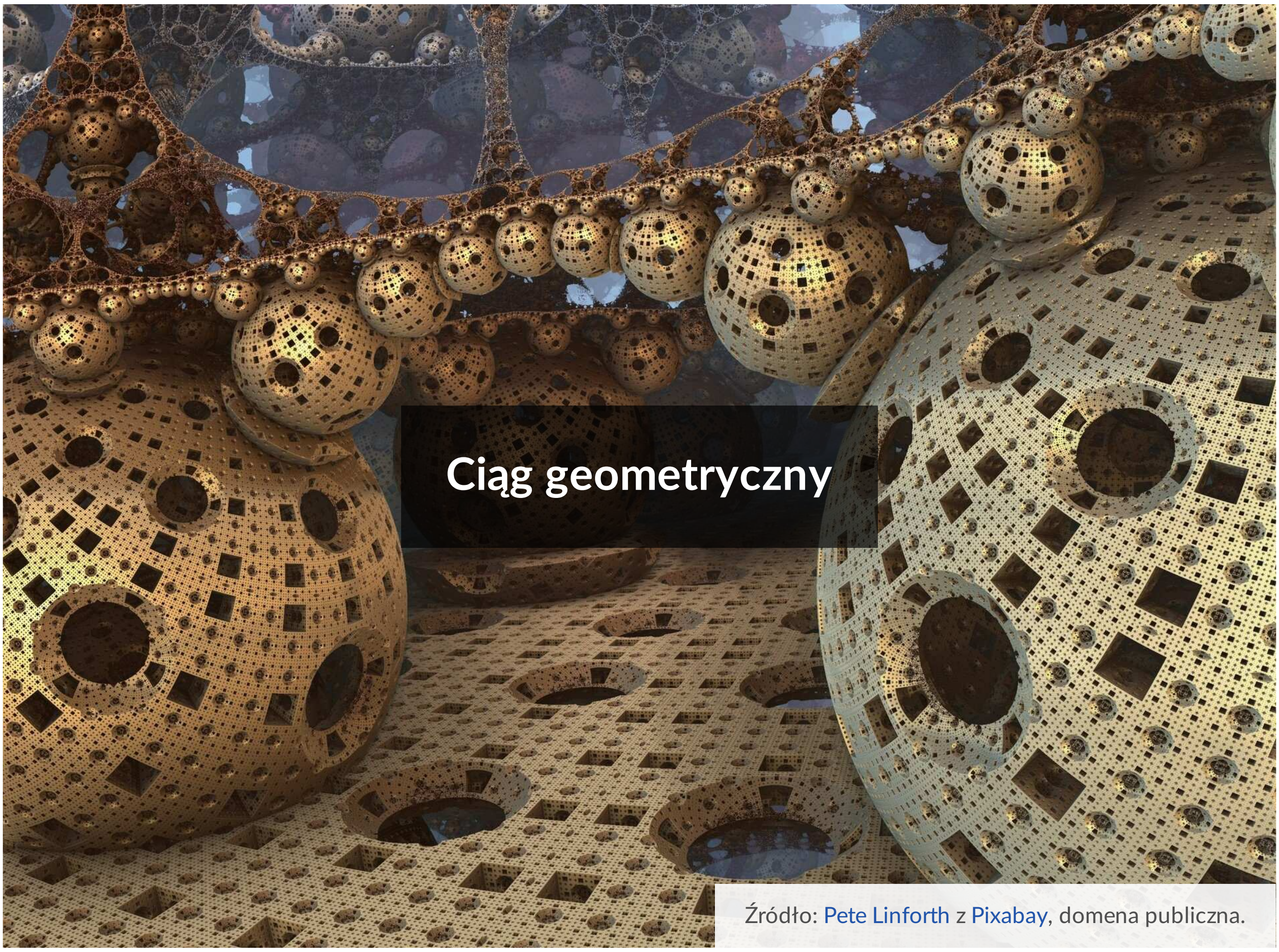
Ciąg geometryczny

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film edukacyjny
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: Pete Linforth z Pixabay, domena publiczna.

Poznamy teraz jeden z bardzo ważnych ciągów liczbowych – ciąg geometryczny. Ciąg ten znany był już Babilonii i starożytnym Egipcie, którzy podobno zaczerpnęli wiedzę o nim z sumeryjskich glinianych tabliczek. Dokładniejsze wiadomości o tym ciągu zawdzięczamy Grekom, którzy rozpropagowali kilka podstawowych własności tego ciągu.

Na pewno zdarzyło Ci się słyszeć, że coś rośnie (lub maleje) „w postępie geometrycznym” – to powiedzenie wiąże się bezpośrednio z atrybutem wyrazów ciągu geometrycznego – mogą bardzo szybko rosnąć lub maleć.

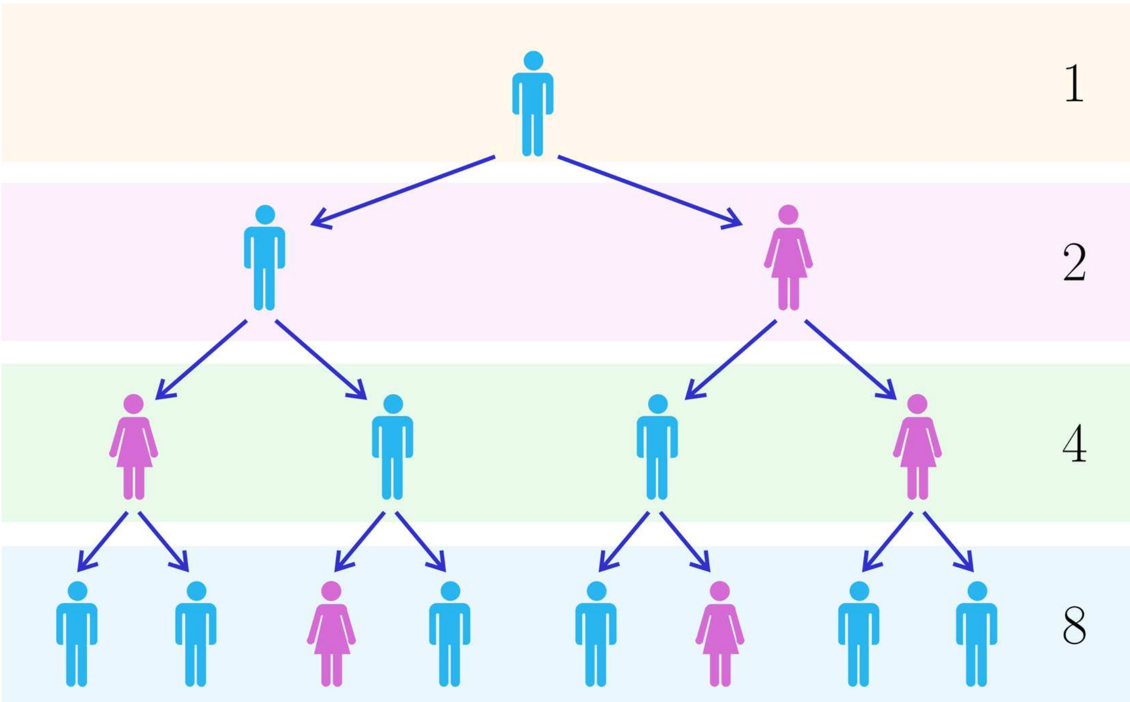
Twoje cele

- Rozpoznasz wśród innych ciągów ciąg geometryczny.
- Podasz przykład ciągu geometrycznego.
- W danym ciągu geometrycznym określisz pierwszy wyraz i iloraz ciągu.
- Udowodnisz, że dany ciąg jest geometryczny.
- Mając pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego, określisz kilka wyrazów ciągu.
- Znając wzór ciągu geometrycznego określisz jego pierwszy wyraz, iloraz ciągu, konkretny wyraz ciągu.

Przeczytaj

COVID–19 to ostra choroba zakaźna układu oddechowego wywołana zakażeniem wirusem SARS-CoV-2. Główną droga rozprzestrzeniania się wirusa SARS jest przenoszenie się z człowieka na człowieka w postaci kropelkowej.

Pewna osoba nie wiedziała, że jest zarażona wirusem SARS i rozmawiając z dwoma przyjaciółmi kichnęła (nie zakrywając ust), zaraziła te osoby. Załóżmy, że każda z tych osób nim dowiedziała się, że jest chora i następnego dnia również zaraziła dwie osoby. Zakładając, że ten model będzie się powtarzał i każda chora osoba zarazi dwie inne, możemy przebieg rozprzestrzeniania się wirusa zobrazować na wykresie.



Liczby opisujące ilość zakażanych osób w kolejnych dniach możemy zapisać następująco:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots$$

Zauważ, że liczby te tworzą pewien ciąg, w którym kolejne wyrazy powstają z poprzednich poprzez pomnożenie przez 2. Jest to przykład ciągu (postępu) zwanego geometrycznym. Na podstawie powyższego schematu powiemy, że wirus SARS rozprzestrzenia się w postępie geometrycznym.

Zapiszmy teraz kilka kolejnych naturalnych potęg liczby 3.

$$3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 3^5,\ \ldots$$

W tym przypadku kolejne wyrazy utworzonego ciągu (oprócz pierwszego) powstają poprzez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez 3. Jest to również przykład ciągu geometrycznego.

Ciągi geometryczne mogą być ciągami nieskończonymi bądź skończonymi. Ale aby stwierdzić czy dany ciąg jest geometryczny, ten ciąg musi mieć co najmniej trzy wyrazy.

Definicja: Ciąg geometryczny

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez liczbę q, zwaną ilorazem ciągu.

Przykład 1

Ciąg $(1,\ 5,\ 10)$ nie jest ciągiem geometrycznym, bo drugi wyraz powstaje z pierwszego poprzez pomnożenie przez 5, ale trzeci wyraz powstaje z drugiego poprzez pomnożenie przez 2.

Ciąg geometryczny zwykle określany jest poprzez pierwszy wyraz ciągu i iloraz ciągu.

Przykład 2

Przykłady ciągów geometrycznych nieskończonych

Kolejne początkowe wyrazy ciągu	Pierwszy wyraz	Iloraz ciągu
$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \ldots$	1	2
$10,\ 50,\ 250,\ 1250,\ 6250,\ \ldots$	10	5
$-64,\ -16,\ -4,\ -1,\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{16},\ \ldots$	-64	$\frac{1}{4}$
$-81,\ -54,\ -36,\ -24,\ -16,\ -\frac{32}{3},\ \ldots$	-81	$\frac{2}{3}$
$\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ 4\sqrt{2},\ 8\ ,\ 8\sqrt{2},\ \ldots$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots$	0	Dowolna liczba rzeczywista

W powyższych przykładach ilorazem ciągu była liczba dodatnia (za wyjątkiem ciągu o wyrazach równych 0, którego ilorazem może być dowolna liczba rzeczywista). Ale iloraz może być też liczbą ujemną. Wówczas uzyskany ciąg (o wyrazach niezerowych), jest **ciągiem naprzemiennym**, to znaczy wystepują w nim na przemian wyrazy dodatnie i ujemne.

Przykład 3

Przykłady ciągów naprzemiennych skończonych

Przykłady ciągów naprzemiennych skończonych		
Kolejne początkowe wyrazy ciągu	**Pierwszy wyraz**	**Iloraz ciągu**
$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1$	1	-1
$-5,\ 25,\ -125,\ 625,\ -3125$	-5	-5
$\frac{1}{3},\ -\frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ -\frac{1}{24},\ \frac{1}{48}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$

Ciekawym rodzajem ciągu geometrycznego jest ciąg stały. To znaczy taki, którego iloraz jest równy 1.

Przykład 4

Przykłady ciągów stałych		
Kolejne początkowe wyrazy ciągu	**Pierwszy wyraz**	**Iloraz ciągu**
$-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ \ldots$	-1	1
$5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ \ldots$	5	1
$\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \ldots$	$\frac{1}{3}$	1

Z określenia ciągu geometrycznego wynika, że iloraz uzyskany poprzez podzielenie wyrazu następnego przez poprzedni, jest dla danego ciągu liczbą stałą. Więc jeśli mamy pierwszy wyraz i iloraz ciągu, to możemy wyznaczyć kilka początkowych wyrazów tego ciągu.

Ważne!

Jeżeli (a_n) **jest ciągiem geometrycznym o ilorazie** q**, to dla dowolnej liczby naturalnej** $n > 0$ **prawdziwa jest równość**:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Przykład 5

Wyznaczymy wyrazy pięcioelementowego ciągu geometrycznego (a_n) wiedząc, że jego pierwszy wyraz jest równy 120, a iloraz jest równy $0,5$.

$a_1 = 120$

$a_2 = 120 \cdot 0,5 = 60$

$a_3 = 60 \cdot 0,5 = 30$

$a_4 = 30 \cdot 0,5 = 15$

$a_5 = 15 \cdot 0,5 = 7,5$

Odpowiedź:

Szukany ciąg ma postać: $(120;\ 60;\ 30;\ 15;\ 7,5)$.

Znając co najmniej dwa kolejne wyrazy ciągu geometrycznego (niekoniecznie początkowe), można wyznaczyć łatwo iloraz tego ciągu.

Ważne!

Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach niezerowych, to dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$ prawdziwa jest równość:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

gdzie:
q – jest ilorazem tego ciągu.

Przykład 6

Wyznaczymy iloraz każdego z podanych ciągów geometrycznych.

- $7,\ 21,\ 63,\ 189,\ \ldots, q = \frac{63}{21} = 3$
- $-1,\ -2,\ -4,\ -8,\ -16,\ \ldots, q = \frac{-2}{-1} = 2$
- $\ldots,\ 2\sqrt{3},\ 6,\ 6\sqrt{3},\ 18,\ \ldots, q = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$

Przykład 7

Wiadomo, że trzeci wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 90, a czwarty 270 obliczymy pierwszy wyraz tego ciągu.

Mamy dane dwa kolejne wyrazy ciągu, zatem możemy obliczyć iloraz tego ciagu.

$a_3 = 90$

$a_4 = 270$

$q = \frac{a_4}{a_3}$

$q = \frac{270}{90} = 3$

Mając trzeci wyraz i iloraz ciągu, można obliczyć drugi wyraz.

$a_2 = \frac{a_3}{q}$

$a_2 = \frac{90}{3} = 30$

W podobny sposób obliczamy pierwszy wyraz.

$a_1 = \frac{a_2}{q}$

$a_1 = \frac{30}{3} = 10$

Odpowiedź:

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy 10.

Przykład 8

W ciągu geometrycznym (b_n) suma dwóch pierwszych wyrazów jest równa 108, a różnica wyrazu drugiego i pierwszego jest równa (-54). Znajdziemy iloraz tego ciągu.

Oznaczmy:
b_1 – pierwszy wyraz ciągu,
b_2 – drugi wyraz ciągu,
q – iloraz ciągu.

Zapisujemy układ równań wynikający z treści zadania.

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 108 \\ b_2 - b_1 = -54 \end{cases}$$

Dodajemy stronami równania układu i wyznaczamy b_2.

$2b_2 = 54$

$b_2 = 27$

Wyznaczoną liczbę podstwiamy do pierwszego równania i wyznaczamy b_1.

$b_1 = 108 - 27 = 81$

Mamy dwa kolejne wyrazy ciągu – możemy wyznaczyć iloraz ciągu.

$q = \frac{b_2}{b_1}$

$q = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$

Odpowiedź:

Iloraz ciągu jest równy $\frac{1}{3}$.

Nie zawsze znamy kilka kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego. Ciąg może być też określony wzorem i wtedy potrzebne wielkości możemy wyznaczyć, korzystając ze wzoru.

Przykład 9

Ciąg geometryczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = 4 \cdot 5^n$. Znajdziemy iloraz tego ciągu.

Wyznaczamy dwa pierwsze wyrazy ciągu.

$a_1 = 4 \cdot 5^1 = 20$

$a_2 = 4 \cdot 5^2 = 100$

Obliczamy iloraz ciągu.

$q = \frac{a_2}{a_1}$

$q = \frac{100}{20} = 5$

Odpowiedź:

Iloraz ciągu jest równy 5.

Nie zawsze łatwo jest ustalić, czy ciąg określony za pomocą wyrazów jest ciągiem geometrycznym, czy nie. Na przykład gdybyśmy wzięli pod uwagę tylko pięć początkowych wyrazów ciągu $1, 2, 4, 8, 16, 17, 18, 19, \ldots$, to wydawałoby się, że jest to ciąg geometryczny o ilorazie 2. Dlatego znacznie łatwiej jest o sprawdzenie czy ciąg jest geometryczny, mając dany jego wzór.

Ważne!

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera, jest ciągiem geometrycznym, jeżeli dla dowolnej liczny naturalnej $n > 0$ iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały.

Przykład 10

Sprawdzimy, czy ciąg określony wzorem $a_n = 3 \cdot 2^n$ jest geometryczny.

Badamy iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3 \cdot 2^n} = \frac{2^n \cdot 2}{2^n} = 2$

Zauważmy, że wszystkie wyrazy rozpatrywanego ciągu są różne od zera. Stąd i z dowolności liczby n wynika, że ciąg jest geometryczny (wyznaczony iloraz jest stałą liczbą).

Słownik

ciąg geometryczny

ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez liczbę q, zwaną ilorazem ciągu

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem, który przybliży Ci zagadnienia związane z ciągiem geometrycznym.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D5LH8x1mE

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej ciągu geometrycznego.

Polecenie 2

Uzasadnij, że ciąg określony wzorem $a_n = n^2$ nie jest ciągiem geometrycznym.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 2 \cdot 3^n$ jest ciągiem geometrycznym.

Ćwiczenie 8

Znajdź liczbę x, dla której ciąg $\left(\sqrt{2}-1,\ x,\ \sqrt{2}+1\right)$ jest ciągiem geometrycznym.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ciąg geometryczny

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;

7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje wśród innych ciągów ciąg geometryczny
- podaje przykład ciągu geometrycznego
- w danym ciągu geometrycznym określa pierwszy wyraz i iloraz ciągu
- udowodnia, że dany ciąg jest geometryczny
- mając pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego, określa kilka wyrazów ciągu
- znając wzór ciągu geometrycznego określa jego pierwszy wyraz, iloraz ciągu, konkretny wyraz ciągu
- pełni wyznaczone role w grupie
- dokonuje samooceny własnej pracy
- wykorzystuje dotychczasową wiedzę i umiejętności w nowych sytuacjach

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- rybki w akwarium
- interaktywny wykład
- praca z ekspertem

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają wiadomości dotyczące ciągów – definicję, podstawowe własności.
2. Wyznaczeni wcześniej uczniowie przedstawiają przygotowaną w domu prezentację wprowadzającą do pojęcia: ciąg geometryczny. Prezentacja ta powinna mieć charakter interaktywnego wykładu.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują metodą rybki w akwarium – uczniowie, którzy wcześniej zapoznali się z materiałami z sekcji „Przeczytaj", prowadzą między sobą dyskusję na temat pojęcia: ciąg geometryczny. Mogą przy tym wykorzystywać wcześniej przygotowane materiały interaktywne, film.
2. Pozostali uczniowie przysłuchują się wymianie zdań, ale mogą zadawać też pytania, notować.
3. Po skończonej dyskusji, uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów (tych uczniów, którzy byli „rybkami w akwarium"). Wspólnie rozwiązują ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
   Dyskusja – w jaki sposób pracowali eksperci, w jaki sposób uczniowie pełnili inne role powierzone im w grupie.
2. Uczniowie dokonują samooceny własnej pracy.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i ekspertów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest ułożenie i rozwiązanie 3 zadań podobnego typu jak na lekcji.

Materiały pomocnicze:

Ciąg geometryczny

Wskazówki metodyczne:

Jeśli lekcja będzie prowadzona inną metodą niż praca z ekspertem, film może być wstępem do lekcji. Film można też wykorzystać w tematach dotyczących wykorzystania własności ciągu geometrycznego w zadaniach z historii matematyki.