



Pole powierzchni graniastopu

Materiał składa się z sekcji: "Siatka graniastopu", "Pole powierzchni graniastopu".

Materiał zawiera ilustracje (fotografii, obrazów, rysunków), filmy, ćwiczenia, w tym interaktywne.

Filmy – siatki graniastopów.

Obrazy, zawartość tekstowa – przykłady obliczania pola powierzchni graniastopów.

Ćwiczenia – obliczanie pola powierzchni graniastopów, siatki graniastopów i ich elementy.

Pole powierzchni graniastopu

Siatka graniastopu

Rozcinając kartonowy model graniastopu i rozprostowujac go na płaszczyźnie, otrzymujemy siatkę graniastopu. Siatka składa się z prostokątów (lub równoległoboków) będących ścianami bocznymi i dwóch wielokątów, będących podstawami.

Przykłady siatek graniastopów prostych:



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RTxTgjxvO9Q>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje kolumny. Kreślone są krawędzie jednej kolumny – powstaje prostopadłościan. Dwa jednakowe prostopadłościany rozkładają się na dwie różne siatki prostopadłościanu.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1bmXcocQZCId>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki prostopadłościanu, które składają się w jednakowe prostopadłościany. Prostopadłościan zmienia się w kolumnę, która stoi obok innych kolumn.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R19h28wgDtSQo>

Matematyka_3D_5004

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje nakrętki na śruby. Kreślone są krawędzie jednej nakrętki – powstaje graniastosłup o podstawie sześciokąta foremnego. Dwa jednakowe graniastosłupy rozkładają się na dwie różne siatki graniastosłupa.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R54Vz4TRMuxwM>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki graniastosłupa, które składają się w jednakowe graniastosłupy. Graniastosłup zamienia się w nakrętkę leżącą między nakrętkami.

Ważne!

Siatką prostopadłościanu jest figura płaska, z której można złożyć model prostopadłościanu. Siatka prostopadłościanu składa się z trzech par przystających prostokątów.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R17IVU8ZOzKpH>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje leżące na stole kostki do gry. Kreślone są krawędzie jednej kostki – powstaje sześcián. Dwa jednakowe sześciány rozkładają się na dwie różne siatki sześciánu.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1RXkaFe6bD84>

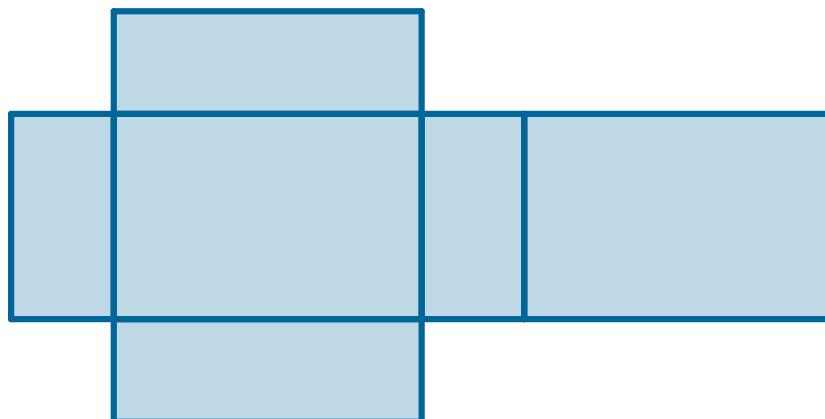
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki sześciánu, które składają się w jednakowe sześciány. Sześcián zamienia się w kostkę do gry, która leży z innymi kostkami na stole.

Ważne!

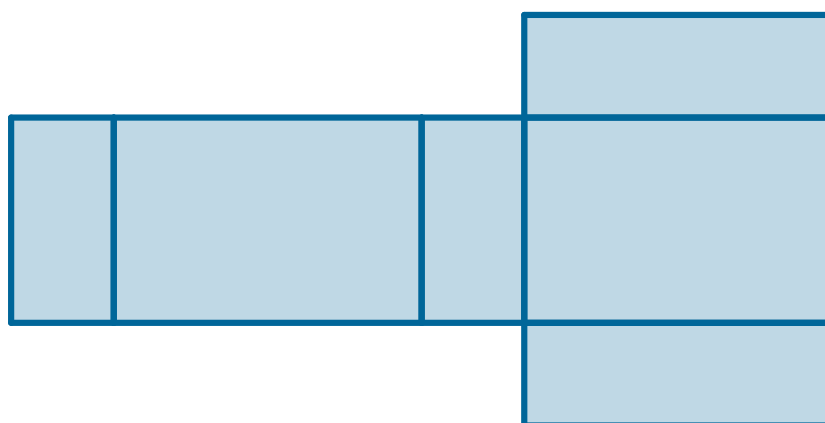
Przykłady siatek prostopadłościanów.

1.



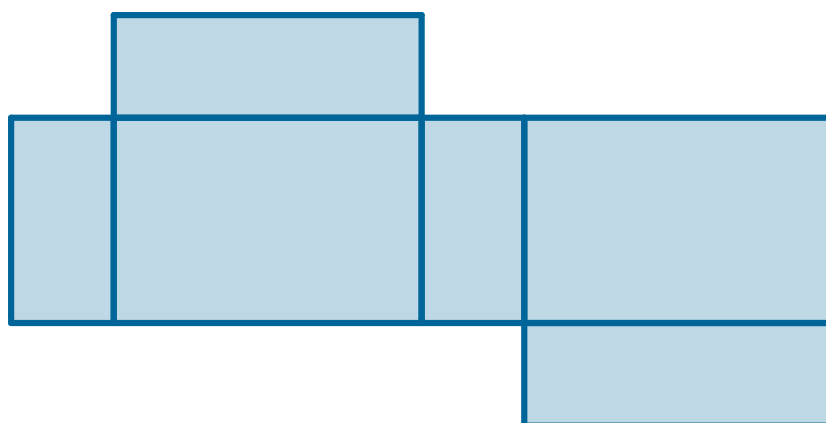
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2.



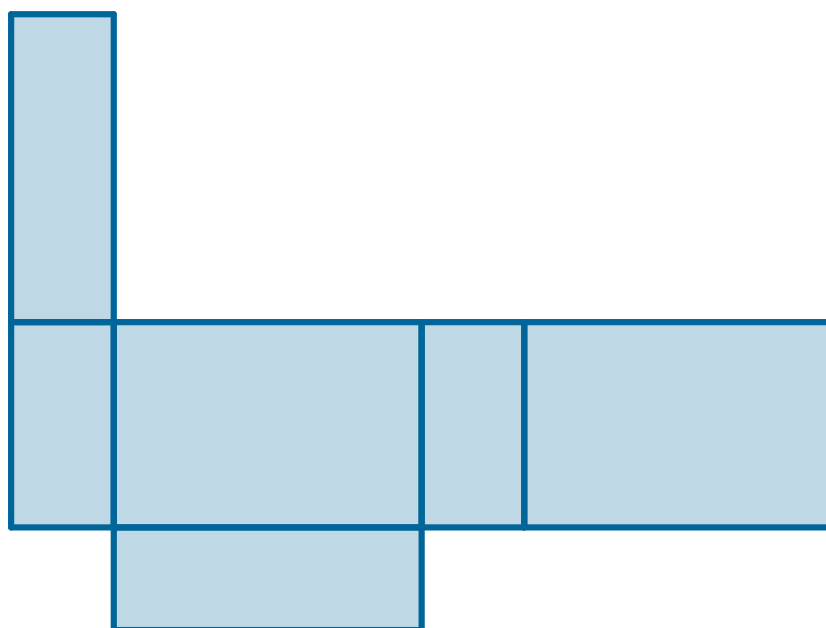
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

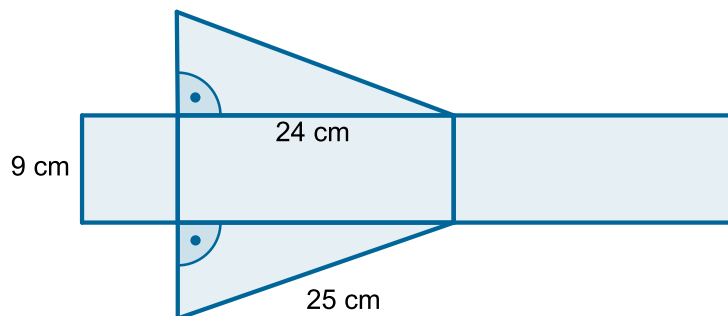
4.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 1

Rysunek przedstawia siatkę graniastosłupa prostego. Obliczymy sumę długości krawędzi tego graniastosłupa.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wszystkie krawędzie boczne graniastosłupa są równe i mają długość 9 cm. Suma ich długości jest równa

$$3 \cdot 9 \text{ cm} = 27 \text{ cm}.$$

Podstawą jest trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 24 cm i przeciwprostokątnej długości 25 cm. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczymy długość x drugiej przyprostokątnej.

$$24^2 + x^2 = 25^2$$

$$576 + x^2 = 625$$

$$x^2 = 49$$

$$x = \sqrt{49} = 7$$

$$x = 7 \text{ cm}.$$

Obliczamy sumę długości krawędzi podstaw.

$$2 \cdot (24 + 7 + 25) \text{ cm} = 112 \text{ cm}.$$

Obliczamy sumę długości wszystkich krawędzi.

$$27 \text{ cm} + 112 \text{ cm} = 139 \text{ cm}.$$

Odpowiedź:

Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa wynosi 139 cm.

Pole powierzchni graniastosłupa

Znajomość siatki graniastosłupa pozwala wyznaczyć jego pole powierzchni. Jest ono równe sumie pól wszystkich wielokątów, z których składa się siatka.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RakstiyKIRQHs>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje sześcian, który rozkłada się na siatkę sześcianu o krawędzi długości a. Zapis $P = 6$ razy a do kwadratu.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/Rt6YvFP5ZvwVp>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje prostopadłościan, który rozkłada się na siatkę prostopadłościanu. Zaznaczone są pola poszczególnych ścian: $P = a$ razy b , $P = b$ razy c , $P = a$ razy c . Zapis: $P = 2a$ razy $b + 2b$ razy $c + 2a$ razy c .

Ważne!

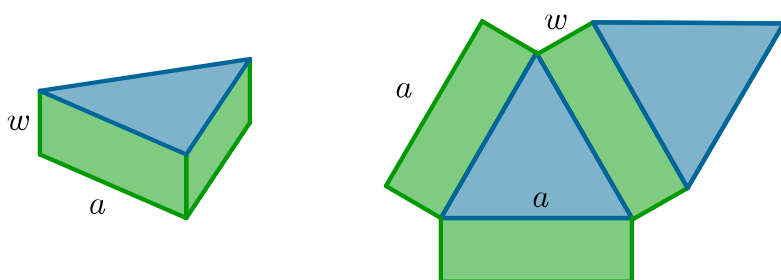
Wzór na pole powierzchni graniastoslupa:

$$P = 2 \cdot P_p + P_b$$

P – pole powierzchni graniastoslupa,

P_p – pole podstawy,

P_b – pole powierzchni bocznej.

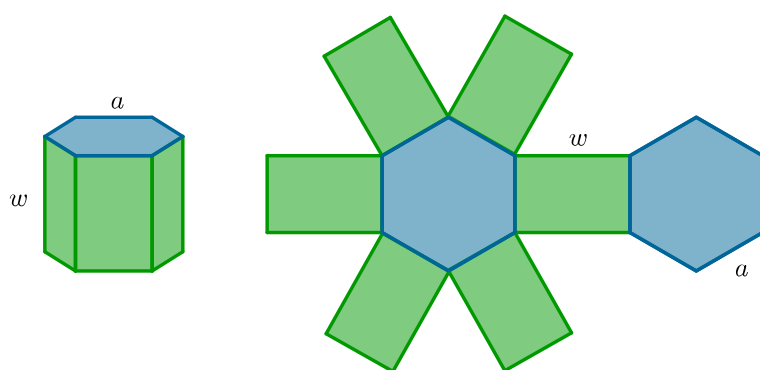


$$P = 3aw + 2 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole powierzchni graniastoslupa prawidłowego trójkątnego o wysokości w i krawędzi podstawy a

$$P = 3a \cdot w + 2 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$



$$P = 6aw + 3a^2 \sqrt{3}$$

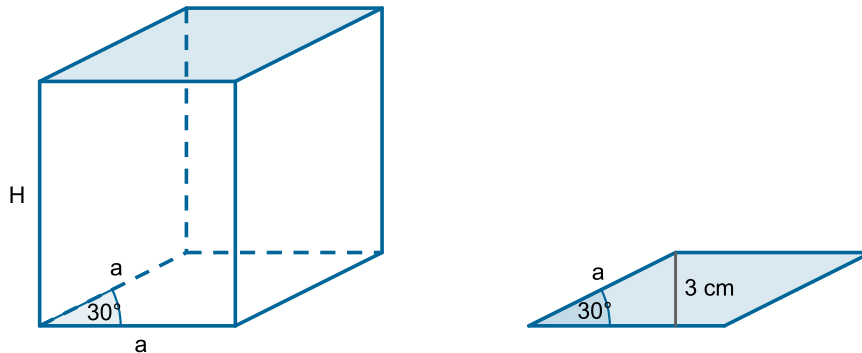
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole powierzchni graniastopuła prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości w

$$P = 6a \cdot w + 3a^2\sqrt{3}.$$

Przykład 2

Podstawą graniastopuła jest romb o wysokości 3 cm i kącie ostrym 30° . Pole powierzchni bocznej jest równe 168 cm^2 . Obliczymy wysokość graniastopuła i jego pole powierzchni całkowitej.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Podstawą graniastopuła jest romb, w którym kąt ostry ma miarę 30° , a wysokość jest równa 3 cm. Z własności trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej 3 cm i kącie ostrym leżącym naprzeciw tej przyprostokątnej o mierze 30° wynika, że długość przeciwprostokątnej jest równa 6 cm.

Zatem bok rombu ma długość 6 cm.

- Obliczymy wysokość H graniastopuła, korzystając z tego, że pole powierzchni bocznej jest równe 168 cm^2 .

$$4 \cdot 6 \cdot H = 168$$

$$24H = 168$$

$$H = 7 \text{ cm.}$$

- Obliczamy pole podstaw graniastopuła.

$$2P_p = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$$

$$2P_p = 36 \text{ cm}^2.$$

- Obliczamy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jako sumę pola podstaw i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

$$P_c = 36 + 168 = 204$$

$$P_c = 204 \text{ cm}^2.$$

Odpowiedź:

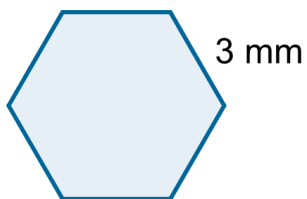
Wysokość graniastosłupa jest równa 7 cm, a pole powierzchni jest równe 204 cm².

Zadania

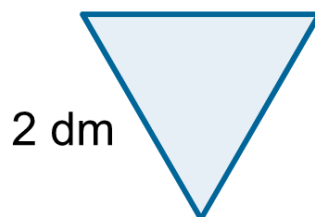
Ćwiczenie 1

Dopasuj ilustracje do odpowiedniego pola powierzchni graniastosłupa prawidłowego o wysokości 5 cm i podstawie przedstawionej na rysunku. 

c)



a)



b)



$$(200\sqrt{3} + 300) \text{ cm}^2$$

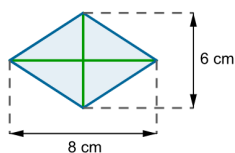
$$288 \text{ cm}^2$$

$$(27\sqrt{3} + 900) \text{ mm}^2$$

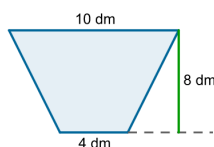
Ćwiczenie 2

Wysokość graniastopuła jest równa 6,5 dm. Podstawą jest wielokąt przedstawiony na rysunku. Dopasuj ilustrację do odpowiedniego pola powierzchni graniastopuła.

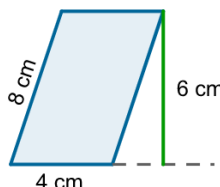
c)



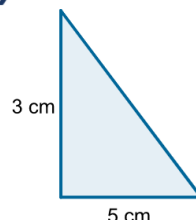
d)



a)



b)



$$1608 \text{ cm}^2$$

$$(112 + (10 + 4 + 4))$$

$$535 + 65\sqrt{34} \text{ cm}^2$$

$$1348 \text{ cm}^2$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Pole powierzchni całkowitej graniastopuła jest równe 60 cm^2 , a pole powierzchni bocznej 48 cm^2 . Oblicz pole podstawy. Uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Pole podstawy wynosi cm^2 .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Pole powierzchni podstawy graniastopuła jest równe 6 dm^2 , a pole powierzchni bocznej jest siedmiokrotnie większe. Oblicz pole powierzchni całkowitej. Uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Pole powierzchni całkowitej wynosi dm^2 .

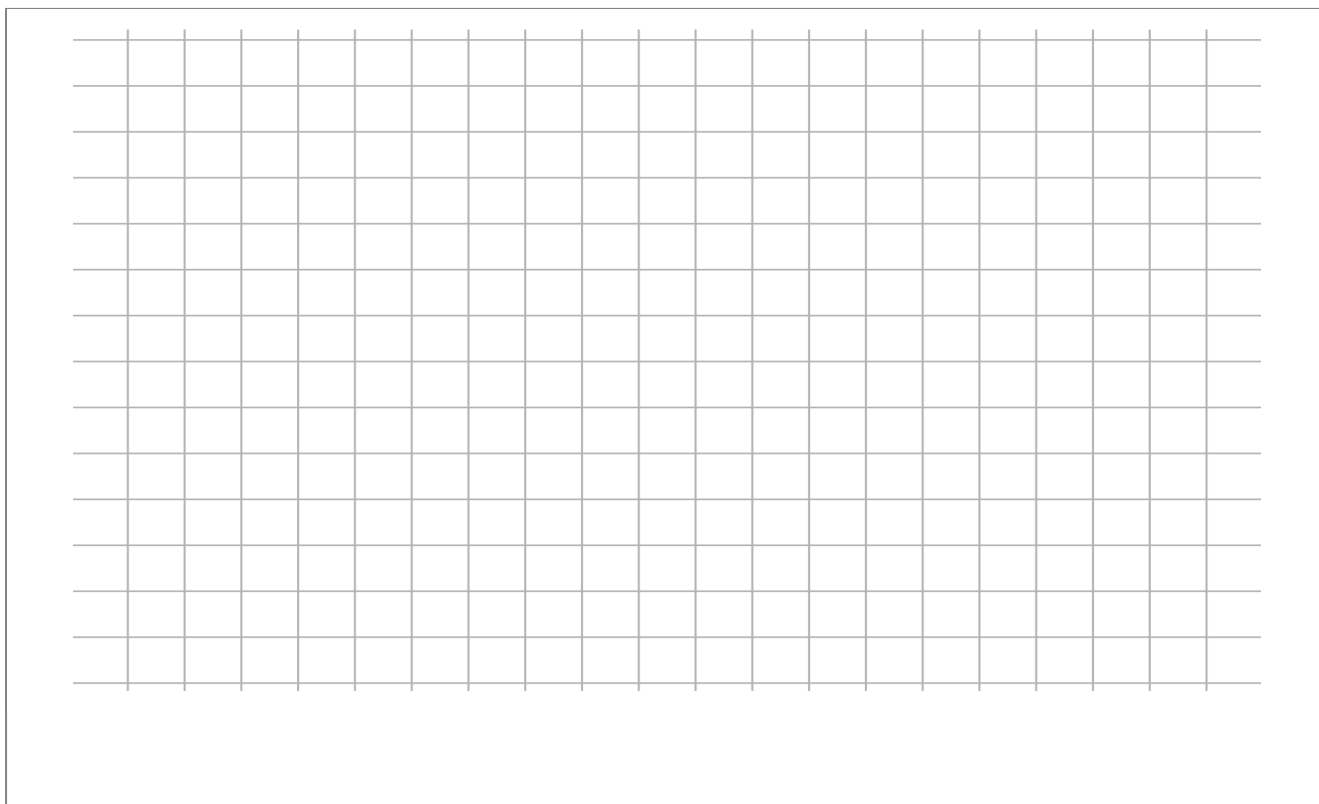
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



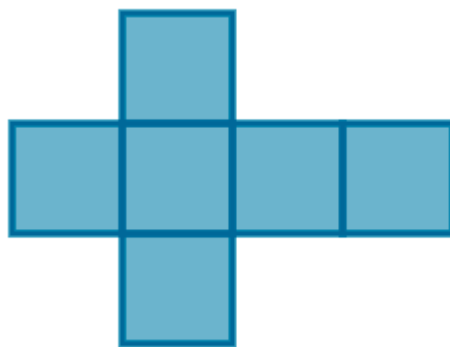
Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego ma długość 4 cm. Wysokość graniastosłupa jest równa 6 cm. Narysuj siatkę tego graniastosłupa, wiedząc, że jego podstawą jest:

1. trójkąt
2. czworokąt
3. pięciokąt
4. sześciokąt



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Czy powyższy rysunek przedstawia siatkę sześcianu? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Nie

☐ Tak

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Pudełko ma kształt graniastopły prostej, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 12 cm i 16 cm. Wysokość pudełka jest równa 10 cm. Na kartce papieru narysowano siatkę tego pudełka w skali 1 : 4. Oblicz, ile kartonu użyto do wykonania tego pudełka oraz jakie pole powierzchni ma narysowana na kartce siatka. Uzupełnij poniższe zdania, wpisując w luki odpowiednie liczby.

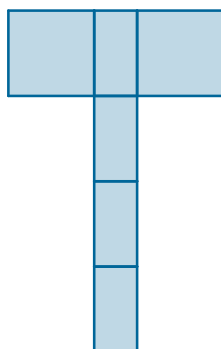
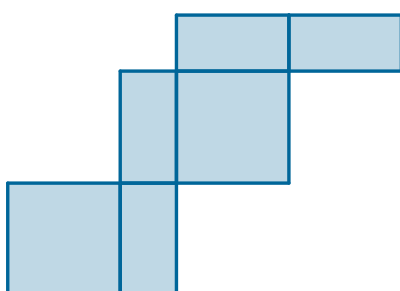
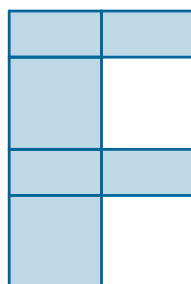
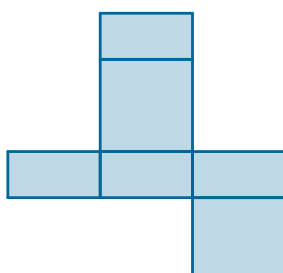
- Przeciwprostokątna podstawy ma długość cm.
- Do wykonania tego pudełka użyto cm^2 kartonu.
- Pole narysowanej siatki wynosi cm^2 .

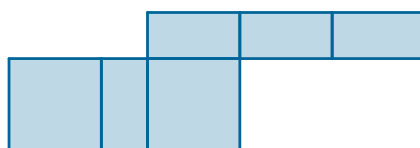
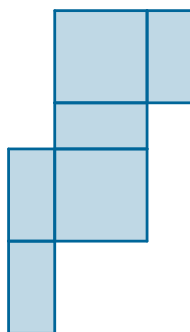
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Które figury są siatkami prostopadłościanu? Zaznacz wszystkie odpowiednie figury.

☐☐☐

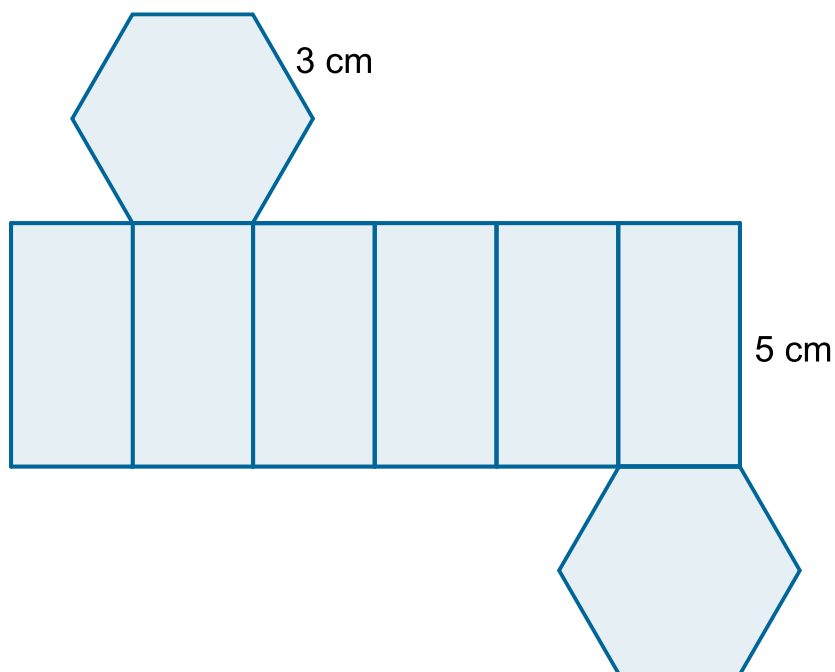


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Rysunek przedstawia siatkę graniastoslupa. Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

Suma długości krawędzi graniastoslupa jest o 36 cm większa od sumy długości krawędzi bocznych.

☐

Pole powierzchni podstawy jest równe $13,5\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

☐

Pole powierzchni całkowitej jest o 75 cm^2 większe od sumy pól powierzchni podstaw.

☐

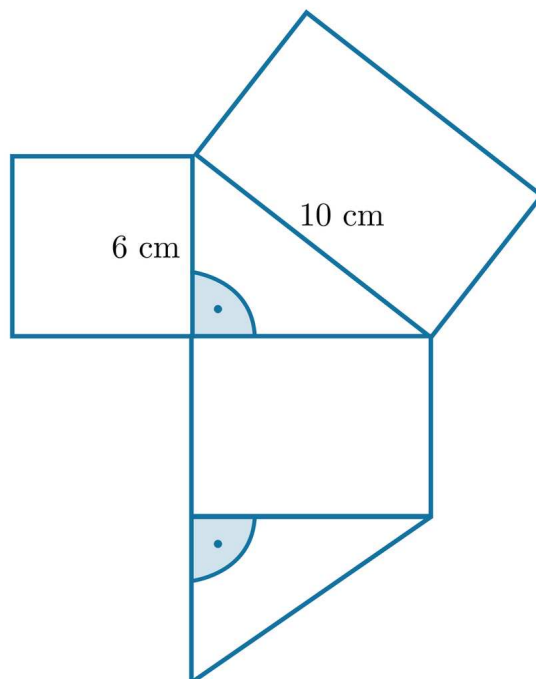
Krawędź boczna graniastoslupa jest nachylona do podstawy pod kątem 72° .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10

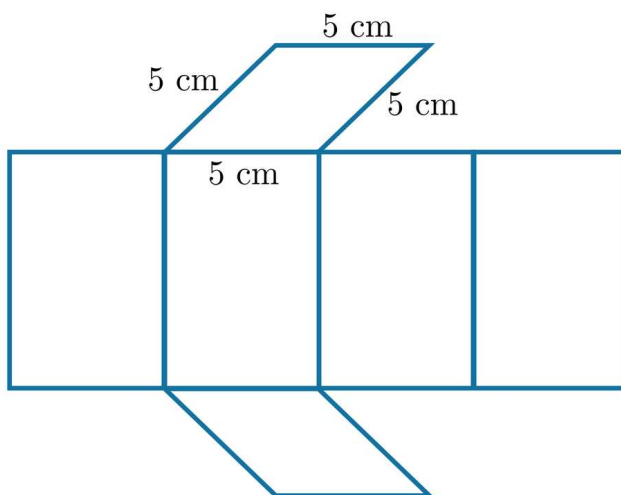
Siatki graniastosłupów prostych przedstawionych na poniższych ilustracjach składają się z odcinków, których suma długości jest równa 100 cm. Oblicz, jakie są długości wysokości tych graniastosłupów.

1



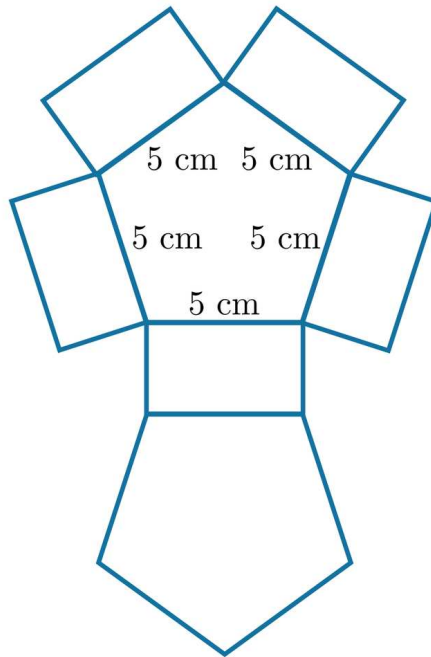
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.



- Wysokość graniastosłupa zbudowanego z pierwszej siatki wynosi cm.
- Wysokość graniastosłupa zbudowanego z drugiej siatki wynosi cm.
- Wysokość graniastosłupa zbudowanego z trzeciej siatki wynosi cm.

3 4 5 6 6 4

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Dany jest graniastosłup, którego podstawą jest trójkąt, w którym dwa kąty mają miary 30° i 60° , a najdłuższy bok ma długość 10 cm. Wysokość tego graniastosłupa jest równa 1,5 dm. Pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa wynosi cm^2 .

Dany jest graniastosłup, którego podstawą jest trapez prostokątny o wysokości 4 cm i podstawach długości 5 cm i 8 cm. Wysokość tego graniastosłupa stanowi 20% najdłuższego boku trapezu. Pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa wynosi cm^2 .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Podstawą graniastosłupa jest trapez równoramienny, w którym kąt ostry ma miarę 45° . Boki równoległe trapezu są równe 8 cm i 10 cm. Pole powierzchni całkowitej jest równe $24(6 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$. Ile wynosi wysokość graniastosłupa? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $h = \frac{258+45\sqrt{2}}{75} \text{ cm}$

☐ $h = \frac{363+45\sqrt{2}}{65} \text{ cm}$

☐ $h = \frac{543+45\sqrt{2}}{79} \text{ cm}$

☐ $h = \frac{453+45\sqrt{2}}{48} \text{ cm}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Podstawą graniastopuła jest prostokąt o obwodzie 20. Dwie ściany boczne są kwadratami, o polu 36 każda. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe, które wynikają z tych założeń.

☐ Pole podstawy jest mniejsze od pola powierzchni bocznej o 20.

☐ Pole powierzchni całkowitej jest równe 84.

☐ Pole podstawy graniastopuła jest większe od 20.

☐ Pole powierzchni bocznej jest równe 120.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastopuła, którego krawędź boczna ma długość 10 cm, a podstawa jest rombem o przekątnych długości 6 cm i 8 cm. Uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Pole powierzchni całkowitej wynosi cm^2 .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Wysokość graniastopuła jest równa 10 cm. Podstawą jest trapez równoramienny o bokach długości 5 cm, 3 cm, 2 cm, 2 cm. Uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Pole powierzchni bocznej tego graniastopuła wynosi cm^2 .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Przekątna ściany bocznej graniastostupa prawidłowego pięciokątnego ma długość $4\sqrt{10}$ i tworzy z krawędzią boczną kąt 60° . Ile wynosi pole powierzchni bocznej tego graniastostupa? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $40\sqrt{3}$

☐ $200\sqrt{3}$

☐ $100\sqrt{3}$

☐ $100\sqrt{30}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Podstawą graniastostupa prostego jest trójkąt równoramienny o bokach długości 5 cm, 5 cm i 6 cm. Przekątna największej ściany bocznej tworzy z krawędzią podstawy kąt 45° . Oblicz pole powierzchni tego graniastostupa. Uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Pole powierzchni całkowitej wynosi cm^2 .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Ściana boczna graniastostupa prawidłowego sześciokątnego jest kwadratem o przekątnej długości 8. Ile wynosi pole powierzchni całkowitej tego graniastostupa? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $48(\sqrt{3} + 4)$

☐ $56(\sqrt{3} + 5)$

☐ $84(\sqrt{3} + 2)$

☐ $96(\sqrt{3} + 2)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Suma długości wszystkich krawędzi każdego z dwóch graniastosłupów prawidłowych: trójkątnego oraz czworokątnego jest równa 36 cm. Wszystkie krawędzie mają jednakową długość. Który z tych graniastosłupów ma większe pole powierzchni całkowitej? Uzupełnij odpowiedź, przeciągając w lukę odpowiednie słowo lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Odpowiedź: Pole powierzchni graniastosłupa jest większe.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Betonowy blok ma kształt sześcianu o krawędzi długości 50 cm. W bloku wycięto otwór, tak jak na rysunku. Otwór ma kształt prostokąta, którego niektóre krawędzie mają długość 10 cm. Oblicz pole powierzchni pozostałej części bloku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Uzupełnij odpowiedź o otrzymaną wartość.

Odpowiedź: Pole powierzchni pozostałej części bloku wynosi cm².

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Dno basenu jest prostokątem o wymiarach 15 m i 10 m. Basen ma głębokość 3 m. Oblicz pole powierzchni całkowitej basenu. Uzupełnij odpowiedź, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej basenu wynosi m².

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 22



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

Jeśli wszystkie krawędzie prostopadłościanu zwiększymy dwukrotnie, to jego powierzchnia całkowita zwiększy się czterokrotnie.

☐

Pola powierzchni dwóch sześcianów są równe. Wynika z tego, że ich krawędzie też są równe.

☐

Jeśli wszystkie krawędzie prostopadłościanu zwiększymy dwukrotnie, to jego objętość zwiększy się czterokrotnie.

☐

Jeśli krawędzie jednego graniastopu są odpowiednio równe krawędziom drugiego graniastopu, to graniastopy te mają jednakowe pola powierzchni.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 23



Oceń prawdziwość poniższego wniosku.

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 10.

Wysokość graniastosłupa jest równa 0,5. Zatem pole jego powierzchni całkowitej wyraża się liczbą naturalną.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.