

120

512

49

160

Ćwiczenie 8



Szyfr do sejfów składa się z dwóch bloków. Pierwszy blok składa się z trzech liter ze zbioru $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, a drugi z czterech cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Odpowiedz na poniższe pytania.

- Ile wszystkich takich szyfrów można ułożyć, gdy litery i cyfry nie mogą się powtarzać?
- Ile wszystkich takich szyfrów można ułożyć, gdy litery i cyfry mogą się powtarzać?
- Ile wszystkich takich szyfrów można ułożyć, gdy litery nie mogą się powtarzać, a cyfry mogą się powtarzać?

Ćwiczenie 9



Oblicz, ile istnieje parzystych liczb pięciocyfrowych, które są podzielne przez 5:

- jeżeli cyfry w tej liczbie nie mogą się powtarzać,
- jeżeli cyfry w tej liczbie mogą się powtarzać,
- jeżeli cyfry w tej liczbie nie mogą się powtarzać oraz liczba ta jest mniejsza niż 5000.

Dla nauczyciela

Autor: Adam Jackowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wariacje bez powtórzeń i z powtórzeniami - porównanie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

XI. Kombinatoryka. Zakres podstawowy. Uczeń:

Zakres rozszerzony 1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje różnice pomiędzy dwoma rodzajami wariacji,
- rozróżnia sytuację, w jakich należy stosować wariację z powtórzeniami, a w jakich wariację bez powtórzeń,
- wykorzystuje wzory na liczbę wszystkich możliwych wariacji w zadaniach.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja,

- burza mózgów,
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem medium bazowego i ćwiczeń interaktywnych.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do internetu, słuchawki;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg zajęć:

Faza wstępna

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna

1. Nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupa pierwsza analizuje materiał dotyczący wariacji z powtórzeniami. Druga grupa analizuje materiał dotyczący wariacji bez powtórzeń. Grupy posiłkują się odpowiadającymi zakresowi materiału animacjami.
2. Następnie z każdej grup wybierani są dwaj eksperci, którzy referują zagadnienie na forum klasy, wyjaśniają wątpliwości członkom grupy przeciwnej, odpowiadają na pytania.
3. Eksperci prezentują przykłady 8, 9 oraz 10 zwracając uwagę na różnice pomiędzy wariacjami. Nauczyciel uzupełnia w razie potrzeby wyjaśnienia ekspertów.
4. Uczniowie w parach przy wsparciu ekspertów rozwiązują ćwiczenia 3-7 w sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy, które pojawiły się podczas rozwiązywania ćwiczeń interaktywnych.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, w tym pracę ekspertów.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 1, 2, 8, 9 w sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Liczba wszystkich k -elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego
- Wariacje bez powtórzeń

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać animacje na lekcjach poświęconych wariacjom.