



Wielokąty na powierzchni kuli

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film edukacyjny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Na globusie układ równoleżników i południków tworzy siatkę, której elementami są wielokąty. Na piłce nożnej lub innych kulistych przedmiotach też możemy dostrzec wielokąty, jak na poniższych zdjęciach.



Czy tworząc wielokąty na sferze możemy posługiwać się wiedzą o wielokątach na płaszczyźnie?

Podczas tej lekcji zajmiemy się wielokątami na powierzchni kuli. Materiał zawarty w tej lekcji jest materiałem nadobowiązkowym, więc jeśli nie interesuje Cię ta tematyka, możesz po prostu lekcję pominąć.

Twoje cele

- Przypomnisz wiadomości o wielokątach na płaszczyźnie.
- Narysujesz wybrane wielokąty na sferze i zbadasz ich własności.
- Porównasz własności niektórych znanych Ci wielokątów na płaszczyźnie i na sferze.
- Odkryjesz nowe dla siebie figury, z którymi nie spotkałeś się na lekcjach planimetrii.

Przeczytaj

Przypomnijmy sobie podstawowe wiadomości o **wielokątach** na płaszczyźnie.

Wielokąt to figura płaska ograniczona linią łamaną zamkniętą, zazwyczaj jest to łamana zwyczajna (czyli taka, której odcinki nie przecinają się, to znaczy nie mają punktów wspólnych poza wierzchołkami). Boki tej łamanej nazywamy bokami wielokąta, zaś jej wierzchołki nazywamy wierzchołkami wielokąta.

Przykładami wielokątów są trójkąty, kwadraty, prostokąty, wielokąty foremne, wielokąty nieforemne.

Krótko przypomnijmy podstawowe własności o **trójkątach** i **czworokątach**.

Trójkąt

Przykład 1

Trójkąt to najmniejsza figura wypukła i domknięta, zawierająca pewne trzy ustalone i niewspółliniowe punkty płaszczyzny.

Odcinki tworzące łamaną nazywamy bokami, punkty wspólne sąsiednich boków nazywamy wierzchołkami trójkąta. Każdy trójkąt jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje wierzchołki.

- Jakie znamy klasyfikacje trójkątów?
- Jakie znamy podstawowe własności trójkąta?

Rozwiązanie:

- Ze względu na **boki** trójkąty dzielimy na: równoboczne, równoramienne i różnoboczne.
Ze względu na **kąty** trójkąty dzielimy na: ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne.
- W każdym trójkącie suma miar kątów wewnętrznych między bokami jest równa 180° . Boki każdego **trójkąta** spełniają tzw. **nierówność trójkąta**, która mówi, że suma długości dwóch dowolnych boków trójkąta jest większa od długości trzeciego boku.

Czworokąt

Przykład 2

Czworokąt to wielokąt płaski o czterech bokach. Czworokąt posiada dwie przekątne – są to odcinki, z których każdy łączy dwa niesąsiednie wierzchołki czworokąta.

- Jakie czworokąty znamy?
- Jakie własności wymienionych czworokątów znamy?

Rozwiązanie:

- Wśród **czworokątów** najczęściej mówimy o kwadratach, prostokątach, równoległobokach, rombach, trapezach, rzadziej o deltoidach i czworokątach, w których nie widać żadnej regularności.
- Suma miar kątów wewnętrznych w każdym czworokącie jest równa 360° .

W poniższej tabeli zebrane są podstawowe własności wymienionych czworokątów:

czworokąt	przeciwległe boki	przeciwległe kąty	przekątne	inne własności
kwadrat	równe i równoległe	równe	równe, przecinają się pod kątem prostym, dzielą się na połowy	wszystkie boki równe, wszystkie kąty proste
prostokąt	równe i równoległe	równe	równe, punkt przecięcia dzieli je na połowy	wszystkie kąty proste
równoległobok	równe i równoległe	równe	punkt przecięcia dzieli je na połowy	suma kątów przyległych do jednego boku jest równa 180
romb	równe i równoległe	równe	przecinają się pod kątem prostym, dzielą się na połowy	wszystkie boki równe, suma kątów przyległych do jednego boku jest równa 180
trapez	przynajmniej jedna para boków równoległych	różne	brak cech charakterystycznych	suma kątów przyległych do każdego z boków nierównoległych jest równa 180

czworokąt	przeciwległe boki	przeciwległe kąty	przekątne	inne własności
deltoid	różne, nie są równoległe	dwa równe, dwa różne	przecinają się pod kątem prostym, punkt przecięcia dzieli jedną z nich na połowy	dwie pary sąsiednich boków równych

Wielokąt foremny

Przykład 3

Wielokąt foremny to wielokąt, który ma wszystkie kąty wewnętrzne równe i wszystkie boki równej długości.

Jakie własności wielokątów foremnych znamy?

Rozwiązanie:

Suma miar kątów wewnętrznych w **wielokącie foremnym** o n bokach jest równa $180^\circ \cdot (n - 2)$. Miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego o n bokach można obliczyć dzieląc sumę miar kątów wewnętrznych przez liczbę tych kątów n .

Przed przystąpieniem do dalszej pracy postawmy następujące problemy:

Czy na powierzchni kuli można skonstruować wszystkie z wymienionych wielokątów?

Jakie mają własności?

Badaniem tych zagadnień zajmiemy się podczas tej lekcji. W tej lekcji nie ma gotowych przykładów dotyczących wielokątów na **sferze**. Wiedzę odkryjesz prowadząc własną pracę badawczą z różnymi narzędziami badawczymi.

Słownik

wielokąt

figura płaska ograniczona linią łamaną zamkniętą, zazwyczaj jest to łamana zwyczajna

trójkąt

wielokąt o trzech bokach

czworokąt

wielokąt płaski o czterech bokach

wielokąt foremny

wielokąt, który ma wszystkie kąty wewnętrzne równe i wszystkie boki równej długości

sfera

powierzchnia kuli

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem edukacyjnym, a następnie rozwiąż postawione w nim problemy.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DOYIXYguf>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wielokątów na powierzchni kuli.

Polecenie 2

Zaznacz na powierzchni swojej kuli trzy punkty tak, aby nie leżały one na tym samym okręgu wielkim oraz aby żadne dwa z nich nie były punktami biegunowymi dla jakiegoś okręgu wielkiego. Połącz je odcinkami sferycznymi, czyli łukami zawartymi w sferycznych prostych.

Czy otrzymana figura jest wielokątem?

Dlaczego tak lub dlaczego nie?

Ile ma boków?

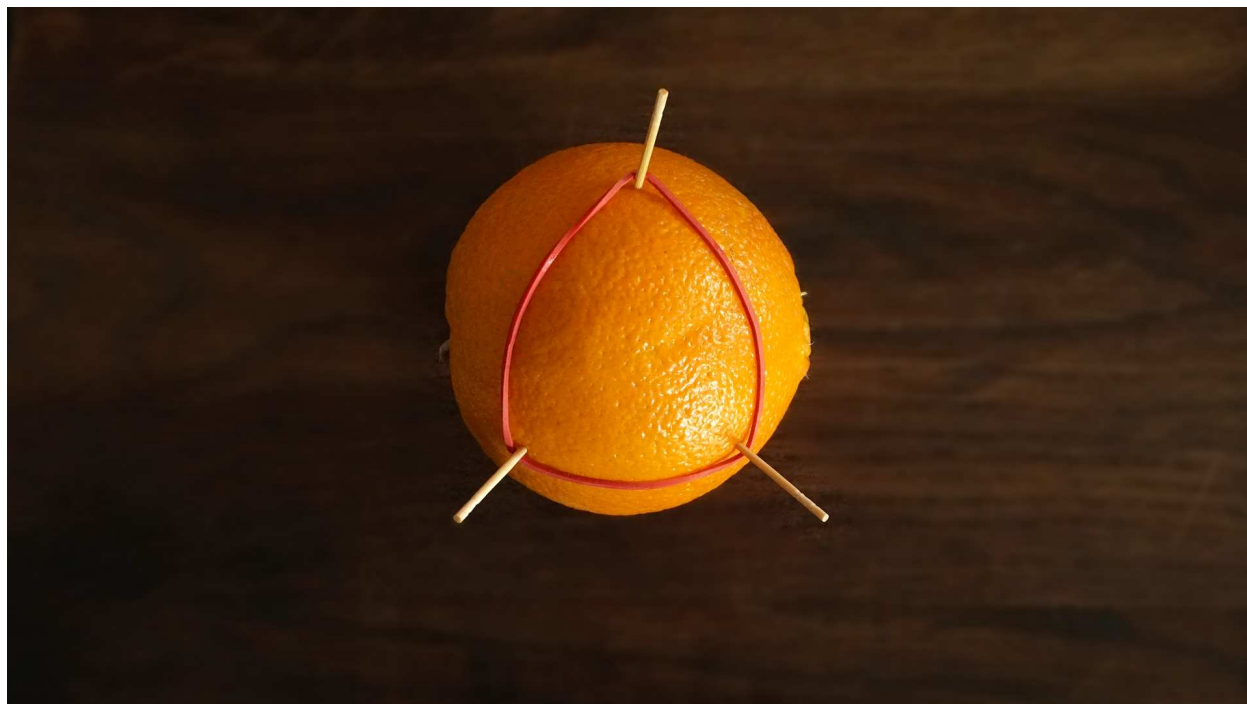
Jak możesz nazwać tę figurę uwzględniając liczbę boków?

Uzasadnij użycie wybranej przez Ciebie nazwy.

Wskaż wewnątrz i zewnątrz figury. Co powiesz o tych obszarach?

Polecenie 3

A co powiesz o takim połączeniu trzech punktów na powierzchni kuli?



- a. Uzyskaj taką figurę posługując się swoją kulą, zapoznaj się z nią ze wszystkich stron i odpowiedz na pytanie: Czy otrzymana figura jest trójkątem? Dlaczego tak lub dlaczego nie? Wskaż wnętrze tego wielokąta, a także jego kąty wewnętrzne.
- b. Zastanów się: czy to możliwe, aby te same trzy wierzchołki wyznaczały dwa różne trójkąty sferyczne? A czy jest to możliwe na płaszczyźnie?

Zapamiętaj:

Aby uniknąć niejednoznaczności w obliczeniach (np. przy wyznaczaniu sumy miar kątów wewnętrznych trójkąta sferycznego), rozwiązując problemy, rozważamy zawsze tzw. trójkąty Eulera, czyli takie, w których miary kątów są nie większe niż 180° .

Polecenie 4

1. Zbuduj na sferze trzy trójkąty: niech pierwszy będzie zawarty w drugim, a drugi w trzecim.
2. Przy pomocy swojego „kątomierza” oszacuj miary kątów wewnętrznych wszystkich trójkątów i oblicz sumy tych miar dla każdego z trójkątów. Porównaj wyniki obliczeń.
3. Spróbuj wyjaśnić, dlaczego masz takie właśnie wyniki swojego doświadczenia.
4. Jak myślisz, jaka jest najmniejsza suma miar kątów wewnętrznych trójkąta sferycznego? Jaka największa? Uzasadnij swoje stwierdzenia.

Zapamiętaj odkrytą przez siebie wiedzę:

1. suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie sferycznym nie jest stała,
2. suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie sferycznym jest większa od 180° .

Polecenie 5

Zbuduj na swojej sferze czworokąt, który posiada wszystkie własności, jakie posiada kwadrat na płaszczyźnie. Pamiętaj, że wierzchołki czworokąta powinny być połączone łukami, które są krótszymi fragmentami okręgów wielkich. Opisz swój sposób konstrukcji.

Czy przeciwległe boki skonstruowanego czworokąta są równoległe? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zmierz kąty skonstruowanego czworokąta. Czy wszystkie kąty są proste? Czy mogą być proste? Odpowiedź uzasadnij.

Zapamiętaj odkrytą przez siebie wiedzę:

Na sferze nie można skonstruować kwadratu, ale można skonstruować czworokąt foremny o wszystkich bokach równych i wszystkich kątach równych, ale nie prostych.

Polecenie 6

Zmierz przekątne skonstruowanego czworokąta i kąty, pod jakimi przekątne przecinają się. Na jakie części dzieli każdą z przekątnych punkt ich przecięcia?

Polecenie 7

Skonstruuj na kartce papieru dwie półproste o wspólnym początku. Czy te dwie półproste “spotkają się” w jakimś innym punkcie, jeśli będziesz przedłużać je w nieskończoność?

Dwie półproste o wspólnym początku dzielą płaszczyznę na dwie części. Opisz “kształty” i “rozmiary” tych części.

Można powiedzieć językiem potocznym, że wielokąt to “zamknięta” figura, a jej bokami są odcinki. Wyjaśnij, czy możliwe jest skonstruowanie na płaszczyźnie wielokąta o dwóch bokach.

Polecenie 8

Zaznacz na sferze punkt i skonstruuj zaczynające się w tym punkcie dowolne łuki dwóch różnych okręgów wielkich. Przedłuż skonstruowane łuki. Czy “spotkają się” one ponownie w jakimś punkcie?

Dwa łuki o wspólnym początku dzielą sferę na dwie części. Opisz “kształty” i “rozmiary” tych części. Czy któraś z części, na które skonstruowane łuki podzieliły sferę, jest wielokątem? Jeśli tak, to jak można nazwać ten wielokąt?

Polecenie 9

Zmierz kąty dwukąta i opisz ich własności. Zmierz boki dwukąta i opisz ich własności.

Zapamiętaj odkrytą przez siebie wiedzę:

Na sferze istnieją figury geometryczne, które nie istnieją na płaszczyźnie. Jedną z takich figur jest dwukąt.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Czy na sferze można zbudować trójkąt o dwóch kątach prostych? A o trzech kątach prostych? Uzasadnij swoją odpowiedź, podając przykłady takich trójkątów lub wykazując, że nie można ich zbudować.

Ćwiczenie 2



Już wiemy z poprzednio wykonanych doświadczeń, że na sferze nie można skonstruować kwadratu, ale można skonstruować czworokąt foremny. Zastanów się nad możliwością skonstruowania na sferze innych znanych Ci czworokątów i uzupełnij poniższy tekst:

Prostokąt być skonstruowany na sferze, ponieważ , a .

Romb być skonstruowany na sferze, ponieważ , a .

Trapez być skonstruowany na sferze, ponieważ , a .

może

może

nie może

posiada wszystkie boki równe

na sferze nie istnieje równoległość

nie może

na sferze nie istnieje równoległość

ma wszystkie kąty proste

na sferze nie istnieje równoległość

posiada dwie pary boków równoległych

może

nie może

posiada dwie pary boków równoległych

posiada przynajmniej jedną parę boków równoległych

Ćwiczenie 3



Wykonaj odpowiednie doświadczenia i przyporządkuj każdemu z poniższych zdań wartość Prawda lub Fałsz:

Zdanie	Prawda	Fałsz
Można skonstruować czworokąt sferyczny, który ma dokładnie trzy kąty proste.	☐	☐
Nie można skonstruować czworokąta sferycznego, który ma dokładnie dwa kąty proste, a pozostałe dwa kąty są przystające.	☐	☐
Nie można skonstruować czworokąta sferycznego, który ma cztery kąty o mierze 120° każdy?	☐	☐

Ćwiczenie 4



Zbadaj, jaka jest suma kątów wewnętrznych w sferycznym czworokącie foremnym i wskaż wszystkie prawidłowe odpowiedzi:

☐ jest mniejsza od 360°

☐ nie jest stała

☐ zawiera się w przedziale $(360^\circ, 720^\circ)$

☐ jest większa od 360°

Ćwiczenie 5



Narysuj na sferze dwa okręgi wielkie. Ile rozłącznych dwukątów powstało? Ustal, czy któreś z utworzonych dwukątów są przystające. Czy możesz narysować takie dwa okręgi wielkie, aby wszystkie powstałe dwukąty były przystające?

Ćwiczenie 6



Wielokąt jest wielokątem foremnym, jeśli wszystkie jego boki mają tę samą długość i wszystkie jego kąty mają tę samą miarę. Czy dwukąt sferyczny jest wielokątem foremnym? Uzasadnij swój wniosek.

Ćwiczenie 7



Zbadaj na płaszczyźnie i na sferze następujące zagadnienie: Czy trójkąt i czworokąt mogą mieć taką samą sumę kątów wewnętrznych? Swoją odpowiedź uzasadnij.

Ćwiczenie 8



Zbadaj na płaszczyźnie i na sferze następujące zagadnienie: Dany jest wielokąt foremny, którego każdy kąt ma miarę 120° . Jaki to może być wielokąt?

Przeciągnij w odpowiednie miejsca nazwy odpowiednich wielokątów, pogrupuj je.

Wielokąt foremny, którego każdy kąt ma miarę 120° :

Na płaszczyźnie

pięciokąt foremny sferyczny

ośmiokąt foremny na
płaszczyźnie

Na sferze

pięciokąt foremny na
płaszczyźnie

ośmiokąt foremny sferyczny

Nie istnieje

trójkąt równoboczny na
płaszczyźnie

sześciokąt foremny sferyczny

dwukąt

sześciokąt foremny na
płaszczyźnie

kwadrat na płaszczyźnie

czworokąt foremny sferyczny

trójkąt równoboczny sferyczny

Ćwiczenie 9



(dla osób o zamiłowaniach artystycznych)

Mówimy, że możliwe jest pokrycie powierzchni daną figurą, jeśli figura i jej kopie pokrywają całą powierzchnię nie pokrywając się wzajemnie w żadnym fragmencie i nie pozostawiając obszarów pustych. Takie pokrycie nazywane jest mozaiką. Jeśli figura jest wielokątem foremnym, mozaikę nazywamy regularną. Wykorzystaj swoją wiedzę o wielokątach, aby znaleźć regularne mozaiki na sferze.

Dla nauczyciela

Autor: Anna Rybak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wielokąty na powierzchni kuli

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne;
- 3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;
- 4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- pogłębia wiadomości o wielokątach na płaszczyźnie;
- bada własności wielokątów na sferze;
- porównuje własności wielokątów na płaszczyźnie i na sferze;
- odkrywa wielokąty, które istnieją na sferze, a nie istnieją na płaszczyźnie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- strategia czynnościowego nauczania matematyki;

- strategia porównawcza.

Metody i techniki nauczania:

- metoda problemowa;
- burza mózgów;
- dyskusja;
- eksperyment;
- ćwiczenia.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputer z dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- kulki styropianowe, owoce kuliste, zakrętki do butelek, wykałaczki, igły lub szpilki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Wielokąty na powierzchni kuli”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj”, przypominając wiadomości o wielokątach na płaszczyźnie.
2. Uczniowie oglądają film z sekcji „Film edukacyjny”, na podstawie którego uczą się tworzyć wielokąty na powierzchni kuli i przygotowują przyrząd do mierzenia kątów na sferze.
3. Następnie wykonują polecenia z tej sekcji, wykonując eksperymenty i odkrywając nową dla siebie wiedzę dotyczącą trójkątów i czworokątów sferycznych i odkrywając dwukąt na sferze. Dyskutują o swoich odkryciach.
4. Uczniowie samodzielnie wykonują ćwiczenia z sekcji Sprawdź się (z wyjątkiem Ćwiczenia 9), a następnie w dyskusji podsumowują swoje wyniki.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel zadaje uczniom pytania: Co było w lekcji trudne? Co było w lekcji interesujące? Odnosi się do elementów wskazanych jako trudne.

2. Uczniowie krótko podsumowują swoje osiągnięcia, rozwijając zdanie: Na dzisiejszych zajęciach najważniejsze dla mnie było...

Praca domowa:

Uczniowie wykonują Ćwiczenie 9 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Wielokąty, ich własności i rodzaje](#)
- [Wielokąty foremne](#)
- [Rodzaje czworokątów i ich własności](#)

Wskazówki metodyczne:

- Najważniejsza w tej lekcji jest praca własna uczniów z różnymi (w tym manualnymi) pomocami dydaktycznymi), formułowanie przez nich wniosków i argumentowanie poprawności tych wniosków – zgodnie ze strategią czynnościowego nauczania matematyki. Rola nauczyciela ogranicza się do inspirowania uczniów do prowadzenia pracy badawczej i odkrywania wiedzy oraz wspierania w momentach dla uczniów trudnych. Największą wartością tej lekcji będzie samodzielne odkrycie przez uczniów nowej wiedzy.
- film edukacyjny można wykorzystać jako przykład w każdej sytuacji, gdy chcemy zachęcić uczniów do przygotowywania nietypowych pomocy dydaktycznych, które będą im służyły jako narzędzia ich pracy badawczej.