



Zastosowanie wiadomości o funkcji homograficznej w zadaniach

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowanie wiadomości o funkcji homograficznej w zadaniach

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Zapoznając się z tym materiałem warto wiedzieć, jak na podstawie wzoru wyznaczać dziedzinę funkcji homograficznej, jej zbiór wartości, miejsca zerowe, monotoniczność, równania asymptot. Trzeba też umieć naszkicować wykres funkcji homograficznej.

W tym materiale nauczymy się, jak na podstawie własności funkcji homograficznej wyznaczyć współczynniki występujące w jej wzorze. Zauważymy, jak ważne jest odpowiednie zinterpretowanie podanych własności funkcji.

Twoje cele

- Wyznaczysz wzór funkcji homograficznej na podstawie znanych jej własności.
- Znajdziesz związek między własnościami funkcji homograficznej a współczynnikami występującymi we wzorze funkcji.
- Zinterpretujesz poszczególne własności funkcji homograficznej oraz jej wykres.

Przeczytaj

Już wiesz

Funkcję wymierną postaci $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ i $ad - cb \neq 0$ nazywamy **funkcją homograficzną**.

Dziedziną funkcji homograficznej jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Wzór funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ można przekształcić do postaci $f(x) = \frac{k}{x-p} + q$ - jest to postać kanoniczna funkcji homograficznej.

Niektóre własności funkcji łatwiej wyznacza się z postaci kanonicznej funkcji, a niektóre łatwiej ze wzoru funkcji zapisanej jako iloraz dwóch wielomianów.

Analogicznie - na podstawie znanych własności funkcji, możemy wyznaczyć wzór funkcji w postaci kanonicznej lub funkcji zapisanej w postaci ilorazu dwóch wielomianów.

Przykład 1

Wyznamy wartość parametru m we wzorze funkcji $f(x) = \frac{-4x-2m}{x-4}$ wiedząc, że miejscem zerowym funkcji jest liczba (-3) .

Rozwiązanie

Liczba (-3) jest miejscem zerowym funkcji, jeśli $f(-3) = 0$.

Zatem:

$$0 = \frac{-4 \cdot (-3) - 2m}{-3 - 4}$$

$$m = 6$$

Przykład 2

Wyznamy wartości parametrów b i d we wzorze funkcji homograficznej $f(x) = \frac{x+b}{x+d}$ wiedząc, że miejscem zerowym funkcji jest liczba (-4) oraz funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 2)$; $(2; \infty)$.

Rozwiązanie

Liczba (-4) jest miejscem zerowym funkcji, jeśli $f(-4) = 0$.

Zatem:

$$0 = \frac{-4+b}{-4+d}$$

Ze względu na mianownik musimy założyć, że $d \neq 4$.

Patrząc na licznik otrzymujemy, że $b = 4$.

Aby wyznaczyć parametr d należy wykorzystać informację dotyczącą monotoniczności. Funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 2)$; $(2; \infty)$, czyli funkcja nie jest określona dla $x = 2$. Oznacza to, że $x = 2$ jest miejscem zerowym mianownika ułamka opisującego funkcję $f(x)$.

$$0 = 2 + d$$

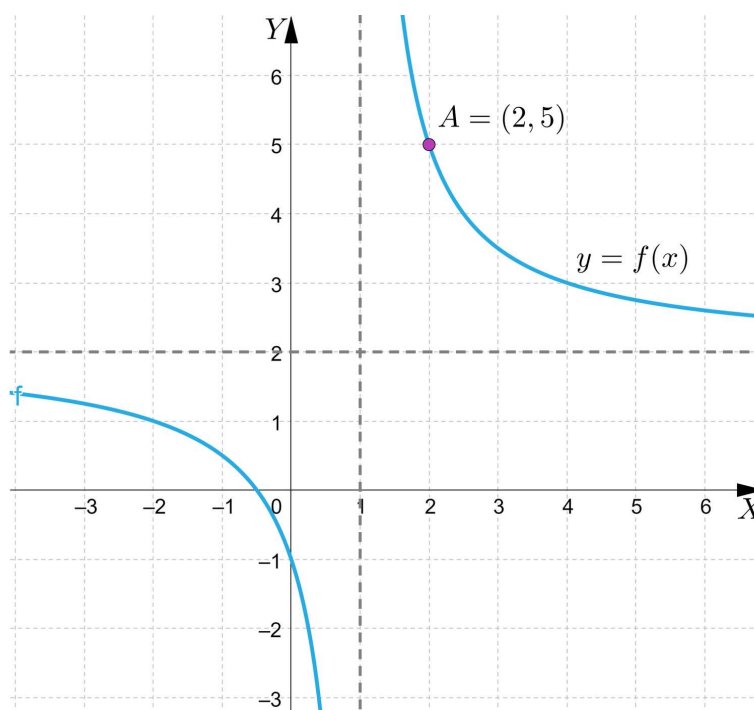
$$d = -2$$

Odpowiedź:

$$b = 4; d = -2$$

Przykład 3

Wyznamy współczynniki a , b oraz d funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$ na podstawie jej wykresu:



Rozwiązanie

Najpierw przekształcimy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+d} = \frac{a(x+d)+b-ad}{x+d} = a + \frac{b-ad}{x+d}$$

Wynika z tego, że wykres funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$ powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $g(x) = \frac{b-ad}{x}$ o wektor $\vec{v} = [-d; a]$.

Z wykresu odczytujemy wektor przesunięcia $\vec{v} = [1; 2]$

czyli $d = -1, a = 2$

Wzór funkcji ma postać $f(x) = \frac{2x+b}{x-1}$ dla $x \neq 1$.

Następnie z rysunku odczytujemy punkt należący do wykresu funkcji: $A = (2; 5)$.
Podstawiamy współrzędne punktu do wzoru funkcji:

$$5 = \frac{2 \cdot 2 + b}{2 - 1}$$

zatem $b = 1$

Odpowiedź:

$$a = 2, b = 1, d = -1$$

Przykład 4

Wyznamy współczynniki a, b oraz d funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$ wiedząc, że [asymptotami](#) wykresu są proste o równaniach: $y = -3, x = -2$ oraz wykres funkcji przechodzi przez punkt $A = (0; 2)$.

Rozwiązanie

Najpierw przekształcimy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+d} = \frac{a(x+d)+b-ad}{x+d} = a + \frac{b-ad}{x+d}$$

Wynika z tego, że wykres funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$ powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $g(x) = \frac{b-ad}{x}$ o wektor $\vec{v} = [-d; a]$.

Na podstawie równań asymptot wyznaczamy wektor przesunięcia $\vec{v} = [-2; -3]$

czyli $d = 2, a = -3$

Wzór funkcji ma postać: $f(x) = \frac{-3x+b}{x+2}$ dla $x \neq -2$.

Następnie podstawiamy współrzędne punktu $A = (0; 2)$ do wzoru funkcji:

$$2 = \frac{-3 \cdot 0 + b}{0 + 2}$$

zatem $b = 4$

Odpowiedź:

$$a = -3, b = 4, d = 2$$

Przykład 5

Wyznamy współczynniki a oraz d funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+7}{x+d}$ wiedząc, że **środkiem symetrii** wykresu funkcji jest punkt $S = (-4; 2)$.

Rozwiązanie

Najpierw przekształcimy wzór funkcji do postaci kanonicznej:

$$f(x) = \frac{ax+7}{x+d} = \frac{a(x+d)+7-ad}{x+d} = a + \frac{7-ad}{x+d}$$

Wynika z tego, że wykres funkcji $f(x) = \frac{ax+7}{x+d}$ powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $f(x) = \frac{7-ad}{x}$ o wektor $\vec{v} = [-d; a]$.

Jeśli środkiem symetrii wykresu funkcji jest punkt $S = (-4; 2)$, to w tym punkcie przecinają się asymptoty wykresu funkcji.

Zatem równania asymptot to: $x = -4, y = 2$.

Na podstawie równań asymptot wyznaczamy wektor przesunięcia $\vec{v} = [-4; 2]$

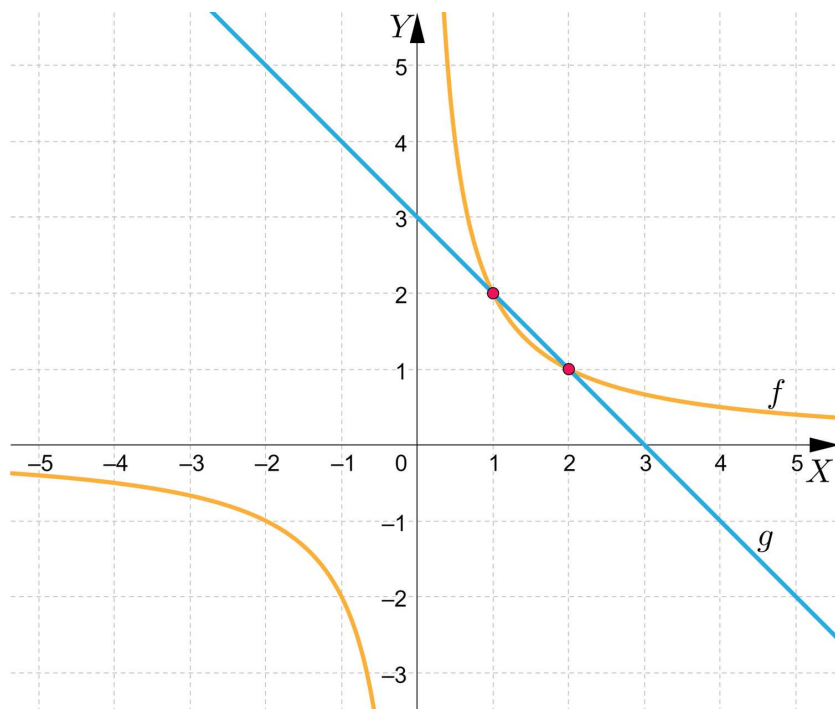
czyli $d = 4, a = 2$.

Przykład 6

Rozwiążemy graficznie równanie $\frac{2}{x} = -x + 3$, gdzie $x \neq 0$.

Rozwiązanie

Narysujemy wykresy funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$ i $g(x) = -x + 3$ i odczytamy punkty przecięcia tych wykresów.



Rozwiązaniem równania są liczby $x = 1$ i $x = 2$.

Przykład 7

Sprawdźmy, który z punktów $A(1, 3)$, $B(-5, 0)$ i $C(-1, -1)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x-1}{x+5}$

Rozwiązanie

A) Ponieważ $f(1) = \frac{3-1}{1+5} = \frac{1}{3} \neq 3$, więc punkt A nie należy do wykresu funkcji f .

B) Punkt B nie należy do wykresu funkcji f , gdyż $x = -5$ nie należy do dziedziny funkcji f .

C) Ponieważ $f(-1) = \frac{-3-1}{-1+5} = -1$, więc punkt C należy do wykresu funkcji f .

Przykład 8

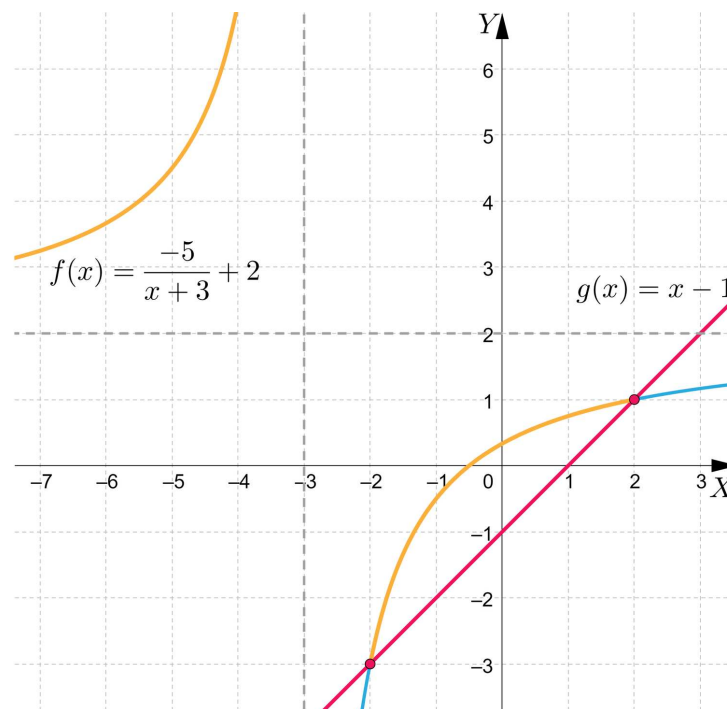
Rozwiążemy graficznie nierówność $\frac{2x+1}{x+3} \geq x - 1$, gdzie $x \neq -3$.

Rozwiązanie

Narysujemy wykresy funkcji $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ i $g(x) = x - 1$ i odczytamy zbiór rozwiązań.

Aby narysować wykres funkcji f przekształcimy wzór funkcji z postaci ogólnej do postaci kanonicznej:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+3} = \frac{2x+6-5}{x+3} = \frac{-5}{x+3} + 2$$



Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $(-\infty, -3) \cup \langle -2, 2 \rangle$

Słownik

asymptota

prosta jest asymptotą danej krzywej, jeśli dla punktu oddalającego się nieograniczenie wzdłuż krzywej odległość tego punktu od prostej dąży do zera; asymptota funkcji to asymptota krzywej stanowiącej wykres funkcji

funkcja wymierna

funkcja, która jest ilorazem dwóch wielomianów

środek symetrii figury

jest to punkt względem którego figura jest do siebie środkowosymetryczna; figura taka, gdy zostanie obrócona o 180 stopni wokół swojego środka symetrii, nałoży się na siebie

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją oraz rozwiąż zadania w niej zawarte, a następnie - na jej podstawie - wykonaj polecenia 2 i 3.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DeJJPBNq4>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej zastosowania wiadomości o funkcji homograficznej w zadaniach.

Polecenie 2

Punkt $A = (-1; 3)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{-2x+3m}{x+2}$. Wyznacz m oraz miejsce zerowe funkcji.

$m =$

miejsce zerowe funkcji:

Polecenie 3

Miejszem zerowym funkcji $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$ jest liczba 5. Funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$, $(-2; \infty)$. Wyznacz wartości parametrów a i b .

$a =$

$b =$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Funkcja homograficzna określona jest wzorem $f(x) = \frac{2x-5}{x+m}$, a jej dziedziną jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$. Z tego wynika, że

$m =$

Ćwiczenie 2



Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x+m}{x+n}$ jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, a zbiorem wartości jest zbiór $ZW = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Zatem:

☐ $m = 1; n = -1$

☐ $m = -1; n = -1$

☐ $m = 3; n = 1$

Ćwiczenie 3



Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{kx-3}{x+s}$ jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, a zbiorem wartości jest zbiór $ZW = \mathbb{R} \setminus \{5\}$. Zatem:

☐ $k = -5; s = 2$

☐ $k = 5; s = 2$

☐ $k = 5; s = -2$

☐ $k = -5; s = -2$

Ćwiczenie 4



Połącz w pary prawdziwe stwierdzenia dotyczące liczby rozwiązań równania $\frac{-2x-6}{x+2} = m$ w zależności od parametru m

1 rozwiązanie dodatnie

$m \in (-3; -2)$

brak rozwiązań

$m = -2$

1 rozwiązanie ujemne

$m \in (-\infty; -3) \cup (-2; \infty)$

Ćwiczenie 5



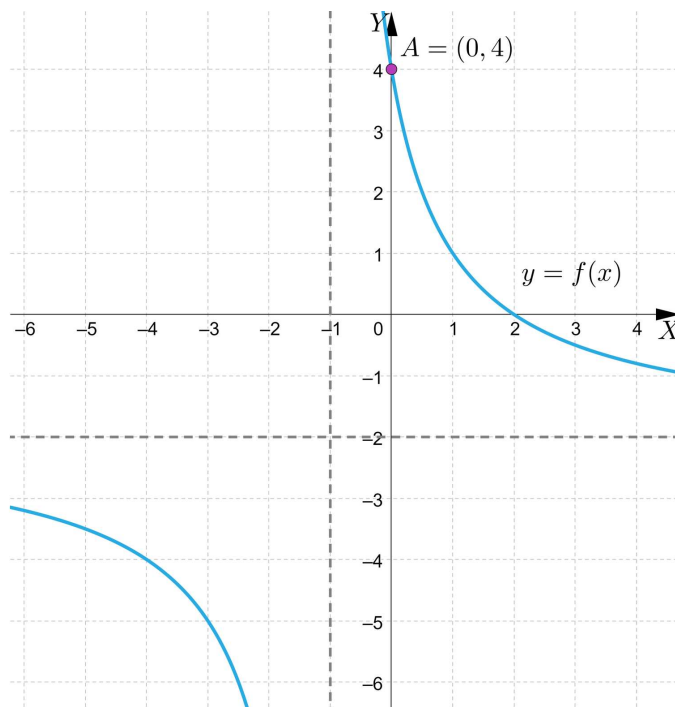
W punkcie $S = (3; -2)$ przecinają się asymptoty wykresu funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax-11}{x+d}$. Oblicz d^a . Podaj trzy cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

Odp.:

Ćwiczenie 6



Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$. Korzystając z rysunku wybierz prawidłową odpowiedź.



☐ $a = -2; b = 4; d = -1$

☐ $a = -2; b = -4; d = -1$

☐ $a = -2; b = 4; d = 1$

Ćwiczenie 7



Wyznacz współczynniki a , p oraz q we wzorze funkcji $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$, jeśli $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $ZW_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ oraz miejscem zerowym funkcji jest liczba 5.

Ćwiczenie 8



Asymptotami wykresu funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$ są proste o równaniach: $x = -4$ oraz $y = -2$. Wiedząc dodatkowo, że punkt przecięcia wykresu funkcji z osią Y ma współrzędne $(0; -3)$ wskaż wzór funkcji w postaci ogólnej.

☐ $f(x) = \frac{2x+12}{x-4}$

☐ $f(x) = \frac{-2x+12}{x-4}$

☐ $f(x) = \frac{-2x-12}{x+4}$

Ćwiczenie 9



Wykres funkcji $f(x) = \frac{s}{x-p} + q$ jest symetryczny względem punktu $(1; 3)$. Wiedząc, że miejscem zerowym funkcji jest liczba $(-\frac{2}{3})$ wyznacz wartości współczynników s , p i q . Przekształć funkcję do postaci $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Podaj wartości współczynników a , b , c , d .

$a =$

$b =$

$c =$

$d =$

Dla nauczyciela

Autor: Gabriela Pendyk

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie wiadomości o funkcji homograficznej w zadaniach

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

13) Uczeń posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje wiedzę na temat wzoru funkcji $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$;
- wykorzystuje wiedzę na temat wzoru funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$;
- wyznacza współczynniki a, p, q we wzorze funkcji $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$ na podstawie własności funkcji;
- wyznacza współczynniki a, b, c, d we wzorze funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ na podstawie własności funkcji.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja,
- analiza przypadku.

Formy pracy:

- praca w parach,
- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu dla uczniów,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji:

Przed lekcją:

Uczniowie zapoznają się z modułem „Wprowadzenie” oraz „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie własności funkcji homograficznej oraz przekształceń wykresu funkcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach. Każda z par zapoznaje się z poleceniami zawartymi w module „Animacja”.
2. Uczniowie wspólnie wykonują polecenia.
3. Następnie w grupach 4-osobowych rozwiązują ćwiczenia 1-8 z modułu „Sprawdź się”. Rozwiązania przedstawiają wspólnie podczas rozmowy z całą klasą. Nauczyciel komentuje rozwiązania, pozostali uczniowie zgłaszają ewentualne uwagi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel prosi wskazanych uczniów o podanie, czego dotyczyła lekcja oraz jakie umiejętności zdobyli podczas niej.

Praca domowa:

Uczniowie mają stworzyć zadanie dotyczące wyznaczenia wzoru funkcji homograficznej na podstawie jej własności; na następnej lekcji uczniowie wymienią się zadaniami do rozwiązania.

Materiały pomocnicze:

- Wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$
- Przesunięcia wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych

Wskazówki metodyczne:

- Animację można wykorzystać podczas realizacji lekcji „Funkcja homograficzna”.