



Graniastosłup prawidłowy czworokątny – zadania z kontekstem realistycznym

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film edukacyjny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Graniastosłup prawidłowy czworokątny – zadania z kontekstem realistycznym

Źródło: Jingming Pan, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Graniastosłup prawidłowy czworokątny jest bryłą często wykorzystywaną w życiu codziennym.

Czy jego kształt może mieć akwarium, szafa, albo pokój w którym przebywasz?

Ile waży pudełko, w które będziemy mogli zapakować dany przedmiot?

Jakie rozmiary ma kilogramowa sztabka złota, której krawędź podstawy jest trzy razy dłuższa od krawędzi bocznej?

Ile waży powietrze zamknięte w szafie?

To tylko niektóre z pytań, na które odpowiedź skrywa ten temat.

Twoje cele

- Wykorzystasz wiedzę o graniastosłupie prawidłowym czworokątnym do rozwiązywania zadań z kontekstem realistycznym.
- Przeanalizujesz treść zadania z kontekstem realistycznym i zbudujesz do niego matematyczny model.

Przeczytaj

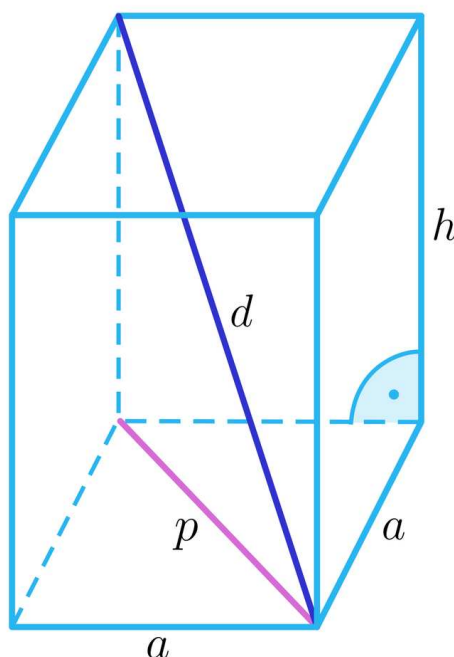
Na początku przypomnijmy definicję, własności i wzory, które będą przydatne podczas rozwiązywania zadań w tym materiale.

Definicja: Graniastosłup prawidłowy czworokątny

Graniastosłup prawidłowy czworokątny to **graniastosłup prosty**, którego podstawą jest czworokąt foremny, czyli kwadrat.

Ma sześć ścian, osiem wierzchołków oraz dwanaście krawędzi.

Dla graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o długości krawędzi podstawy a oraz wysokości h prawdziwe są następujące wzory:



Objętość

$$V = a^2 h$$

Pole powierzchni całkowitej

$$P_c = 2a^2 + 4ah$$

Pole powierzchni bocznej

$$P_b = 4ah$$

Długość przekątnej graniastosłupa

$$d = \sqrt{2a^2 + h^2}$$

Długość przekątnej podstawy

$$p = a\sqrt{2}$$

W zadaniach z kontekstem praktycznym mamy często do czynienia z takimi wielkościami jak **gęstość** materiału, **gramatura papieru** czy wydajność urządzenia. Niezawodnym sposobem na wydedukowanie tego, jakim wzorem obliczana jest dana wielkość, jest zwrócenie uwagi na jednostkę, w jakiej jest wyrażana. I tak, jeżeli wydajność wentylatora podana jest w $\left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}}\right]$ oznacza to, że aby ją wyliczyć, należy podzielić objętość pomieszczenia (w metrach sześciennych) przez czas, w którym zostanie wymienione całe powietrze z tego pomieszczenia (w godzinach).

Przykład 1

Projekt hali sportowej zakłada, że będzie ona graniastosłupem prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy 80 m i wysokości 20 m. Planowane jest zamontowanie 20 wentylatorów, które wymieniają powietrze w całej hali w ciągu 40 minut. Jaka musi być wydajność takich wentylatorów wyrażona w metrach sześciennych na godzinę?

Rozwiązanie

Objętość tej hali wynosi $V = 80 \cdot 80 \cdot 20 = 128000 \text{ [m}^3\text{]}$.

Na jeden wentylator przypada $\frac{128000}{20} = 6400 \text{ [m}^3\text{]}$ powietrza.

Chcemy, aby jeden wentylator wymienił $6400 \text{ [m}^3\text{]}$ w ciągu 40 minut czyli $\frac{2}{3} \text{ h}$.

Jego wydajność musi wynosić $\frac{6400}{\frac{2}{3}} = 6400 \cdot \frac{3}{2} = 9600 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}}\right]$.

Odpowiedź

Wydajność jednego wentylatora musi wynosić $9600 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$.

Przykład 2

Jakie wymiary ma jednokilogramowa sztabka czystego złota w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy jest trzy razy dłuższa od wysokości? Wykonaj obliczenia wiedząc, że gęstość złota wynosi $19300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Wynik przybliż do całości milimetrów.

Rozwiązanie

Z gęstości złota dowiadujemy się, że 1 m^3 tego kruszcu waży ponad 19 ton. Chcąc obliczyć wymiary jednokilogramowej sztabki, zamieniamy jednostkę na kilogram na milimetr sześcienny.

$$\rho = 19300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 19,3 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 0,0193 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} = 0,0000193 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$$

Z definicji gęstości wynika, że: $V = \frac{m}{\rho}$.

Obliczamy objętość jednokilogramowej sztabki złota

$$V = \frac{1}{0,0000193} \approx 51813 [\text{mm}^3].$$

Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy $3x$ i wysokości x wyraża się wzorem $3x \cdot 3x \cdot x = 9x^3$, zatem:

$$9x^3 \approx 51812 [\text{mm}^3]$$

$$x^3 \approx 5757 [\text{mm}^3]$$

$$x \approx 18 [\text{mm}]$$

$$3x \approx 54 [\text{mm}].$$

Odpowiedź

Jednokilogramowa sztabka czystego złota opisana w zadaniu po przybliżeniu do całości milimetrów ma wymiary $54 \text{ mm} \times 54 \text{ mm} \times 18 \text{ mm}$.

Przykład 3

Do pudełka w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 4 cm, po przekątnej chcemy zapakować ołówek o długości 12 cm. Ile waży takie pudełko zbudowane z papieru o gramaturze $300 \frac{\text{g}}{\text{m}^2}$?

Rozwiązanie

Szukamy takiej długości a krawędzi podstawy, dla której zachodzi równość

$$12 = \sqrt{2a^2 + 4^2}.$$

Rozwiązując to równanie, otrzymujemy:

$$144 = 2a^2 + 16$$

$$a^2 = 64$$

$$a = 8 [\text{cm}].$$

Następnym krokiem jest obliczenie pola powierzchni całkowitej tego pudełka:

$$P_c = 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 \cdot 4 = 128 + 128 = 256 \text{ [cm}^2\text{]},$$

$$256 \text{ cm}^2 = 0,0256 \text{ m}^2.$$

Waga tego pudełka będzie wynosiła

$$300 \cdot 0,0256 = 7,68 \text{ [g]}.$$

Odpowiedź:

Opisane pudełko waży 7,68 g.

Przykład 4

Pan Adam dysponuje prętem o długości 280 cm. Planuje cały ten pręt pociąć na części tak, aby otrzymać wszystkie dwanaście krawędzi potrzebnych do zbudowania stelażu szafki w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego. Dodatkowo obliczył, że, aby szafka miała odpowiednią wagę, każda jej ściana boczna musi mieć pole powierzchni równe 500 cm². Jakie wymiary będzie miała szafka zbudowana przez pana Adama? Czy jest tylko jeden zestaw wymiarów spełniający zadane warunki?

Rozwiązanie

Oznaczmy przez a długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, natomiast przez h długość krawędzi bocznej. Wtedy, korzystając z danych z zadania otrzymujemy dwie zależności. Są to dwa równania z dwiema niewiadomymi, zatem możemy połączyć je w układ równań, a następnie rozwiązać go.

$$\begin{cases} ah = 500 \\ 4h + 8a = 280 \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy jedną zmienną

$$4h = 280 - 8a$$

$$h = 70 - 2a$$

i podstawiamy ją do pierwszego równania:

$$a(70 - 2a) = 500.$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe z jedną niewiadomą a . Warto w tym momencie wyznaczyć dziedzinę dla a . Z jednej strony długość krawędzi podstawy musi być liczbą dodatnią. Z drugiej strony nie może być zbyt duża, ponieważ po odcięciu ośmiu

krawędzi podstawy musi zostać jeszcze dodatnia część pręta na krawędzie boczne. Ograniczenie od góry wyznaczamy rozwiązując nierówność:

$$h > 0$$

$$70 - 2a > 0$$

$$a < 35.$$

Zatem dziedziną równania jest zbiór $(0, 35)$.

Wróćmy do rozwiązywania równania:

$$70a - 2a^2 = 500$$

$$a^2 - 35a + 250 = 0$$

$$\Delta = (-35)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 250 = 225$$

$$a_1 = \frac{35 + \sqrt{225}}{2 \cdot 1} = 25$$

$$a_2 = \frac{35 - \sqrt{225}}{2 \cdot 1} = 10.$$

Obie liczby należą do wcześniej wyznaczonej dziedziny, a więc mamy dwa zestawy wymiarów spełniające warunki zadania:

$$a = 25 \text{ oraz } h = 70 - 2 \cdot 25 = 20$$

lub

$$a = 10 \text{ oraz } h = 70 - 2 \cdot 10 = 50.$$

Odpowiedź:

Szafka spełniająca warunki postawione przez pana Adama ma wymiary $25 \text{ cm} \times 25 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ lub $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$.

Słownik

graniastosłup prosty

graniastosłup, w którym wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, a więc wszystkie ściany boczne są prostokątami

gęstość

stosunek masy pewnej ilości substancji do zajmowanej przez nią objętości:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

gramatura papieru

masa wyrobu papierniczego wyrażona w gramach na metr kwadratowy

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem edukacyjnym, a następnie rozwiąż poniższe zadania.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D5AsptRWt>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej graniastosłupów.

Polecenie 2

Z drewnianych słupków w kształcie graniastosłupów prawidłowych czworokątnych o krawędzi podstawy 2 cm zbito stelaż większego graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o wymiarach zewnętrznych $15\text{ cm} \times 15\text{ cm} \times 30\text{ cm}$. Gęstość użytego materiału wynosi $650 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Oblicz wagę całej konstrukcji.

Polecenie 3

Marek planuje zbudować akwarium w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego. Chce, aby zmieściło się w nim 200 litrów wody i aby zużyć na nie 185 dm^2 tafli szkła. Akwarium ma cztery szklane ściany i podstawę, od góry jest otwarte. Oblicz, jakie wymiary w decymetrach ma takie akwarium wiedząc, że są one liczbami wymiernymi.

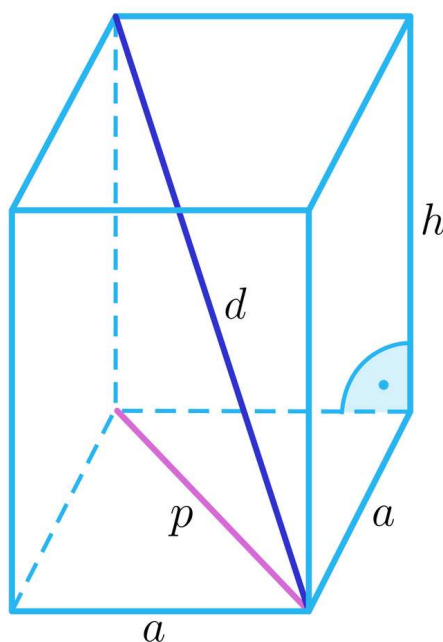
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dopasuj wielkość związaną z graniastostupem prawidłowym czworokątnym, której użyjesz rozwiązując zadanie do podanego kontekstu praktycznego.



Ilość farby potrzebnej do pomalowania ścian w pokoju.

Najdłuższy kij włożony do szafy.

Ilość powietrza w pomieszczeniu.

Łączna długość listewek potrzebnych na stelaż szafki.

Ilość kartonu potrzebnego do zbudowania pudełka.

Suma długości krawędzi $S = 4h + 8a$

Pole powierzchni bocznej $P_b = 4ah$

Długość przekątnej graniastostupa
 $d = \sqrt{2a^2 + h^2}$

Pole powierzchni całkowitej
 $P_c = 2a^2 + 4ah$

Objętość $V = a^2h$

Ćwiczenie 2



Ile waży powietrze znajdujące się w szafie w kształcie graniastopuła prawidłowego czworokątnego o podstawie 60 cm i wysokości 2 m? Na poziomie morza w temperaturze 20 °C powietrze suche ma gęstość około $1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Załóżmy, że powietrze i umiejscowienie szafy spełnia warunki z poprzedniego zdania.

☐ 6 kg

☐ 0,864 kg

☐ 8,64 kg

☐ 0,6 kg

Ćwiczenie 3



Janek planuje zbudować karmnik dla ptaków w kształcie graniastopuła prawidłowego czworokątnego o wysokości 30 cm. Zaczyna od zbudowania stelaża z listewek - wszystkich dwunastu krawędzi bryły, które w następnej kolejności obje deskami. Jest w posiadaniu 3 metrów bieżących listewki, której musi wystarczyć na wszystkie krawędzie, ale nie musi całości wykorzystać. Jakie może być pole podstawy tego karmnika? Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐ 300 cm²

☐ 625 cm²

☐ 10000 cm²

☐ 900 cm²

☐ 400 cm²

☐ 484 cm²

Ćwiczenie 4



Ania ma pokój w kształcie graniastopuła prawidłowego czworokątnego, którego metraż podłogi wynosi 16 m^2 . Planuje pomalować do pewnej równej wysokości wszystkie ściany w swoim pokoju zaczynając malowanie od dołu. Posiada 2 litry farby o wydajności $12 \frac{\text{m}^2}{\text{l}}$. Na jaką maksymalną wysokość Ania zdoła pomalować ściany?

☐ 1,5 m

☐ 0,375 m

☐ 0,6 m

☐ 0,75 m

Ćwiczenie 5



Jacek ma pudło z papieru w kształcie graniastopuła prawidłowego czworokątnego o wymiarach $15 \text{ cm} \times 15 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$, które waży 71,25 g. Jaka jest gramatura papieru, z którego pudło zostało wykonane?

Ćwiczenie 6



Czy pręt o długości 5,8 dm zmieści się do zamykanego pudełka w kształcie graniastopuła prawidłowego czworokątnego o wysokości 2 dm i polu powierzchni całkowitej równej 64 dm^2 ? Odpowiedź uzasadnij.

Ćwiczenie 7



Pracownicy ZOO planują wykonanie szklanego pomieszczenia dla jaszczurek w kształcie graniastopuła prawidłowego czworokątnego. Przez przekątną całego pomieszczenia chcą przeprowadzić prosty kij długości 9 m, aby zwierzaki mogły swobodnie się po nim przechadzać. Dodatkowo obliczyli, że wytrzymałość szkła przy planowanej grubości będzie odpowiednia, jeżeli pole powierzchni jednej ściany bocznej będzie równe 18 m^2 . Aby pomieszczenie było wygodne w użyciu, długość krawędzi podstawy powinna być większa niż długość krawędzi bocznej. Jakie wymiary będzie miało pomieszczenie?

Ćwiczenie 8



Pan Cezary dysponuje cienką listewką o długości 52 cm. Planuje całą tę listewkę pociąć na części tak, aby otrzymać wszystkie dwanaście krawędzi potrzebnych do stelaża pudełka w kształcie graniastostupa prawidłowego czworokątnego. Chce, aby pudełko miało objętość 63 cm^3 , a krawędź podstawy była mniejsza niż 5 cm. Jakie wymiary będzie miało pudełko zbudowane przez pana Adama? Czy jest tylko jeden zestaw wymiarów spełniający zadane warunki?

Dla nauczyciela

Autor: Bartłomiej Cymbalista

Przedmiot: Matematyka

Temat: Graniastosłup prawidłowy czworokątny – zadania z kontekstem realistycznym

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje wiedzę o graniastosłupie prawidłowym czworokątnym do rozwiązywania zadań z kontekstem realistycznym;
- analizuje treść zadania z kontekstem realistycznym i buduje do niego matematyczny model.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;

- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją

- Uczniowie przed lekcją przypominają sobie wiadomości o graniastosłupie prawidłowym czworokątnym, definicję oraz wzór na objętość, pole powierzchni całkowitej i długość przekątnej prostopadłościanu. Zapoznają się z sekcją „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Graniastosłup prawidłowy czworokątny – zadania z kontekstem realistycznym”, wskazuje cele zajęć.
2. Nauczyciel prosi uczniów o podanie przykładów problemów realistycznych, w rozwiązywaniu których przydatne są wiadomości o objętości, polu powierzchni, długości odcinków w prostopadłościanie.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie rozwiązują ćwiczenia 2–5 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel pyta wybranych uczniów o odpowiedzi i rozwiązania, pozostali uczniowie dyskutują nad poprawnością przedstawionych rozwiązań. W razie potrzeby, korygują je.
2. Uczniowie oglądają film edukacyjny. Indywidualnie rozwiązują Polecenia 2–3 znajdujące się pod filmem, następnie zostają podzieleni na 4-osobowe grupy. W obrębie grupy sprawdzają wzajemnie rozwiązania i dyskutują nad wyborem ich zdaniem poprawnego sposobu. Jeden z uczniów przedstawia poprawne rozwiązania na tablicy.

3. Uczniowie pozostają w podziale na grupy. Rozwiązują ćwiczenia 6–8 z sekcji „Sprawdź się”. Wskazani przez nauczyciela uczniowie przedstawiają rozwiązania na tablicy.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel wyświetla na ekranie Ćwiczenie 1 z sekcji sprawdź się, a uczniowie wspólnym frontem rozwiązują je.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenie 1 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Graniastosłup prosty i jego własności. Związki miarowe w graniastosłupach](#)
- [Zadania na projektowanie – prostopadłościan](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może zaplanować wspólne obejrzenie filmu z zakładki Film edukacyjny przez całą klasę oraz poprosić chętnych uczniów do rozwiązywania poleceń pod filmem na tablicy. Może ocenić pracę tych uczniów.