



Okresowość funkcji trygonometrycznych oraz jej zastosowania

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Okresowość funkcji trygonometrycznych oraz jej zastosowania

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale przypomnimy pojęcie funkcji okresowej w odniesieniu do funkcji trygonometrycznych. Zaczniemy jednak od zaobserwowania pewnych własności funkcji trygonometrycznych wynikających wprost z ich definicji dla kąta dowolnego. Przyjrzymy się między innymi miejscom zerowym, monotoniczności, maksimom i minimom tych funkcji. Wszystkie wspomniane obiekty i własności mają ścisły związek z okresowością funkcji trygonometrycznych, co będziesz mógł zauważyć w tej lekcji. Nieco inaczej spojrzysz na te zagadnienia, kiedy poznasz już wykresy tych funkcji, ale sama definicja daje nam sporo możliwości.

Twoje cele

- Zastosujesz własności funkcji okresowych.
- Wyznaczysz okresy funkcji złożonych z funkcjami trygonometrycznymi.
- Zastosujesz okresowość funkcji trygonometrycznych.

Przeczytaj

Zacznijmy od przypomnienia definicji funkcji okresowej.

Definicja: funkcja okresowa

Mówimy, że funkcja f ze zbioru X w zbiór Y jest okresowa, jeśli istnieje liczba T różna od zera taka, że dla każdego x ze zbioru X zachodzą następujące warunki:

1. $x + T$ również należy do zbioru X
2. $f(x + T) = f(x)$

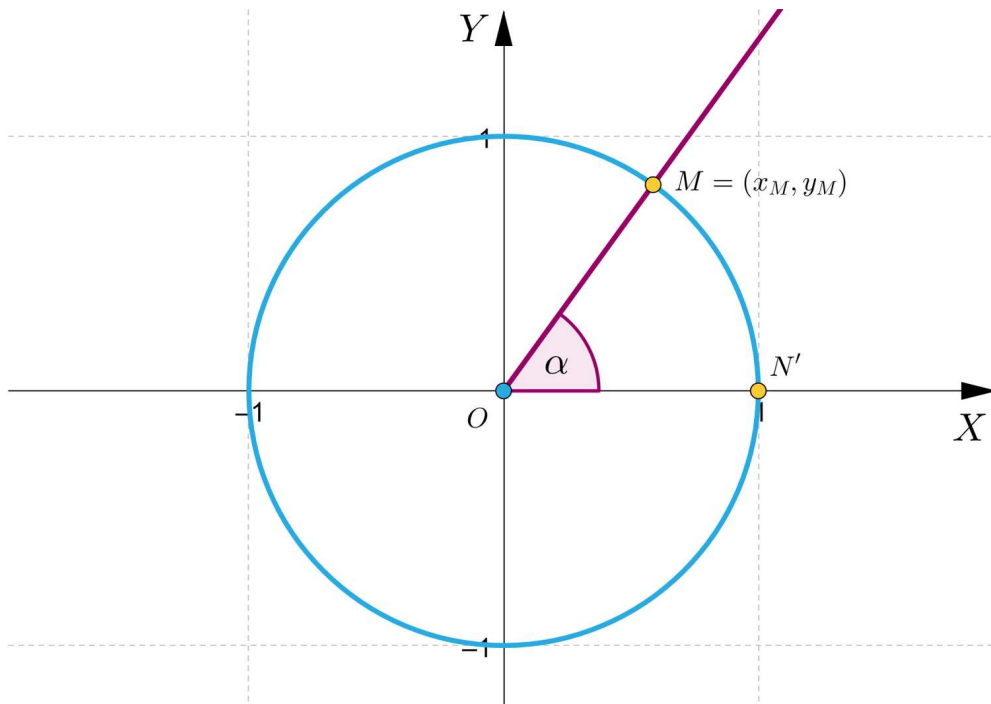
Liczbę T nazywamy okresem funkcji f . Jeśli istnieje najmniejsza dodatnia liczba T_0 , która spełnia warunki (1) i (2) powyższej definicji, to nazywamy ją okresem zasadniczym lub podstawowym funkcji f .

Rozważmy kąt o mierze α umieszczony w położeniu standardowym w układzie współrzędnych. Na drugim ramieniu tego kąta wybieramy punkt $M(x_M, y_M)$ o promieniu wodzącym równym 1. Wówczas:

$$\sin \alpha = \frac{y_M}{r} = \frac{y_M}{1} = y_M$$

$$\cos \alpha = \frac{x_M}{r} = \frac{x_M}{1} = x_M$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_M}{x_M}$$



Pierwsza obserwacja jest taka, że po obrocie drugiego ramienia o kąt α oraz o kąt $\alpha + 2\pi$ ramię to znajduje się w tym samym miejscu, zatem w każdym z tych przypadków do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych tych kątów możemy na drugich ramionach tych kątów wybrać dokładnie te same punkty (o takich samych współrzędnych). Czyli dla dowolnego kąta α zachodzą równości $\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$, $\operatorname{tg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$. Stąd możemy wyciągnąć wniosek, że funkcje sinus, cosinus oraz tangens są okresowe – ich okresem jest na pewno liczba 2π .

Miejsca zerowe funkcji trygonometrycznych

Zauważmy, że funkcja $\sin(x)$ przyjmuje wartość zero dokładnie wtedy, gdy druga współrzędna wybranego punktu M jest równa 0, co ma miejsce dla $x \in \{\dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}$. Ostatni warunek można zapisać w postaci $x = k \cdot \pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcja $\cos(x)$ przyjmuje wartość zero dokładnie wtedy, gdy pierwsza współrzędna wybranego punktu M jest równa 0, co ma miejsce dla $x \in \{\dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots\}$. Ostatni warunek można zapisać w postaci $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcja $\operatorname{tg}(x)$ przyjmuje wartość zero dokładnie wtedy, gdy druga współrzędna wybranego punktu M jest równa 0, co ma miejsce dla $x \in \{\dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}$. Ostatni warunek można zapisać w postaci $x = k \cdot \pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Okres zasadniczy funkcji trygonometrycznych

Wykażemy teraz, że liczba 2π jest okresem zasadniczym funkcji sinus, zaś liczba π jest okresem zasadniczym funkcji tangens.

Twierdzenie: o okresie zasadniczym funkcji sinus

Liczba 2π jest okresem zasadniczym funkcji sinus

Dowód

Założmy, że liczba T jest różna od zera oraz dla dowolnej liczby x zachodzi równość $\sin(x + T) = \sin x$. Ponieważ równość zachodzi dla dowolnego x , to w szczególności zachodzi dla $x = 0$, co oznacza $\sin(0 + T) = \sin 0 = 0$, czyli $\sin T = 0$. Zatem $T = k \cdot \pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Gdyby liczba k była nieparzysta, wówczas $k = 2m + 1$ dla pewnej całkowitej liczby m oraz

$$\begin{aligned}\sin(x + T) &= \sin(x + k\pi) = \sin[x + (2m + 1)\pi] = \sin(x + 2\pi m + \pi) = \\ &= \sin(x + \pi) = -\sin x, \text{ zatem } T = k \cdot \pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą nieparzystą nie jest okresem} \\ &\text{funkcji sinus. Jeśli } k \text{ jest parzyste, to } k = 2m \text{ dla pewnej liczby całkowitej } m \text{ oraz} \\ \sin(x + T) &= \sin(x + k\pi) = \sin(x + 2m\pi) = \sin x. \text{ Stąd każdy okres funkcji sinus jest}\end{aligned}$$

postaci $2m\pi$, gdzie m jest liczbą całkowitą. Najmniejsza dodatnia liczba postaci $2m\pi$ to 2π , jest to więc okres zasadniczy funkcji sinus. Co należało wykazać.

Twierdzenie: o okresie zasadniczym funkcji tangens

Liczba π jest okresem zasadniczym funkcji tangens.

Dowód

Założmy, że liczba T jest różna zera oraz dla dowolnej liczby $x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$ zachodzi równość $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$. Ponieważ równość zachodzi dla dowolnego x , to w szczególności zachodzi dla $x = 0$, co oznacza $\operatorname{tg}(0 + T) = \operatorname{tg} 0 = 0$, czyli $\operatorname{tg} T = 0$. Zatem $T = k \cdot \pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Stąd każdy okres funkcji tangens jest postaci $k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Najmniejsza dodatnia liczba postaci $k\pi$ to π . Ponadto ze wzorów redukcyjnych wiemy, że dla każdego $x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$ zachodzi równość $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$. Zatem liczba π jest okresem zasadniczym funkcji tangens. Co kończy dowód.

Dowód faktu, że **okresem zasadniczym** funkcji cosinus jest liczba 2π pozostawiamy jako ćwiczenie.

Przykład 1

Wyznamy okres zasadniczy funkcji:

- $f(x) = \sin(2x)$,
- $f(x) = \cos(\pi x)$,
- $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{\pi} + 1\right)$.

Przypomnijmy, że okresem zasadniczym funkcji f nazywamy najmniejszą dodatnią liczbę T_0 , dla której dla dowolnego x należącego do dziedziny funkcji f zachodzi równość $f(x + T_0) = f(x)$.

- Niech $T_0 > 0$. Rozważmy $f(x + T_0)$. Wówczas $f(x + T_0) = \sin(2x + 2T_0)$. Ponieważ szukamy takiego $T_0 > 0$, aby $f(x + T_0) = f(x)$ dla każdego x z dziedziny funkcji f , zatem $\sin(2x + 2T_0) = \sin(2x)$ dla każdego x należącego do dziedziny funkcji f . Ponieważ okresem zasadniczym funkcji sinus jest liczba 2π , więc najmniejsze dodatnie T_0 otrzymamy rozwiązując równanie $2T_0 = 2\pi$. Stąd $T_0 = \pi$.
- Niech $T_0 > 0$. Rozważmy $f(x + T_0)$. Wówczas $f(x + T_0) = \cos \pi(x + T_0) = \cos(\pi x + \pi T_0)$. Ponieważ szukamy takiego $T_0 > 0$, aby $f(x + T_0) = f(x)$ dla każdego x z dziedziny funkcji f , zatem $\cos(\pi x + \pi T_0) = \cos(\pi x)$ dla każdego x należącego do dziedziny funkcji f . Ponieważ okresem zasadniczym funkcji cosinus jest liczba 2π , więc najmniejsze dodatnie T_0 otrzymamy rozwiązując równanie $\pi T_0 = 2\pi$. Stąd $T_0 = 2$.

c. Niech $T_0 > 0$. Rozważmy $f(x + T_0)$. Wówczas

$f(x + T_0) = \operatorname{tg} \left(\frac{x+T_0}{\pi} + 1 \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{\pi} + \frac{T_0}{\pi} + 1 \right)$. Ponieważ szukamy takiego $T_0 > 0$,

aby $f(x + T_0) = f(x)$ dla każdego x z dziedziny funkcji f , zatem

$\operatorname{tg} \left(\frac{x}{\pi} + \frac{T_0}{\pi} + 1 \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{\pi} + 1 \right)$ dla każdego x należącego do dziedziny funkcji f .

Ponieważ okresem zasadniczym funkcji tangens jest liczba π , więc najmniejsze dodatnie T_0 otrzymamy rozwiązując równanie $\frac{T_0}{\pi} = \pi$. Stąd $T_0 = \pi^2$.

Przykład 2

Obliczymy wartości wyrażeń: $\sin(-330^\circ)$, $\cos 690^\circ$, $\operatorname{tg}(-1035^\circ)$.

Mamy kolejno:

$\sin(-330^\circ) =$ (z nieparzystości funkcji sinus)

$= -\sin 330^\circ = -\sin(-30^\circ + 360^\circ) =$ (z okresowości funkcji sinus)

$= -\sin(-30^\circ)$ (ponownie z nieparzystości funkcji sinus) $= -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

$\cos 690^\circ = \cos(720^\circ - 30^\circ) = \cos(2 \cdot 360^\circ - 30^\circ) =$

(z okresowości funkcji cosinus)

$= \cos(-30^\circ) =$ (z parzystości funkcji cosinus) $= \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg}(-1035^\circ) =$ (z nieparzystości funkcji tangens)

$= -\operatorname{tg} 1035^\circ =$

$= -\operatorname{tg}(3 \cdot 360^\circ - 45^\circ) =$ (z okresowości funkcji tangens)

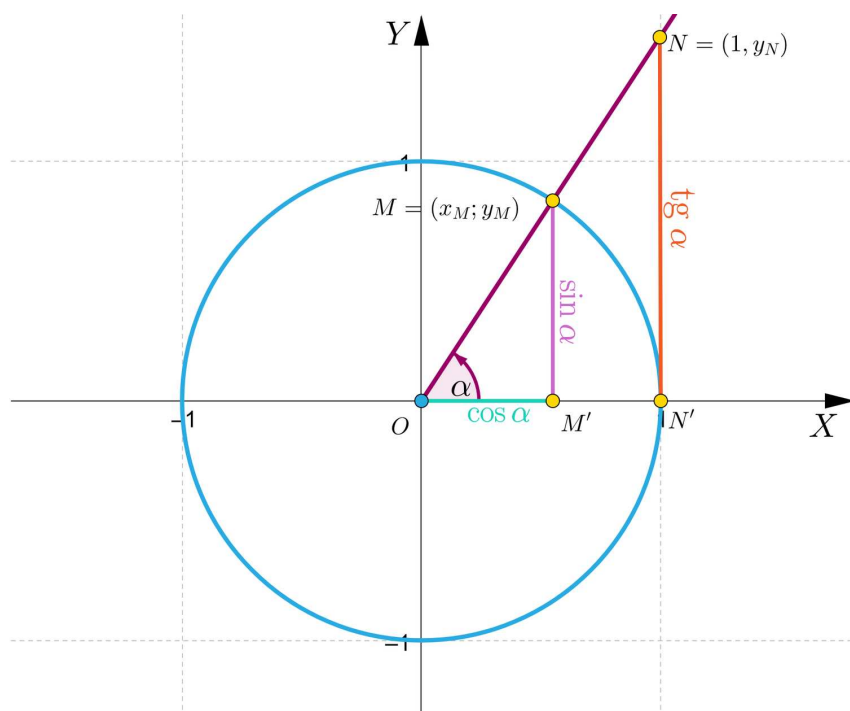
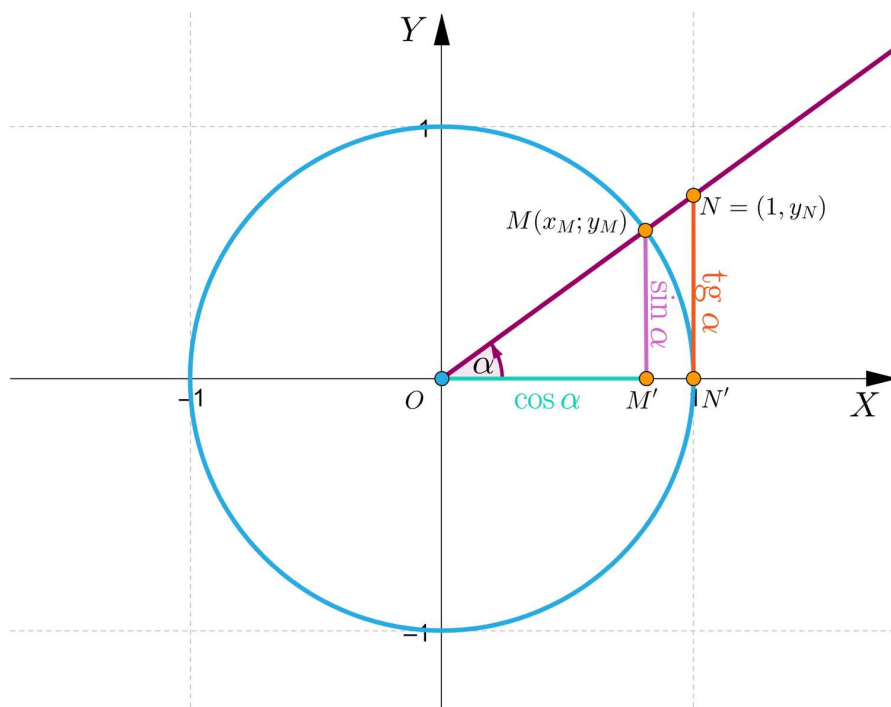
$= -\operatorname{tg}(-45^\circ)$ (z nieparzystości funkcji tangens)

$= -(-\operatorname{tg}(45^\circ)) = -(-1) = 1$

Monotoniczność funkcji trygonometrycznych

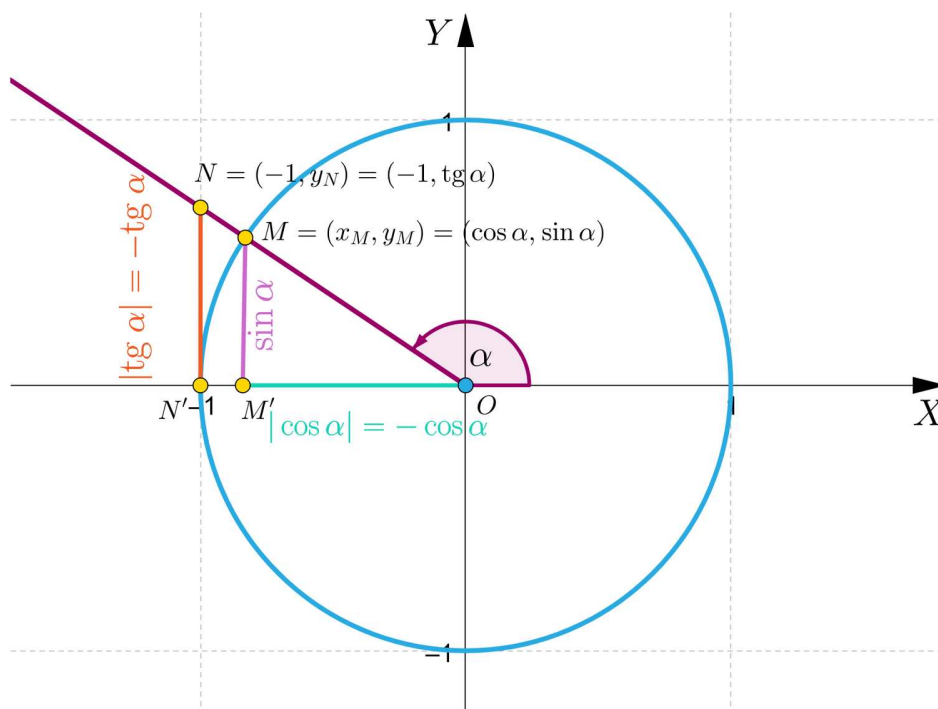
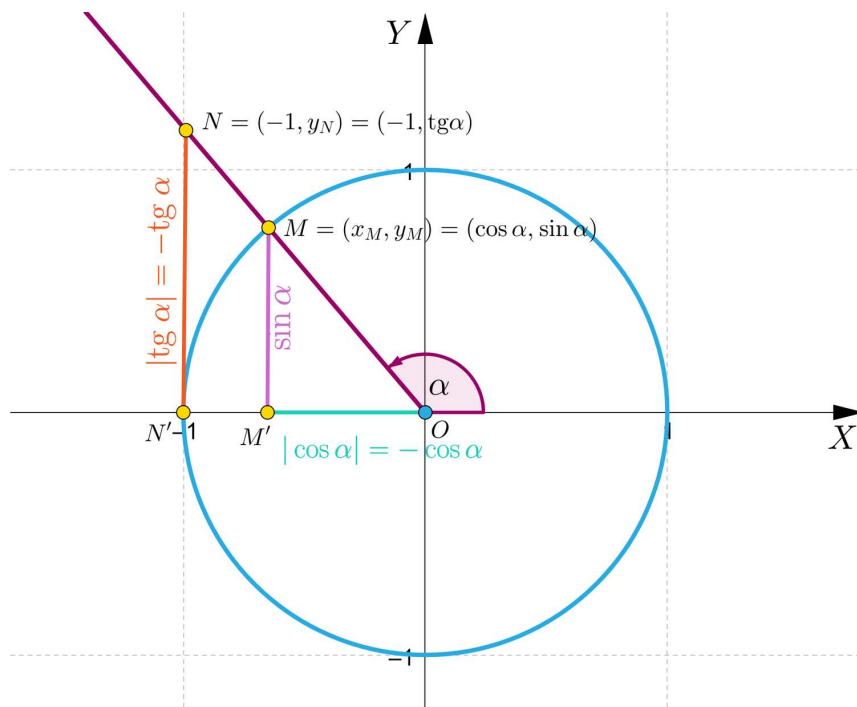
Rozważmy najpierw kąty o miarach z przedziału $(0, \frac{\pi}{2})$. Na drugim ramieniu kąta wybierzmy dodatkowo taki punkt N , którego pierwsza współrzędna jest równa 1. Na rysunku poniżej zaznaczone są odcinki, których długości są równe $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ oraz $\operatorname{tg} \alpha$.

Zwróć uwagę, że wraz ze wzrostem rozwartości kąta α rosną długości odcinków MM' oraz NN' , jednocześnie odcinek OM' się skraca. Oznacza to, że w przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$ funkcje sinus i tangens rosną, zaś funkcja cosinus maleje.



Dla kątów o miarach z przedziału $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ długości odcinków MM' , NN' oraz OM' nie zawsze są równe wartościom funkcji trygonometrycznych - czasami mają długości równe ich wartościom bezwzględnym.

Jeśli kąt ma miarę z przedziału $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, to sytuacja wygląda jak na rysunkach poniżej.



Można zauważyć, że dla kątów o miarach z przedziału $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ zachodzą następujące zależności:

- odcinek OM' ma długość $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ (bo $\cos \alpha < 0$)
- im większa miara kąta α , tym dłuższy jest odcinek OM'
- im dłuższy odcinek OM' , tym większa wartość liczby $-\cos \alpha$
- im większa wartość liczby $-\cos \alpha$, tym mniejsza wartość liczby $\cos \alpha$.

Z powyższego wynika, że im większa miara kąta α , tym mniejsza wartość liczby $\cos \alpha$, co oznacza, że funkcja $\cos \alpha$ jest malejąca na przedziale $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Analogicznie:

- odcinek MM' ma długość $|\sin \alpha| = \sin \alpha$ (bo $\sin \alpha > 0$)
- im większa miara kąta α , tym krótszy jest odcinek MM'
- im krótszy odcinek MM' , tym mniejsza wartość liczby $\sin \alpha$.

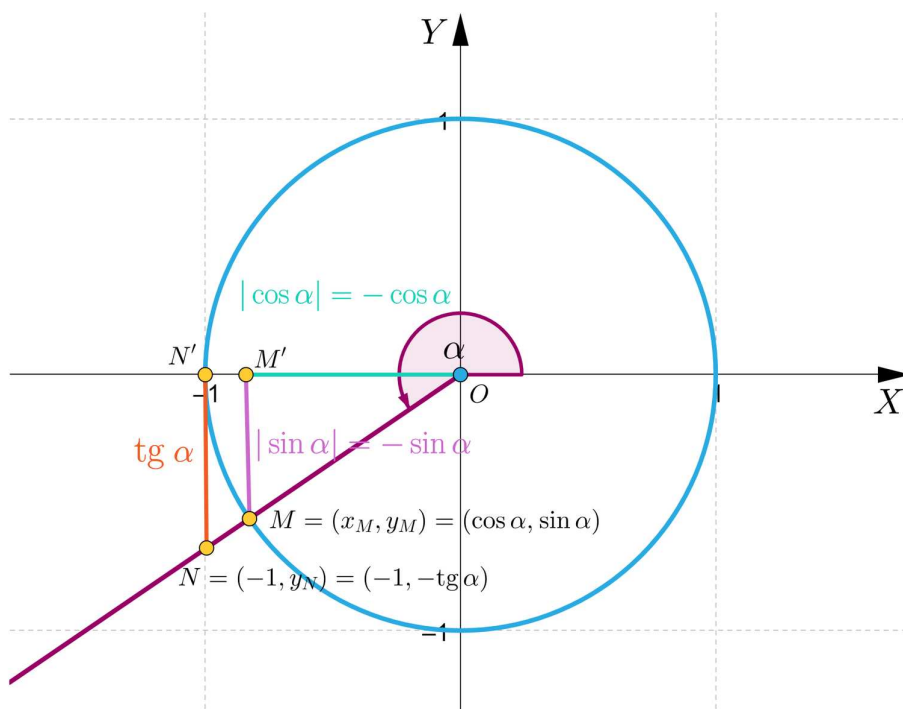
Z powyższego wynika, że im większa miara kąta α , tym mniejsza wartość liczby $\sin \alpha$, co oznacza, że funkcja $\sin \alpha$ jest malejąca na przedziale $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

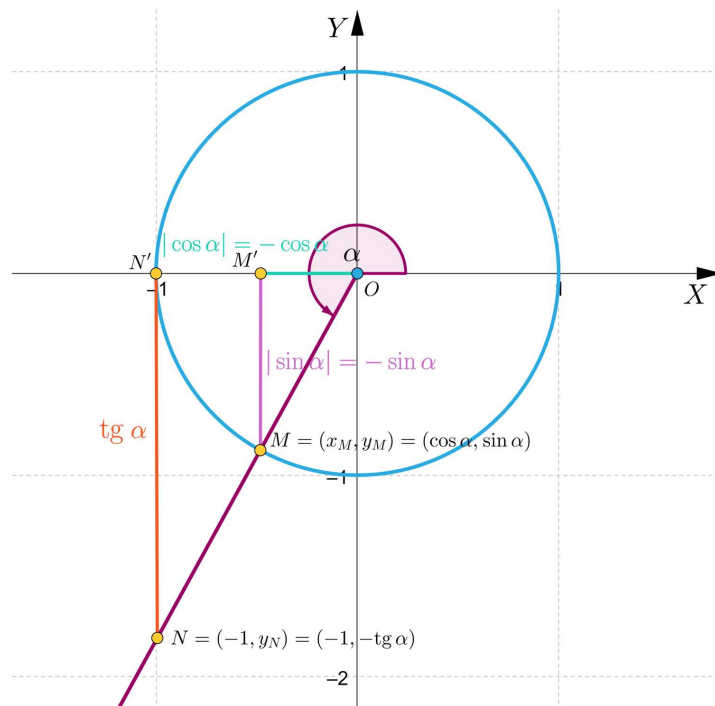
Ponadto:

- odcinek NN' ma długość $|\operatorname{tg} \alpha| = -\operatorname{tg} \alpha$ (bo $\operatorname{tg} \alpha < 0$)
- im większa miara kąta α , tym krótszy jest odcinek NN'
- im krótszy odcinek NN' , tym mniejsza wartość liczby $-\operatorname{tg} \alpha$
- im mniejsza wartość liczby $-\operatorname{tg} \alpha$, tym większa wartość liczby $\operatorname{tg} \alpha$.

Z powyższego wynika, że im większa miara kąta α , tym większa wartość liczby $\operatorname{tg} \alpha$, co oznacza, że funkcja $\operatorname{tg} \alpha$ jest rosnąca na przedziale $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Jeśli kąt ma miarę z przedziału $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, to sytuacja wygląda jak na rysunkach poniżej.





Można zauważyć, że dla kątów o miarach z przedziału $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ zachodzą następujące zależności:

- odcinek OM' ma długość $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ (bo $\cos \alpha < 0$)
- im większa miara kąta α , tym krótszy jest odcinek OM'
- im krótszy odcinek OM' , tym mniejsza wartość liczby $-\cos \alpha$
- im mniejsza wartość liczby $-\cos \alpha$, tym większa wartość liczby $\cos \alpha$.

Z powyższego wynika, że im większa miara kąta α , tym większa wartość liczby $\cos \alpha$, co oznacza, że funkcja $\cos \alpha$ jest rosnąca na przedziale $(\pi, \frac{3\pi}{2})$.

Analogicznie:

- odcinek MM' ma długość $|\sin \alpha| = -\sin \alpha$ (bo $\sin \alpha < 0$),
- im większa miara kąta α , tym dłuższy jest odcinek MM' ,
- im dłuższy odcinek MM' , tym większa wartość liczby $-\sin \alpha$,
- im większa wartość liczby $-\sin \alpha$, tym mniejsza wartość liczby $\sin \alpha$.

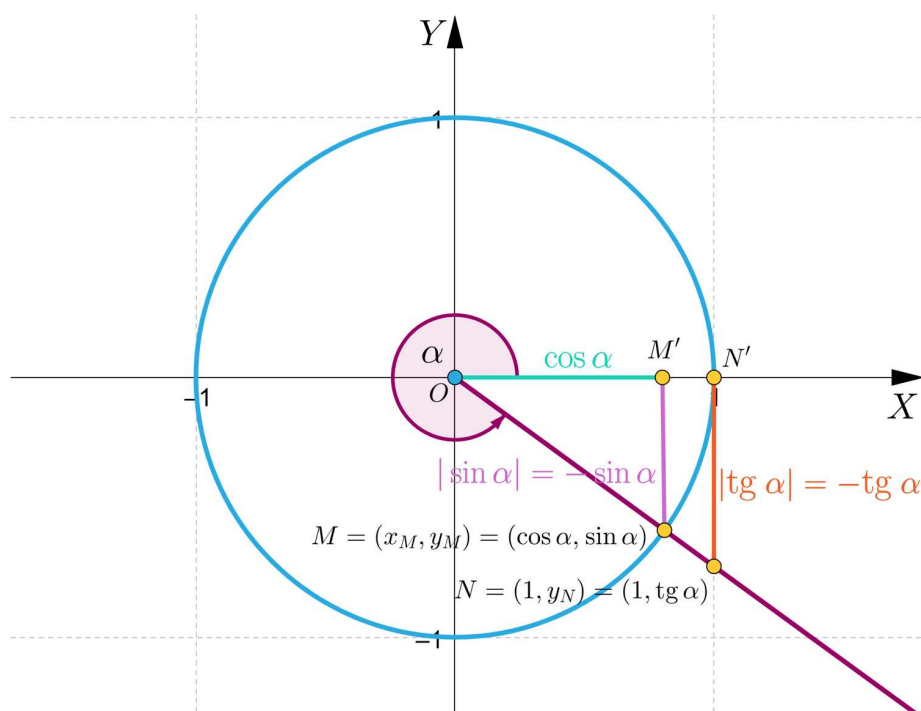
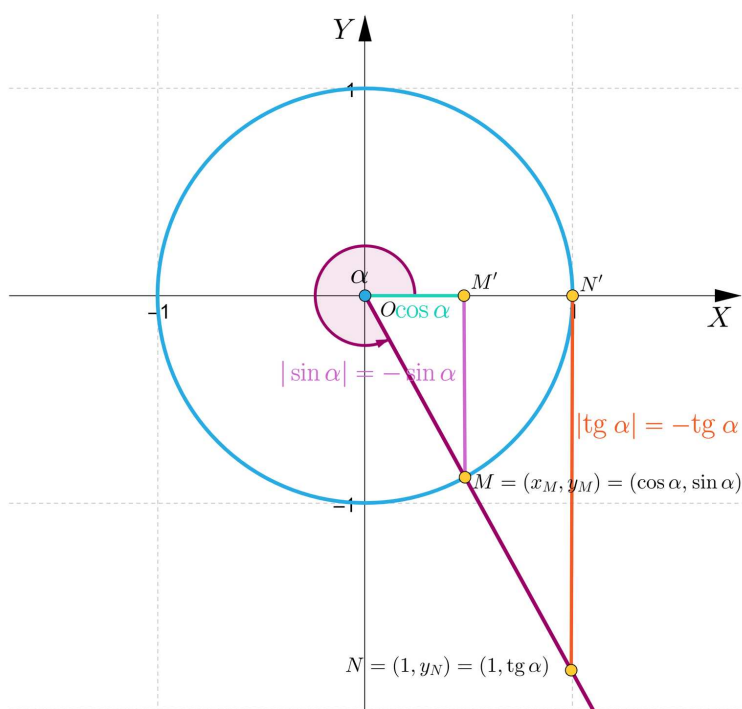
Z powyższego wynika, że im większa miara kąta α , tym mniejsza wartość liczby $\sin \alpha$, co oznacza, że funkcja $\sin \alpha$ jest malejąca na przedziale $(\pi, \frac{3\pi}{2})$.

Ponadto:

- odcinek NN' ma długość $|\operatorname{tg} \alpha| = \operatorname{tg} \alpha$ (bo $\operatorname{tg} \alpha > 0$),
- im większa miara kąta α , tym dłuższy jest odcinek NN' ,
- im dłuższy odcinek NN' , tym większa wartość liczby $\operatorname{tg} \alpha$.

Z powyższego wynika, że im większa miara kąta α , tym większa wartość liczby $\operatorname{tg} \alpha$, co oznacza, że funkcja $\operatorname{tg} \alpha$ jest rosnąca na przedziale $(\pi, \frac{3\pi}{2})$.

Jeśli kąt ma miarę z przedziału $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, to sytuacja wygląda jak na rysunkach poniżej.



Można zauważyć, że dla kątów o miarach z przedziału $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ zachodzą następujące zależności:

- odcinek OM' ma długość $|\cos \alpha| = \cos \alpha$ (bo $\cos \alpha > 0$),
- im większa miara kąta α , tym dłuższy jest odcinek OM' ,

- im dłuższy odcinek OM' , tym większa wartość liczby $\cos \alpha$.

Z powyższego wynika, że im większa miara kąta α , tym większa wartość liczby $\cos \alpha$, co oznacza, że funkcja $\cos \alpha$ jest rosnąca na przedziale $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

Analogicznie:

- odcinek MM' ma długość $|\sin \alpha| = -\sin \alpha$ (bo $\sin \alpha < 0$),
- im większa miara kąta α , tym krótszy jest odcinek MM' ,
- im krótszy odcinek MM' , tym mniejsza wartość liczby $-\sin \alpha$,
- im mniejsza wartość liczby $-\sin \alpha$, tym większa wartość liczby $\sin \alpha$.

Z powyższego wynika, że im większa miara kąta α , tym większa wartość liczby $\sin \alpha$, co oznacza, że funkcja $\sin \alpha$ jest rosnąca na przedziale $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

Ponadto:

- odcinek NN' ma długość $|\operatorname{tg} \alpha| = -\operatorname{tg} \alpha$ (bo $\operatorname{tg} \alpha < 0$),
- im większa miara kąta α , tym krótszy jest odcinek NN' ,
- im krótszy odcinek NN' , tym mniejsza wartość liczby $-\operatorname{tg} \alpha$,
- im mniejsza wartość liczby $-\operatorname{tg} \alpha$, tym większa wartość liczby $\operatorname{tg} \alpha$.

Z powyższego wynika, że im większa miara kąta α , tym większa wartość liczby $\operatorname{tg} \alpha$, co oznacza, że funkcja $\operatorname{tg} \alpha$ jest rosnąca na przedziale $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

Podsumujmy powyższe rozważania:

1. Funkcja sinus jest rosnąca na przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$ oraz na przedziale $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. Jest też malejąca na każdym z przedziałów $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ oraz $(\pi, \frac{3\pi}{2})$. Ponieważ funkcja sinus jest ciągła na zbiorze liczb rzeczywistych, to jej monotoniczność możemy opisać następująco: sinus rośnie na przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, maleje zaś na przedziale $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$. Ponieważ funkcja sinus jest okresowa o **okresie zasadniczym** 2π , to możemy powiedzieć, że rośnie na każdym z przedziałów postaci $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, oraz maleje na każdym z przedziałów postaci $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
2. Funkcja cosinus jest rosnąca na przedziale $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ oraz na przedziale $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. Jest też malejąca na każdym z przedziałów $(0, \frac{\pi}{2})$ oraz $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Ponieważ funkcja cosinus jest ciągła na zbiorze liczb rzeczywistych, to jej monotoniczność możemy opisać następująco: cosinus rośnie na przedziale $\langle \pi, 2\pi \rangle$, maleje zaś na przedziale $\langle 0, \pi \rangle$. Ponieważ funkcja cosinus jest **okresowa** o okresie zasadniczym 2π , to możemy powiedzieć, że rośnie na każdym z przedziałów postaci $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, oraz maleje na każdym z przedziałów postaci $\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle = \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
3. Funkcja tangens jest rosnąca na każdym z przedziałów $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\pi, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. Jest nieokreślona dla liczby $\frac{\pi}{2}$ oraz wszystkich liczb postaci $\frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ i ciągła dla

liczb postaci $k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (miejsca zerowe funkcji tangens). Ponieważ funkcja tangens jest ciągła na każdym z przedziałów postaci $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, to jej monotoniczność możemy opisać następująco: tangens rośnie na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ponieważ funkcja tangens jest **okresowa** o okresie zasadniczym π , to możemy powiedzieć, że rośnie na każdym z przedziałów postaci $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Wartości największe i wartości najmniejsze funkcji trygonometrycznych

Analizując przedziały monotoniczności funkcji trygonometrycznych, możemy zauważyć, że funkcja sinus przyjmuje wartość największą (skądinąd wiadomo, że jest ona równa 1, dla argumentów postaci $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, oraz wartość najmniejszą dla argumentów postaci $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (która skądinąd jest równa -1). Funkcja cosinus przyjmuje wartość największą (równą 1) dla argumentów postaci $x = 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, oraz wartość najmniejszą (równą -1) dla argumentów postaci $x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Funkcja tangens jest rosnąca na każdym z przedziałów, na którym jest określona. Ponadto przedziały określoności funkcji tangens są obustronnie otwarte, zatem funkcja tangens nie przyjmuje ani wartości najmniejszej, ani wartości największej.

Słownik

funkcja okresowa

mówimy, że funkcja f jest okresowa, jeśli istnieje dodatnia liczba T spełniająca warunki: 1) jeśli x należy do dziedziny funkcji f , to $x + T$ również należy do dziedziny funkcji f , oraz 2) dla każdego argumentu x zachodzi równość $f(x + T) = f(x)$

okres funkcji

okresem funkcji f nazywamy taką dodatnią liczbę T dla której spełnione są dwa warunki (1) i (2) z definicji funkcji okresowej

okres podstawowy/zasadniczy funkcji

najmniejsza dodatnia liczba, która jest okresem danej funkcji okresowej

okresowość funkcji trygonometrycznych

funkcje sinus, cosinus oraz tangens są okresowe przy czym okresem zasadniczym funkcji sinus i funkcji cosinus jest liczba 2π , zaś okresem zasadniczym funkcji tangens jest liczba π

Infografika

Polecenie 1

Przeanalizuj informacje zawarte w poniższej infografice. Na ich podstawie rozwiąż test.

Polecenie 2

Rozwiąż test wielokrotnego wyboru. Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. (Uwaga! Pamiętaj, że w pytaniach może pojawić się również tylko jedna prawidłowa odpowiedź.)

Okresem funkcji sinus jest liczba:

☐ 10π .

☐ 2π .

☐ 5π .

Okresem zasadniczym funkcji tangens jest liczba:

☐ π

☐ 2π

☐ $-\pi$

Wszystkie miejsca zerowe funkcji sinus:

☐ dokładnie pokrywają się z miejscami zerowymi funkcji tangens.

☐ dokładnie pokrywają się z liczbami, dla których funkcja tangens ma asymptoty pionowe.

☐ dokładnie pokrywają się z argumentami, dla których funkcja cosinus przyjmuje wartość największą.

Wszystkie miejsca zerowe funkcji cosinus:

☐ dokładnie pokrywają się z argumentami, dla których funkcja sinus przyjmuje wartość największą.

☐

dokładnie pokrywają się z liczbami, dla których funkcja tangens ma asymptoty pionowe.

☐

dokładnie pokrywają się z miejscami zerowymi funkcji tangens.

Można powiedzieć, że:

☐

zbiór miejsc zerowych funkcji sinus jest równy zbiorowi argumentów, dla których funkcja cosinus przyjmuje wartość 1 lub wartość (-1) .

☐

funkcja sinus ma dwa razy więcej miejsc zerowych niż argumentów, których przyjmuje wartość 1.

☐

miejsca zerowe funkcji sinus są rozmieszczone na osi liczbowej dwa razy gęściej niż argumenty, dla których przyjmuje ona wartość 1.

Wartość wyrażenia $\cos \frac{\pi}{5}$ jest równa wartości wyrażenia:

☐

$\cos \frac{11\pi}{5}$.

☐

$\cos \frac{-9\pi}{5}$.

☐

$\cos \frac{6\pi}{5}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Rozwiąż test.

Dokończ zdanie, wybierając poprawne odpowiedzi.
Okres zasadniczy funkcji sinus jest równy:

☐ okresowi zasadniczemu funkcji cosinus.

☐ π .

☐ 2π .

Ćwiczenie 2



Wyznacz okresy podstawowe funkcji o podanych wzorach.

a. $f(x) = \sin 3x$

b. $f(x) = \cos \frac{x}{4}$

Ćwiczenie 3



Przyporządkuj wzory funkcji ich okresom zasadniczym. Przeciągnij i upuść każdy element do odpowiedniej grupy.

Wzory funkcji o okresie zasadniczym $T_0 = \pi$

$f(x) = \sin 2\pi x$

$f(x) = \cos 4x$

$f(x) = \operatorname{tg} 2x$

$f(x) = \operatorname{tg} x$

$f(x) = \sin 4x$

$f(x) = \cos 2x$

$f(x) = \cos 2\pi x$

$f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$f(x) = \operatorname{tg} \pi x$

$f(x) = \sin x$

$f(x) = \cos x$

$f(x) = \sin 2x$

Wzory funkcji o okresie zasadniczym $T_0 = 2\pi$

Wzory funkcji o okresie zasadniczym $T_0 = \frac{\pi}{2}$

Wzory funkcji o okresie zasadniczym $T_0 = 1$

Ćwiczenie 4



Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.
Wartość $\operatorname{tg} 35^\circ$ nie jest równa wartości wyrażenia:

☐ $\operatorname{tg} 215^\circ$

☐ $\operatorname{tg} 145^\circ$

☐ $-\operatorname{tg} 145^\circ$

Ćwiczenie 5



Rozwiąż test wielokrotnego wyboru.

Dokończ zdanie, wybierając poprawne odpowiedzi.

Liczba $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ jest równa wartości wyrażenia:

☐ $\cos 510^\circ$.

☐ $\cos 480^\circ$.

☐ $\cos(-210^\circ)$.

Ćwiczenie 6



Połącz w pary wyrażenie trygonometryczne z jego wartością liczbową.

$\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin \frac{13\pi}{6}$

$\sqrt{3}$

$\operatorname{tg} \frac{10\pi}{3}$

$\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg} \frac{25\pi}{6}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$

$-\frac{1}{2}$

$\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \frac{8\pi}{3}$

1

$\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ćwiczenie 7



Uporządkuj podane wyrażenia od tych, których wartość liczbową jest najmniejsza, do tych o największej wartości liczbowej. Złap element i przesun go w górę lub w dół.

$$\cos \frac{25\pi}{6}$$



$$\sin \frac{19\pi}{2}$$



$$\cos \frac{35\pi}{4}$$



$$\operatorname{tg} \frac{29\pi}{6}$$



$$\operatorname{tg} (20\pi)$$



$$\cos(20\pi)$$



$$\sin \frac{37\pi}{6}$$



$$\sin\left(-\frac{29\pi}{6}\right)$$



$$\operatorname{tg} \frac{22\pi}{3}$$



Ćwiczenie 8



Określ monotoniczność funkcji trygonometrycznych na podanych przedziałach posługując się okresowością. Przeciągnij i upuść każdy element do odpowiedniej grupy.

sinus rośnie

$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

$\langle -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \rangle$

$\langle \pi, 2\pi \rangle$

brak

$\langle \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \rangle$

$\langle 0, \pi \rangle$

$\langle 2\pi, 3\pi \rangle$

$\langle \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \rangle$

sinus maleje

$\langle -2\pi, -\pi \rangle$

$\langle \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \rangle$

$\langle \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \rangle$

$\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$

cosinus rośnie

$\langle -3\pi, -2\pi \rangle$

$\langle -\pi, 0 \rangle$

$\langle -\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2} \rangle$

$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

cosinus maleje

tangens rośnie

tangens maleje

Ćwiczenie 9



Korzystając z okresowości funkcji trygonometrycznych, podaj rozwiązania poniższych nierówności elementarnych. Połącz w pary nierówności z ich rozwiązaniem.

$$\cos x > 0$$

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x > 0$$

$$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x < 0$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x < 0$$

$$(2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x > 0$$

$$\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x < 0$$

$$(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Okresowość funkcji trygonometrycznych oraz jej zastosowania

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres rozszerzony Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje własności funkcji okresowych,
- wyznacza okresy funkcji złożonych z funkcjami trygonometrycznymi,
- stosuje okresowość funkcji trygonometrycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- praca z ekspertem.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji: „Okresowość funkcji trygonometrycznych oraz jej zastosowania” i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Infografika” i rozwiązują polecenia z nim związane.

Materiały pomocnicze:

- [Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Okresowość funkcji trygonometrycznych oraz jej zastosowania”.