Walec opisany na graniastosłupie

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Prezentowany materiał porusza zagadnienia dotyczące walca opisanego na graniastosłupie. Spróbujemy odpowiedzieć na pytania: czy każdy graniastosłup prosty można zapakować do pudełka w kształcie walca? Jakie powinny być wymiary tego pudełka, aby miało ono jak najmniejszą powierzchnię? Jaką objętość materiału stracimy, jeśli z klocka w kształcie walca zechcemy wyciąć graniastosłup? W odpowiedzi na te wszystkie pytania pomogą nam wiadomości dotyczące własności wielokątów wpisanych w okrąg.

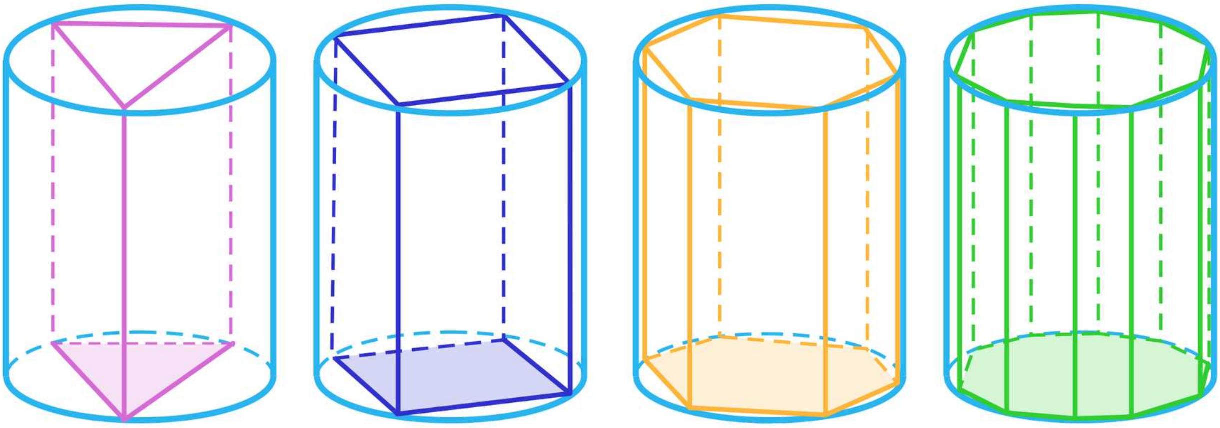
Zagadnienia dotyczące bryły wpisanej w bryłę wykraczają poza podstawę programową.

Twoje cele

- Poznasz własności graniastosłupów wpisanych w walec.
- Zastosujesz wzory na pole powierzchni i objętość brył oraz znane twierdzenia z geometrii płaskiej.

Przeczytaj

Walec opisany na graniastosłupie a graniastosłup wpisany w walec



Graniastosłup jest wpisany w walec jeśli jego podstawy są wielokątami wpisanymi w podstawy walca. Zauważmy, że wysokość graniastosłupa jest taka sama jak wysokość walca.

Podstawą graniastosłupa musi być wielokąt, na którym można opisać okrąg. To kryterium spełniają wszystkie wielokąty foremne, a zatem na każdym graniastosłupie prawidłowym można opisać walec.

Przypomnijmy podstawowe wzory dotyczące walca:

- objętość walca o promieniu R i wysokości H wyraża się wzorem $V = \pi R^2 H$
- pole powierzchni walca o promieniu R i wysokości H wyraża się wzorem $P = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot H$

Przykład 1

Rozważmy graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego wszystkie krawędzie mają długość a. Obliczymy powierzchnię całkowitą i objętość walca opisanego na tym graniastosłupie.

Rozwiązanie:

Ponieważ wszystkie krawędzie graniastosłupa są tej samej długości, to oznacza, że promień podstawy walca i jego wysokość również są równe a.

A zatem $V = \pi \cdot a^2 \cdot a = \pi a^3$ oraz $P_c = 2\pi a^2 + 2\pi a \cdot a = 4\pi a^2$.

Przykład 2

Objętość walca jest równa 24π. Wysokość walca jest 3 razy większa od promienia jego podstawy. Obliczymy objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wpisanego w ten walec.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez R promień podstawy walca. Stąd $H = 3R$. Korzystając z informacji o objętości walca otrzymujemy równanie:

$\pi R^2 \cdot 3R = 24\pi$

$R^3 = 8$

$R = 2$

Stąd $H = 6$.

Z zależności między bokiem trójkąta równobocznego, a promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie, otrzymujemy równanie

$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 2,$

$a = 2\sqrt{3}.$

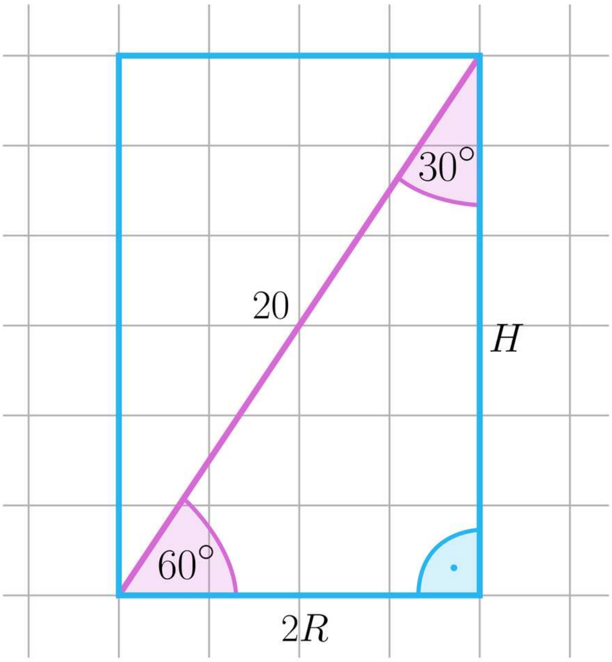
Stąd $V = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 18\sqrt{3}.$

Przykład 3

Przekątna przekroju osiowego walca, równa 20, nachylona jest do płaszczyzny podstawy walca pod kątem 60°. Obliczymy objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wpisanego w ten walec.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu posłużymy się przekrojem osiowym walca, który jest prostokątem o bokach H i $2R$.



Z własności trójkąta o kątach 30°, 60°, 90° mamy $2R = 10$, czyli $R = 5$ oraz $H = 10\sqrt{3}$.

Średnica podstawy walca jest przekątną podstawy graniastosłupa, czyli kwadratu, czyli $d = 10$.

Otrzymujemy $V = \frac{d^2}{2} \cdot H = 50 \cdot 10\sqrt{3} = 500\sqrt{3}$.

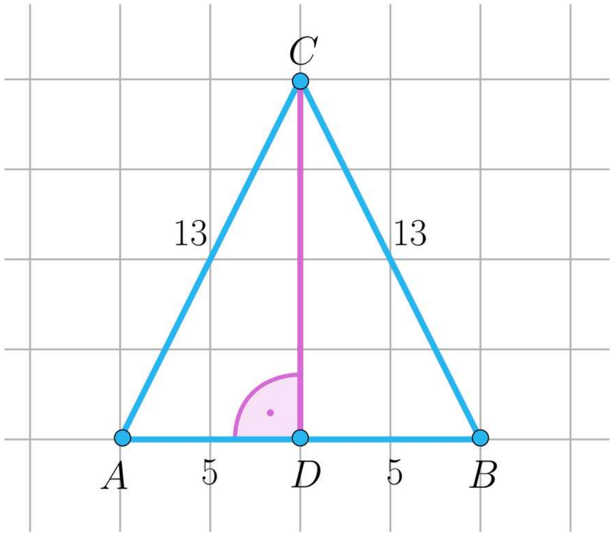
Zauważmy, że na każdym trójkącie również można opisać okrąg, zatem walec da się opisać na dowolnym graniastosłupie prostym trójkątnym.

Przykład 4

Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny o bokach 13, 13 i 10. Wysokość tego graniastosłupa jest równa 8. Obliczymy długość promienia walca opisanego na tym graniastosłupie.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że podstawą tego graniastosłupa jest trójkąt ABC, jak na rysunku.



Obliczymy promień okręgu opisanego na tym trójkącie korzystając ze wzoru $R = \frac{|AB| \cdot |BC| \cdot |AC|}{4P_{ABC}}$.

A zatem z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie BDC mamy:

$|CD|^2 + |BD|^2 = |BC|^2$

$|CD|^2 + 5^2 = 13^2$

$|CD|^2 = 144$

$|CD| = 12$

Stąd $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$.

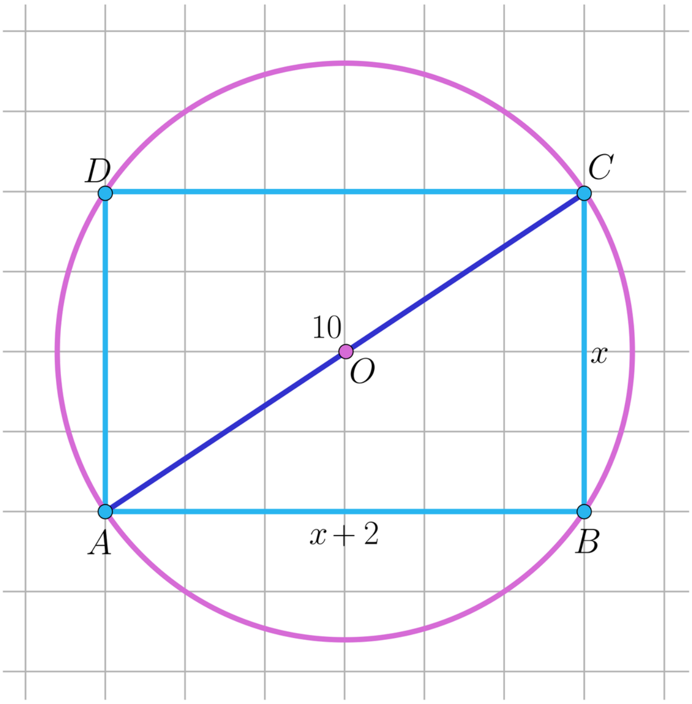
Otrzymujemy $R = \frac{|AB| \cdot |BC| \cdot |AC|}{4P_{ABC}} = \frac{13 \cdot 13 \cdot 10}{4 \cdot 60} = \frac{169}{24}$.

Przykład 5

Z walca o wysokości 12 i promieniu podstawy 5 wycięto prostopadłościan, którego krawędzie podstawy różnią się o 2. Obliczymy objętość prostopadłościanu.

Rozwiązanie:

Wykonajmy odpowiedni rysunek.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie:

$x^2 + (x+2)^2 = 10^2$

$2x^2 + 4x - 96 = 0$

Dodatnim rozwiązaniem tego równania jest $x = 6$. Stąd $x + 2 = 8$.

Zauważmy, że wysokość prostopadłościanu jest taka sama jak wysokość walca. Zatem objętość prostopadłościanu jest równa:

$V = x \cdot (x+2) \cdot 12 = 6 \cdot 8 \cdot 12 = 576.$

Wzory, które mogą Ci się przydać:

Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym
długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej długości c wyraża się wzorem: $R = \frac{c}{2}$

Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym
długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku długości a, wyraża się wzorem: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Promień okręgu opisanego na dowolnym trójkącie
długość promienia okręgu opisanego na dowolnym trójkącie wyraża się wzorem: $R = \frac{abc}{4P_\Delta}$, gdzie P_Δ - pole trójkąta, a, b i c - długości boków tego trójkąta

Pole kwadratu
pole kwadratu o przekątnej długości d wyraża się wzorem: $P = \frac{d^2}{2}$

Słownik

> **graniastosłup prawidłowy**
>
> graniastosłup prosty, którego postawami są wielokąty foremne

> **graniastosłup prosty**
>
> graniastosłup, którego ściany boczne są prostokątami

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Prezentacja multimedialna przedstawia wielokąty, które mogą być podstawami graniastosłupa wpisanego w walec. Zapoznaj się z jej treścią, a następnie odpowiedz na pytania zawarte w poleceniach poniżej.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D7I8nVILB

Polecenie 2

Na podstawie informacji zawartych w prezentacji oceń prawdziwość zdań. Walec można opisać na graniastosłupie prostym, którego podstawą jest:

Zdanie	Prawda	Fałsz
kwadrat o boku długości 5 cm		
dowolny romb o boku długości 5 cm		
trapez o bokach długości 5 cm, 5 cm, 6 cm, 10 cm		
czworokąt o kątach wewnętrznych 40°, 120°, 50°, 150°		

Polecenie 3

Przypomnij sobie własności wielokątów foremnych i odpowiedz na pytanie. Kliknij w odpowiednie pole wyboru.

	Tak	Nie
Czy na każdym graniastosłupie prawidłowym można opisać walec?	○	○

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o przekątnej podstawy równej 6 i wysokości 8 jest wpisany w walec. Objętość tego walca jest równa:

- 24π
- 72π
- 16π
- 48π

Ćwiczenie 2

Objętość walca opisanego na sześcianie o przekątnej 6 jest równa:

- $18\pi\sqrt{3}$
- $9\pi\sqrt{3}$
- $\frac{27}{4}\pi$
- $12\pi\sqrt{3}$

Ćwiczenie 3

Na prostopadłościanie o przekątnej długości 17 cm opisano walec o promieniu 4 cm. Wysokość tego walca jest równa:

- 12 cm
- 13 cm
- $\sqrt{273} \text{ cm}$
- 15 cm

Ćwiczenie 4

Graniastosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy równej 5 i wysokości 12 jest wpisany w walec. Oceń prawdziwość następujących zdań.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Promień podstawy walca jest równy 5.	◯	◯
Promień podstawy walca jest równy $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.	◯	◯
Pole powierzchni bocznej walca jest równe 120π.	◯	◯

Ćwiczenie 5

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest kwadratem o boku 16. Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wpisanego w ten walec. Podaj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku. Przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$.

Cyfra	Odpowiedź
cyfra setek	
cyfra dziesiątek	
cyfra jedności	

Ćwiczenie 6

Z kawałka drewna w kształcie walca, o wysokości dwa razy dłuższej niż promień podstawy i objętości $432\pi\ \mathrm{dm}^3$ mamy wykonać klocek w kształcie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego. Podstawy graniastosłupa mają być wpisane w podstawy walca. Oblicz objętość jaką zajmują odpady. Wartość podaj z dokładnością do $1\ \mathrm{dm}^3$.

Ćwiczenie 7

Graniastosłup trójkątny jest wpisany w walec. Jeden z boków podstawy graniastosłupa ma długość 10, a kąty przylegające do tego boku mają miary 10° i 20°. Oblicz wysokość tego walca, wiedząc, że jego objętość jest równa 200.

Ćwiczenie 8

Podstawą graniastosłupa o wysokości $2a$ jest trapez równoramienny o bokach długości a, a, a i $2a$. Oblicz objętość walca opisanego na tym graniastosłupie.

Dla nauczyciela

Autor: Małgorzata Kantor – Szczęśniak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Walec opisany na graniastosłupie

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, poziom rozszerzony.

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętość i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka, kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna własności graniastosłupa wpisanego w walec,
- stosuje wzory na pola powierzchni i objętość graniastosłupów oraz walca.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- koszyk pomysłów,
- pokaz multimedialny.

Formy pracy:

- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- projektor multimedialny/ tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj” oraz przypomnienie wiadomości o objętości graniastosłupa i walca oraz okręgu opisanym na trójkącie równobocznym, prostokątnym i dowolnym.

Faza wstępna:

1. Uczniowie w parach, metodą koszyka pomysłów, przygotowują 5 kartek, na których zapisują związane z graniastosłupem, walcem, okręgiem opisanym na wielokącie, poznane wzory i definicje. Kartki wrzucają do kosza, z którego będzie można je pobierać, szukając inspiracji do rozwiązania zadań. Uczniowie na tym etapie powtarzania wiadomości mogą korzystać z zeszytów, komputera, książek.
2. Nauczyciel podaje temat: „Walec opisany na graniastosłupie” i cele zajęć. Wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla prezentację multimedialną. Wybrani uczniowie rozwiązują polecenia pod prezentacją.
2. Uczniowie pracują w parach. Ich zadaniem jest samodzielne rozwiązanie przykładów przedstawionych w sekcji „Przeczytaj”. Uczniowie czytają dane polecenie, próbują rozwiązać problem. W razie wątpliwości mogą zajrzeć do koszyka pomysłów i odnaleźć potrzebną informację. Swoje rozwiązania porównują z tymi, zawartymi w sekcji „Przeczytaj”.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 6 grup. Każda grupa otrzymuje do rozwiązania jedno ćwiczenie z pośród ćwiczeń 1 – 6 w części „Sprawdź się”.
4. Wyznaczony przez nauczyciela uczeń omawia rozwiązanie zadania na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Po dzisiejszej lekcji powinienem/ powinnam zapamiętać, że .....”

Praca domowa:

Uczniowie dobierają się w pary i rozwiązują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Bryły obrotowe

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może przed lekcją poprosić o przypomnienie wzorów na pola powierzchni i objętości brył oraz własności trójkątów i czworokątów.