



Równoważne przekształcanie wyrażeń algebraicznych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równoważne przekształcanie wyrażeń algebraicznych

Źródło: [InspiredImages](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Przekształcanie wyrażeń algebraicznych to bardzo istotna umiejętność wykorzystywana w rozwiązywaniu równań, nierówności, czy badaniu własności funkcji. Na przestrzeni wieków matematycy stworzyli wiele tożsamości algebraicznych, pozwalających na szybsze wykonywanie przekształceń algebraicznych.

Niektóre z elementarnych „utytułowanych” tożsamości poznamy w tym materiale. Będziemy też sprowadzać wyrażenia algebraiczne do najprostszej postaci.

Twoje cele

- Sprowadzisz dane wyrażenie algebraiczne do najprostszej postaci.
- Zastosujesz wzory skróconego mnożenia w równoważnym przekształcaniu wyrażeń algebraicznych.
- Udowodnisz prawdziwość poznanych równości algebraicznych.

Przeczytaj

W tym materiale pokażemy, między innymi, kilka ciekawych równości algebraicznych, uzyskanych w wyniku [tożsamościowego przekształcania](#) wyrażeń algebraicznych.

Definicja: Przekształcenie tożsamościowe

Przekształcenie tożsamościowe, to takie przekształcenie wyrażenia algebraicznego, które daje w wyniku wyrażenie równe danemu.

Z reguły przekształcenia takie stosuje się w celu uproszczenia zapisu lub uzyskania postaci wyrażenia pożądanej w dalszych obliczeniach.

Pierwsza z tożsamości pochodzi z III w., ale została spopularyzowana dopiero przez indyjskiego matematyka i astronoma Brahmaputry w VI w. Do Europy przywędrowała w XIII w. wraz z pracami matematyka włoskiego Fibonacciego. Obecnie zwana jest więc tożsamością Brahmaputry – Fibonacciego. Tożsamość ta wywarła duży wpływ na rozwój różnych dziedzin matematyki, między innymi związanych z liczbami zespolonymi.

Przykład 1

Tożsamość Brahmaputry – Fibonacciego zamienia dwoma sposobami iloczyn sum dwóch kwadratów na sumę kwadratów dwóch wyrażeń.

Jeśli a, b, c, d są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, różnymi od zera, to

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

Udowodnimy pierwszą z tych równości.

Przekształcamy lewą stronę równości. Wykonujemy mnożenie

$$L = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

$$L = a^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot d^2 + b^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot d^2$$

Dodajemy i odejmujemy wyrażenie $2abcd$ i grupujemy odpowiednio wyrazy.

$$L = a^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot d^2 + b^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot d^2 + 2abcd - 2abcd$$

$$L = (a^2 \cdot c^2 - 2abcd + b^2 \cdot d^2) + (a^2 \cdot d^2 + b^2 \cdot c^2 + 2abcd)$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy i ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy.

$$L = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

$$L = P$$

Co kończy dowód.

Przykład 2

Zauważmy, że korzystając z tożsamości, zwanej wzorem skróconego mnożenia na kwadrat sumy, można szybko udowodnić, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych dodatnich jest liczbą nieparzystą.

Niech n będzie liczbą naturalną, wtedy:

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2$$

$$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

Dla każdej liczby naturalnej n liczba $2n + 1$ jest liczbą nieparzystą.

Przykład 3

Często w przekształceniach algebraicznych (np. w rozkładzie wielomianu na czynniki) wykorzystuje się wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

Udowodnimy teraz bardzo przydatną tożsamość, zwaną tożsamością Lagrange'a (od nazwiska jej twórcy, dziewiętnastowiecznego wybitnego matematyka włoskiego Josepha Lagrangea) wynikającą bezpośrednio z tego wzoru.

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

Przekształcamy lewą stronę równości. Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.

$$L = (a + b)^2 - (a - b)^2$$

$$L = (a + b - a + b)(a + b + a - b)$$

$$L = 2b \cdot 2a = 4ab$$

$$L = P$$

Co kończy dowód.

Przykład 4

Jedną z najznamienitszych kobiet w historii matematyki była francuska uczona Marie Sophie Germain (1776–1831). Podała ona tożsamość, za pomocą której można sumę $a^4 + 4b^4$, zamieniać na iloczyn.

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$

Wykażemy, że zapisana równość jest w istocie tożsamością.

Do lewej strony równości dodajemy i od lewej strony odejmujemy to samo wyrażenie.

$$L = a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2$$

$$L = (a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2) - 4a^2b^2$$

$$L = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2$$

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów.

$$L = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$

Przykład 5

Korzystając z tożsamości Sophie Germain, wykażemy, że liczba $A = n^4 + 4^n$, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1, jest złożona.

Rozpatrzmy dwa przypadki:

- Jeśli n jest liczbą parzystą, to oczywiście liczba $n^4 + 4^n$ jako suma dwóch liczb parzystych jest parzysta i większa od 2, zatem jest liczbą złożoną.
- Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to można ją zapisać w postaci $n = 2t + 1$ dla pewnej liczby naturalnej dodatniej t .

Zatem:

$$A = n^4 + 4^n = n^4 + 4^{2t+1} = n^4 + 4 \cdot 2^{4t}$$

Korzystamy z tożsamości Sophie Germain, podstawiając do tożsamości:

$$a = n, b = 2^t$$

Wtedy:

$$A = n^4 + 4^n = (n^2 + 2 \cdot 2^{2t} + 2 \cdot 2^t \cdot n)(n^2 + 2 \cdot 2^{2t} - 2 \cdot 2^t \cdot n)$$

$$A = n^4 + 4^n = (n^2 + 2^{2t+1} + 2^{t+1} \cdot n)(n^2 + 2^{2t+1} - 2^{t+1} \cdot n)$$

Zapisaaliśmy liczbę A w postaci iloczynu.

Zauważmy jeszcze, że

$$n^2 + 2^{2t+1} - 2^{t+1} \cdot n = (n - 2^t)^2 + 2^{2t} \geq 0 + 2^2 = 4$$

Wynika z tego, że liczbę A przedstawiliśmy w postaci iloczynu dwóch czynników, z których mniejszy jest większy od 1. Zatem liczba A jest złożona, co należało wykazać.

W ostatnim przykładzie przekształcimy równoważnie wyrażenia dodatnie.

Przykład 6

Niech liczby a i b będą liczbami dodatnimi takimi, że $\sqrt{a^2 + b} = \sqrt{a + b^2}$. Wykażemy, że $a = b$ lub $a + b = 1$.

Obie strony równości są dodatnie, więc możemy podnieść je do kwadratu, uzyskując równość równoważną.

$$\sqrt{a^2 + b} = \sqrt{a + b^2}$$

$$a^2 + b = a + b^2$$

Przekształcamy równość tak, aby lewą stronę równości zapisać w postaci iloczynu.

$$a^2 + b - a - b^2 = 0$$

$$(a^2 - b^2) - (a - b) = 0$$

$$(a - b)(a + b) - (a - b) = 0$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

Zapisujemy równość w postaci równoważnej alternatywy.

$$a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

lub

$$a + b - 1 = 0 \Rightarrow a + b = 1$$

Co należało wykazać.

Słownik

przekształcenie tożsamościowe

takie przekształcenie wyrażenia algebraicznego, które daje w wyniku wyrażenie równe danemu

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przekształcania wyrażeń algebraicznych przedstawionymi w animacji. Spróbuj najpierw rozwiązać samodzielnie pokazane tam przykłady, a następnie porównaj z rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D16YU84iS>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej przekształcania wyrażeń algebraicznych.

Polecenie 2

Zapisz wyrażenie $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$ w postaci iloczynu.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wyrażenie $(a + b)^2 + (a - b)^2$ to:

☐ $2(a^2 + b^2)$

☐ $2(a + b)(a - b)$

☐ $2(a^2 - b^2)$

☐ $(a + b)(a - b)$

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wyrażenie $(a + b)^4 - (a - b)^4$ przekształcone równoważnie to:

☐ $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$

☐ $8ab(a^2 + b^2)$

☐ $4(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$

☐ $4ab(a^2 - b^2)$

Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wyrażenie $a[2(a - b) - 2(a + b)] + 4ab$ przekształcone równoważnie jest równe:

☐ 0

☐ $-8ab$

☐ $-4ab$

☐ $8ab$

Ćwiczenie 4



Wskaż wszystkie równości, które są prawdziwe.

☐ $(a - b)(a - b) - (a + b)(a + b) = 4ab$

☐ $-a(a + b) = (a^2 - b^2) - (2a - b)(a + b)$

☐ $(a - b)(a + b)(a + b)(a - b) = a^4 - b^4$

☐ $a(a - b) + b(a - b) = a^2 - b^2$

Ćwiczenie 5



Niech a, b będą takimi liczbami całkowitymi, że $a - b = 3$ i $Aab + Ba + Cb + 9 = 0$. Znajdź liczby A, B, C i uzupełnij równości, wpisując odpowiednie liczby.

$A =$

$B =$

$C =$

Ćwiczenie 6



Uzupełnij każdą z tożsamości stopnia trzeciego, podanych przez matematyka włoskiego Lagrange'a. Przeciągnij odpowiednie wyrażenie.

$$(a+b)^3 + (a-b)^3 = \boxed{}$$
$$(a+b)^3 - (a-b)^3 = \boxed{}$$

$$2b(3a^2 + b^2)$$

$$2a(a^2 + 3b^2)$$

Ćwiczenie 7



Udowodnij drugą z wersji tożsamości Brahmaputry – Fibonacciego

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Ćwiczenie 8



Udowodnij tożsamość szwajcarskiego księgarza Jeana Arganda.

$$(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) = a^4 + a^2 + 1.$$

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równoważne przekształcanie wyrażeń algebraicznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$;
- 2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
- 3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sprowadza dane wyrażenie algebraiczne do najprostszej postaci
- stosuje wzory skróconego mnożenia w równoważnym przekształcaniu wyrażeń algebraicznych
- udowadnia prawdziwość poznanych równości algebraicznych
- dobiera argumenty do uzasadnienia poprawności rozwiązania problemu
- przeprowadza rozumowania, uzasadniające poprawność rozumowania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- 2-1
- wykres Ishikawy
- analiza morfologiczna

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą 2-1 (dwóch zadaje pytania, jeden odpowiada) powtarzają wiadomości na temat sposobów równoważnego przekształcania wyrażeń algebraicznych, również z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z materiałami z sekcji „Przeczytaj” oraz z animacją. Następnie analizują zależności przyczynowo – skutkowe w zadaniach pokazujących sposoby dowodzenia tożsamości algebraicznych i sporządzają wykres Ishikawy pokazujący te zależności.
2. Grupy prezentują swoje wykresy i wspólnie ustalają algorytm rozwiązywania zadań na przekształcanie wyrażeń algebraicznych i dowodzenie prostych tożsamości algebraicznych.
3. Ostatnim elementem tej części lekcji jest wspólne rozwiązywanie ćwiczeń interaktywnych 1-4 i analiza morfologiczna problemów związanych z samodzielnym tworzeniem tożsamości algebraicznych.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych 5 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Przekształcanie wyrażeń algebraicznych](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać na zajęciach pokazujących zastosowanie wzorów skróconego mnożenia lub w czasie zajęć poświęconych metodom dowodzenia twierdzeń.