



Mierzenie odległości na powierzchni kuli

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Mapa myśli](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Figury geometryczne składają się z punktów. Tam, gdzie geometria znajduje zastosowanie (na przykład przy tworzeniu map czy planów) punkty mogą reprezentować różne obiekty, na przykład miejscowości czy szczyty górskie. Ważne jest wówczas mierzenie odległości pomiędzy punktami.

Jednak oprócz map i planów posługujemy się też globusem, zwłaszcza gdy chcemy obserwować różne fragmenty kuli ziemskiej jednocześnie. Na globusie punkty też reprezentują różne obiekty geograficzne i dzieje się to na powierzchni kuli, a nie na płaszczyźnie.

Dalekie rejsy statków i loty samolotów również odbywają się w skali globalnej, a nie lokalnej, a więc na powierzchni sferycznej. Tak więc mierzenie odległości na sferze jest bardzo potrzebne.

Podczas tej lekcji zbadamy, czy odległości na płaszczyźnie i na sferze mierzymy tak samo. Materiał zawarty w tej lekcji jest materiałem wykraczającym poza podstawę programową, więc jeśli nie interesuje Cię ta tematyka, możesz po prostu lekcję pominąć.

Twoje cele

- Przypomnisz sobie sposoby mierzenia odległości na płaszczyźnie.

- Określisz sposoby mierzenia odległości na sferze.
- Określisz jednostki odległości na sferze.
- Porównasz sposoby mierzenia odległości na płaszczyźnie i na sferze.

Przeczytaj

Podczas lekcji geometrii mierzymy raczej niewielkie odległości między punktami. Używamy do tego zwykle linijki z podziałką, prawdopodobnie też często po prostu „liczymy kratki” w zeszyte, żeby przynajmniej oszacować potrzebną odległość.

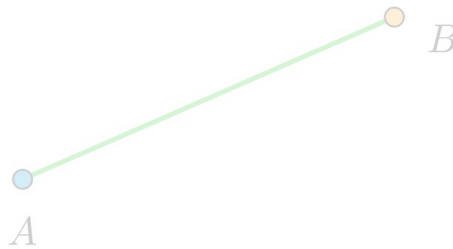
Do mierzenia większych odległości mamy teraz wyspecjalizowane przyrządy i oprogramowanie, a w przypadku szukania odległości pomiędzy miastami mogą nam pomóc „kalkulatory odległości”, z których możemy skorzystać online.

Nas jednak w tym materiale interesuje matematyczna strona mierzenia [odległości na płaszczyźnie](#) i na [sferze](#).

Przypomnijmy sobie informacje o prostej na płaszczyźnie i prostej sferycznej.

Przykład 1

Na płaszczyźnie znajdują się dwa punkty A i B . Zmieniając położenie punktu B zaobserwujemy jak zmienia się odległość pomiędzy obydwooma punktami.



$$|AB| = 3.16$$

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DJyrhGK4o>

Odpowiedzmy na pytania:

- a) Czy istnieje najmniejsza odległość między dwoma punktami na płaszczyźnie?
A największa?

b) W jakich jednostkach mierzymy odległości na płaszczyźnie?

Odpowiedź

a) Najmniejsza odległość między punktami na płaszczyźnie jest równa 0 jednostek (wówczas te punkty pokrywają się), największa nie istnieje, ponieważ płaszczyzna jest nieskończona.

b) Przykładowe jednostki to metr i jego pochodne (milimetr, centymetr itd.), cale, stopy, jardy, mile.

W dalszej części zajmiemy się zagadnieniem mierzenia [odległości na powierzchni kuli](#) w porównaniu z mierzeniem odległości na płaszczyźnie.

Przykład 2

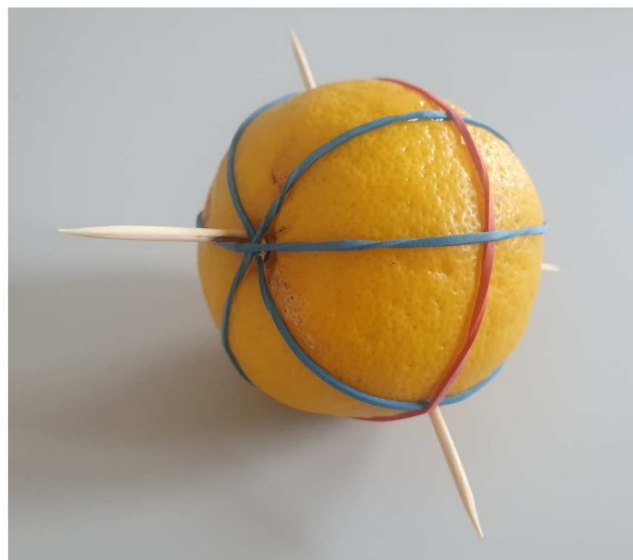
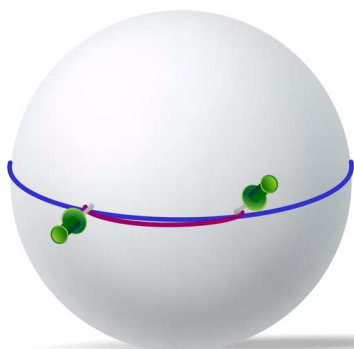
Korzystając z kuli styropianowej, globusa lub innego kulistego przedmiotu zbadamy:

a) Ile jest dróg (wzdłuż prostej/sferycznej prostej) prowadzących od punktu *A* do punktu *B* na płaszczyźnie/na sferze?

b) Jak inaczej możemy sformułować pytanie postawione w punkcie a)?

Odpowiedź

a) Na płaszczyźnie jedna, na sferze to zależy od wyboru punktów. Jeśli punkty nie są biegunami, to są dwie drogi, jeśli są biegunami, to nieskończenie wiele.



Źródło: Gromar, licencja: CC BY-SA 3.0.

b) Wzdłuż ilu odcinków/odcinków sferycznych można mierzyć odległość pomiędzy punktami na płaszczyźnie/na sferze? Odpowiedź na to pytanie jest zawarta w odpowiedzi na pytanie postawione w punkcie a)

Przykład 3

Korzystając z kuli styropianowej, globusu lub innego kulistego przedmiotu zbadamy poniższe zagadnienia.

Zaznaczymy na powierzchni kuli dwa różne punkty. Nazwijmy je A i B . Zmierzymy odległość między nimi. Jak to zrobimy? Jakich przyrządów użyjemy? W jakich jednostkach wyrazimy tę odległość?

Odpowiedź

Możemy użyć np. centymetra krawieckiego i zmierzyć odległość pomiędzy punktami A i B w jednostkach liniowych (milimetrach, centymetrach, decymetrach itd.). Możemy też użyć nitki, którą połączymy dwa punkty, a potem zmierzmy długość odpowiedniego odcinka tej nitki. Oczywiście największa możliwa odległość pomiędzy punktami na powierzchni kuli będzie wtedy zależna od wielkości tej kuli.

Przykład 4

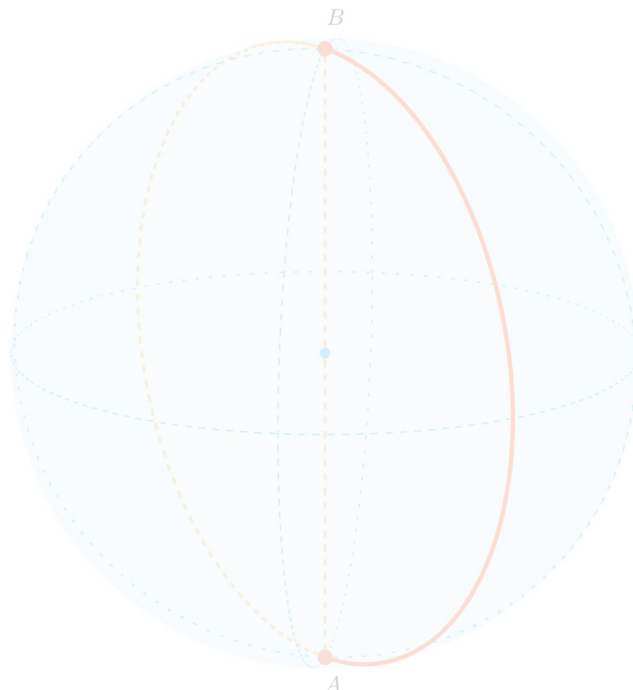
Możemy zmierzyć długość okręgu wielkiego (czyli sferycznej prostej), przyjmując otrzymaną wielkość za jednostkę długości, a następnie odległość dwóch punktów wyrazić jako ułamek tej jednostki. Już w starożytności Babilończycy stwierdzili, że wygodnie jest przyjmować $\frac{1}{360}$ część okręgu wielkiego za sferyczną jednostkę długości. Zastanówmy się dlaczego?

Z czym kojarzymy pomiary odległości w stopniach?

Odpowiedź

Babilończycy zaproponowali tę metodę, ponieważ długość okręgu wielkiego jest równa 360° . Jest to dobrze nam znany 1° !

Odległości w stopniach podaje się w geografii: długość i szerokość geograficzna.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DJyrhGK4o>

Przykład 5

Jaka jest najmniejsza odległość między dwoma punktami na płaszczyźnie? Jaka jest najmniejsza odległość między dwoma punktami na sferze?

Jaka jest największa odległość między dwoma punktami na płaszczyźnie? Jaka jest największa odległość między dwoma punktami na sferze?

Odpowiedź

Na obu powierzchniach najmniejsza odległość to 0 jednostek.

Na płaszczyźnie największa odległość między dwoma punktami nie istnieje, na sferze jest równa 180° – jest to na przykład odległość między biegunami, połowa okręgu wielkiego.

Słownik

sfera

powierzchnia kuli

odległość na płaszczyźnie

odległość euklidesowa między dwoma punktami jest równa długości odcinka łączącego te punkty

odległość na sferze

odległość sferyczna między dwoma punktami na sferze jest równa długości odcinka sferycznego (łuku zawartego w prostej sferycznej, czyli okręgu wielkim) łączącego te punkty

Mapa myśli

Polecenie 1

Zapoznaj się z mapą myśli dotyczącą mierzenia odległości na płaszczyźnie, a następnie wykonaj Polecenie 2.

Polecenie 2

Zbuduj mapę myśli dotyczącą mierzenia odległości na sferze uwzględniając zagadnienia:

- W jakich jednostkach mierzymy odległość pomiędzy dwoma punktami?
 - Jaka jest największa odległość między dwoma punktami?
 - Jaka jest najmniejsza odległość między dwoma punktami?
 - Iloma prostoliniowymi (w sensie „prostoliniowości sferycznej”) drogami można dotrzeć z jednego punktu do drugiego? W związku z tym, na ile sposobów można zmierzyć odległość pomiędzy dwoma punktami? Czy w związku z tym nie ma tutaj jakiejś niejednoznaczności? Jak proponujesz rozwiązać problem jednoznacznego określania odległości pomiędzy punktami na sferze?
 - Inne spostrzeżenia.
- odległości na sferze
 - jednostki
 - najmniejsza odległość
 - największa odległość
 - na ile sposobów można zmierzyć odległość między dwoma punktami
 - inne spostrzeżenia

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Uzupełnij poniższe zdanie wyszukując w dowolnych źródłach potrzebne informacje i wykonując potrzebne obliczenia, a następnie wpisując wyniki (przybliżenia z niedomiarem do 1 km) w odpowiednich miejscach:

Równik Ziemi ma długość km. Jest to jednocześnie okrąg wielki kuli ziemskiej, którego długość to °. Odległość równa 1° to około km.

Ćwiczenie 2



Popatrz na globus i odpowiedz na postawione pytanie:
jaki jest stosunek "wymiarów" Afryki północ-południe do wschód-zachód wyrażony w procentach? Wskaż odpowiedź najbliższą Twoim przypuszczeniom:

☐ 200%

☐ 300%

☐ 75%

☐ 100%

Ćwiczenie 3



Odległość bieguna od równika na kuli ziemskiej (a od punktu biegunowego do odpowiadającego mu okręgu wielkiego) jest równa:

Ćwiczenie 4



Rozważmy odległości pomiędzy Warszawą a miastami: Nowy Jork, Los Angeles, Tokio, Sydney. Obserwując globus, posługując się np. nitką w celu dokonania oszacowań, określ odległości od Warszawy do tych miast w podanych kategoriach i przeciągnij poszczególne elementy do odpowiednich miejsc tabeli:

Nowy Jork, Los Angeles, Tokio, Sydney

Miasto		Odległość od Warszawy
Nowy Jork		
Los Angeles		
Tokio		
Sydney		

Ćwiczenie 5



Uporządkuj miasta Nowy Jork, Los Angeles, Tokio, Sydney w kolejności narastającej odległości od Warszawy.

Tokio



Sydney



Nowy Jork



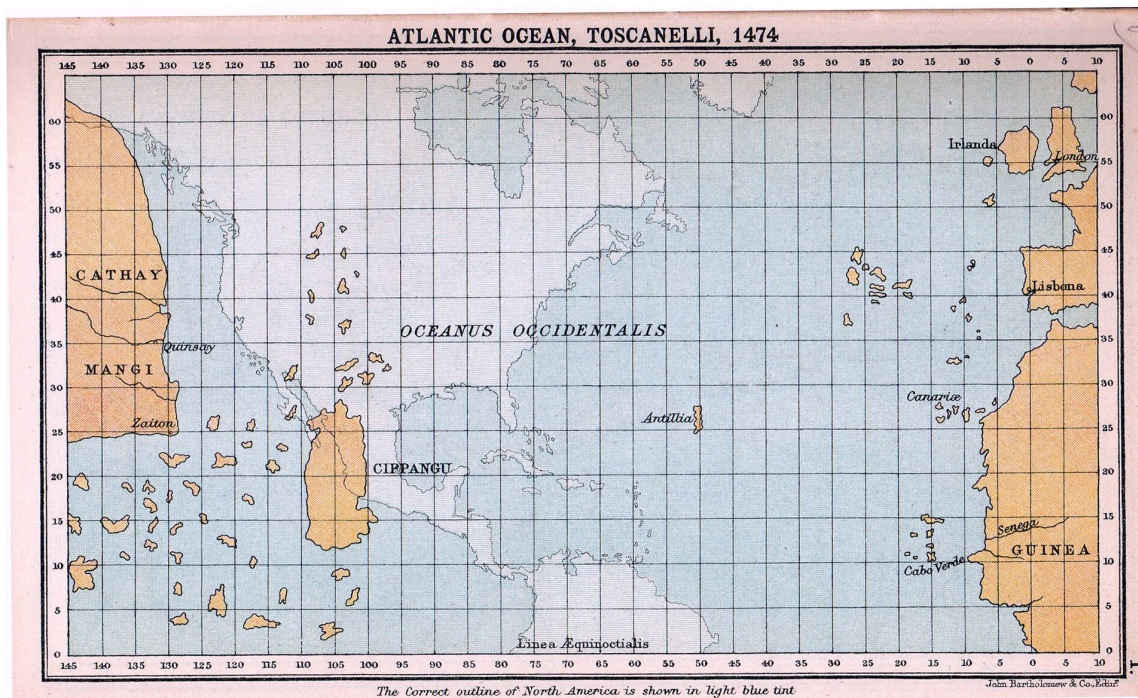
Los Angeles



Ćwiczenie 6



Mapa, którą widzisz poniżej, przedstawia wyobrażenia o świecie sprzed wypraw Kolumba; lądy według wyobrażeń z tamtych czasów są oznaczone brązowym kolorem:



Mapa Toscanelliego, 1474

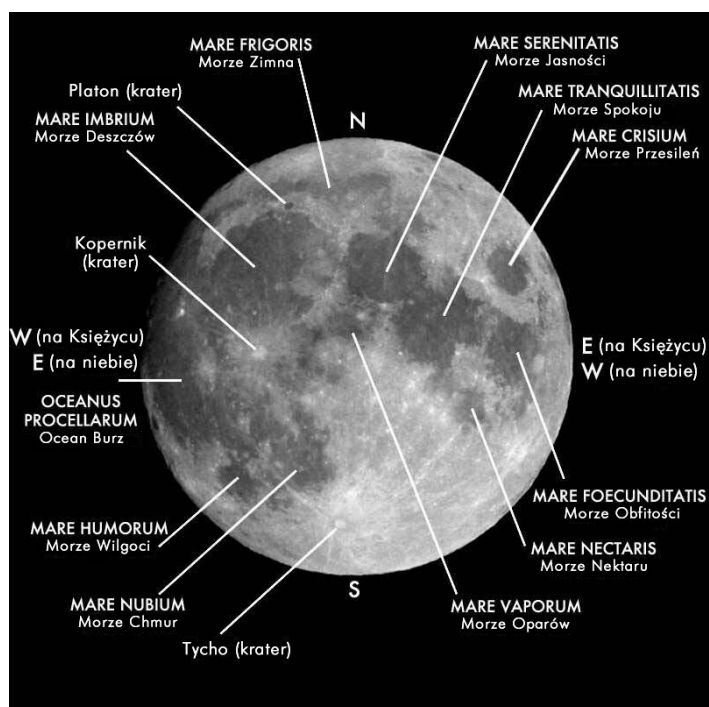
Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Kolumb myślał, że Japonia (zwana wówczas Cipangu) położona jest tak, jak to widać na mapie. Gdyby miał rację, jaką długość miałby równik? Opisz swój sposób rozumowania i wykonane obliczenia.

Ćwiczenie 7



Popatrz na mapę Księżyca:



Mapa Księżyca

Źródło: Pz, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 3.0.

Na Księżycu można określić system współrzędnych geograficznych podobnie jak na kuli ziemskiej. Położenie krateru Platon to $51,6^{\circ} N$ i $9,4^{\circ} W$, zaś krateru Kopernik to $9,7^{\circ} N$ i $20,1^{\circ} W$.

Jaka jest odległość między nimi w stopniach i w kilometrach? Długość równika księżycowego jest równa około 11000 km.

Ćwiczenie 8



Czy na płaszczyźnie możesz znaleźć trzy takie punkty, że odległość każdych dwóch od siebie jest taka sama? Czy możesz takie samo zadanie wykonać na sferze? Jeśli tak, to podaj przykłady takich punktów.

Ćwiczenie 9



Czy na płaszczyźnie możesz znaleźć cztery takie punkty, że odległość każdych dwóch od siebie jest taka sama? Czy możesz takie samo zadanie wykonać na sferze? Jeśli tak, to podaj przykłady takich punktów.

Dla nauczyciela

Autor: Anna Rybak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Mierzenie odległości na powierzchni kuli

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- pogłębia wiadomości o mierzeniu odległości na płaszczyźnie;
- określa sposoby mierzenia odległości na sferze;
- określa jednostki odległości na sferze;
- porównuje sposoby mierzenia odległości na płaszczyźnie i na sferze.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- strategia czynnościowego nauczania matematyki;
- strategia porównawcza.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- dyskusja;

- eksperyment;
- ćwiczenia.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputer z dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- globusy, kulki styropianowe, wykałaczki, gumki recepturki, nitki.

Przebieg zajęć:

Faza wstępna:

- Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Mierzenie odległości na powierzchni kuli”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj”, analizują przykłady, przypominają wiadomości o mierzeniu odległości na płaszczyźnie oraz zapoznają się ze sposobami mierzenia odległości na powierzchni kuli.
2. Uczniowie zapoznają się z mapą myśli z sekcji „Mapa myśli” stanowiącą podsumowanie wiadomości o mierzeniu odległości na płaszczyźnie, a następnie wykonują indywidualnie mapę myśli stanowiącą podsumowanie wiadomości o mierzeniu odległości na sferze.
3. Uczniowie wykonują wspólnie Ćwiczenie 1 z sekcji „Sprawdź się”, następnie w parach – korzystając z globusów – Ćwiczenia 2 – 5. Omawiają wspólnie swoje rozwiązania, uzasadniając odpowiedzi.
4. Podczas burzy mózgów uczniowie generują pomysły na wykonanie Ćwiczeń 6 i 7.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel zadaje uczniom pytania: Co było w lekcji trudne? Co było w lekcji interesujące? Odnosi się do elementów wskazanych jako trudne.
2. Uczniowie krótko podsumowują swoje osiągnięcia, rozwijając zdanie: Na dzisiejszych zajęciach najważniejsze dla mnie było...

Praca domowa

Wykonać obliczenia do Ćwiczeń 6 i 7 oraz Ćwiczenia 8 i 9 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Pojęcie odległości](#)
- [Współrzędne geograficzne](#)

Wskazówki metodyczne:

- W tej lekcji znowu występuje strategia czynnościowego nauczania matematyki i strategia porównawcza.
- Najważniejsza w lekcji jest własna praca badawcza uczniów i samodzielne odkrywanie przez nich wiedzy.
- Medium (pierwszą mapę myśli) można też wykorzystać do powtórzenia wiadomości o mierzeniu odległości na płaszczyźnie podczas lekcji, które nie są związane z geometrią na powierzchni kuli. Można też wykorzystać tę mapę myśli podczas lekcji podsumowującej wiadomości o kuli (podczas realizacji działu Stereometria), aby zainspirować uczniów do krótkiej dyskusji o porównaniu metod mierzenia odległości na płaszczyźnie i na sferze oraz do tworzenia korelacji pomiędzy matematyką a geografią (mapa jako płaszczyzna i mierzenie odległości na niej, globus jako kula i mierzenie odległości na niej).