



Dyskusja liczby rozwiązań równania kwadratowego zupełnego z parametrem

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Dyskusja liczby rozwiązań równania kwadratowego zupełnego z parametrem

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale zajmiemy się dyskusją liczby rozwiązań równania kwadratowego zupełnego z parametrem. Analiza ta będzie polegała na zbadaniu liczby rozwiązań równania w zależności od parametru, czyli na podaniu takich wartości, dla których równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, co najmniej jedno rozwiązanie, dla których jest sprzeczne lub kiedy ma dwa rozwiązania dodatnie, lub rozwiązania jednakowych znaków.

Twoje cele

- Zbadasz liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru występującego w równaniu.
- Znajdziesz wszystkie takie rzeczywiste parametru, aby rozwiązania równania spełniały określony warunek.

Przeczytaj

Przykład 1

Zbadamy, dla jakich wartości parametru m **równanie kwadratowe zupełne** $x^2 + (2m - 4)x + m^2 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Rozwiązanie

Aby równanie kwadratowe miało dokładnie jedno rozwiązanie, musi być spełniony warunek $\Delta = 0$.

Zauważmy, że:

$$a = 1, b = 2m - 4, c = m^2$$

Ponieważ: $\Delta = b^2 - 4ac$, to:

$$\Delta = (2m - 4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m^2 = 4m^2 - 16m + 16 - 4m^2 = -16m + 16$$

$\Delta = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy: $-16m + 16 = 0$. Zatem: $-16m = -16$, co daje: $m = 1$

Aby równanie miało jedno rozwiązanie $m = 1$.

Przykład 2

Zbadamy, dla jakich wartości parametru m równanie $\frac{1}{4}x^2 + 3mx + 3 \cdot (3m^2 - 1) = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

Rozwiązanie

Aby równanie kwadratowe miało co najmniej jedno rozwiązanie (tzn. jedno rozwiązanie lub dwa rozwiązania), musi być spełniony warunek $\Delta \geq 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac$, zatem:

$$\Delta = (3m)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3(3m^2 - 1) = 9m^2 - 9m^2 + 3 = 3$$

Oczywiście $3 \geq 0$ dla dowolnego $m \in \mathbb{R}$.

Równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie dla dowolnego $m \in \mathbb{R}$.

Przykład 3

Zbadamy, dla jakich wartości parametru k równanie $x^2 + 2kx + 1 = 0$ nie posiada rzeczywistych rozwiązań.

Rozwiązanie

Równanie nie posiada rozwiązań, jeżeli wyróżnik trójmianu kwadratowego, zwany deltą, przyjmuje ujemną wartość.

$$\Delta = (2k)^2 - 4 \cdot 1 = 4k^2 - 4$$

$$4 \cdot (k^2 - 1) < 0$$

$$k^2 - 1 < 0$$

$$(k - 1)(k + 1) < 0$$

$$k < 1 \text{ i } k > -1$$

Równanie nie posiada rozwiązań dla $k \in (-1, 1)$.

Przykład 4

Wyznamy takie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 - 2mx + m^2 - 2m = 0$ ma dwa pierwiastki jednakowych znaków.

Rozwiązanie

Aby równanie kwadratowe posiadało dwa pierwiastki jednakowych znaków muszą być spełnione następujące warunki:

$$\begin{cases} 1. \Delta \geq 0 \\ 2. x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$$

1. Wyróżnik trójmianu kwadratowego ma być liczbą nieujemną, ponieważ równanie może mieć „pierwiastek podwójny”.

$$\Delta = (-2m)^2 - 4 \cdot (m^2 - 2m) = 4m^2 - 4m^2 + 8m = 8m$$

$$8m \geq 0$$

$$m \geq 0$$

$$m \in \langle 0, +\infty \rangle$$

2. Teraz rozważymy warunek $x_1 \cdot x_2 > 0$

Z wzorów Viète'a wiemy, że $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$\text{Czyli } \frac{c}{a} > 0$$

$$m^2 - 2m > 0$$

$$m(m - 2) > 0$$

$$m < 0 \text{ lub } m > 2$$

$$m \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

Liczby m , muszą spełniać warunki 1 i 2.

Zatem $m \in (2, +\infty)$.

Przykład 5

Sprawdzimy, dla jakich wartości parametru m równanie

$2x^2 + 2mx + \frac{1}{2} \cdot (m^2 - 4m) = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste dodatnie.

Rozwiązanie

Warunki zadania:

$$\begin{cases} 1. \Delta > 0 \\ 2. x_1 + x_2 > 0 \\ 3. x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$$

$$1. \Delta = 4m^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (m^2 - 4m) = 4m^2 - 4m^2 + 16m = 16m$$

$\Delta > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy: $16m > 0$, zatem: $m > 0$

$$2. -\frac{b}{a} > 0$$

$$\frac{-2m}{2} > 0$$

$$m < 0$$

$$3. \frac{c}{a} > 0$$

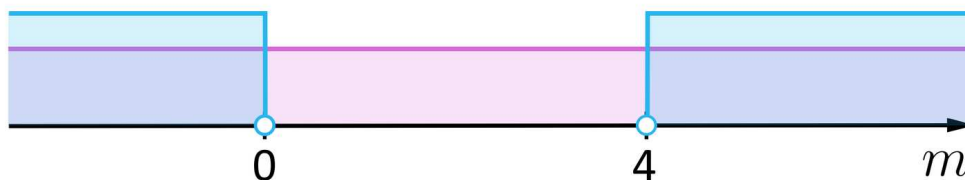
$$\frac{\frac{1}{2} \cdot (m^2 - 4m)}{2} > 0$$

$$m^2 - 4m > 0$$

$$m(m - 4) > 0$$

$$m < 0 \text{ lub } m > 4$$

Przedstawimy na osi liczbowej część wspólną warunków (1), (2), (3).



$$m \in \emptyset$$

Nie istnieje taka wartość parametru m , dla której równanie ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste dodatnie.

Słownik

równanie kwadratowe zupełne

równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$, dla $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem i przeanalizuj sposób przeprowadzenia dyskusji istnienia i liczby rozwiązań równania kwadratowego w zależności od parametru m oraz obliczania, dla jakich wartości parametru równanie kwadratowe ma dwa różne rozwiązania ujemne.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DaV2NklSe>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej liczby rozwiązań równania kwadratowego z parametrem.

Polecenie 2

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - mx + 6 - \frac{5}{4}m = 0$ ma dwa różne rozwiązania ujemne?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Aby równanie kwadratowe $x^2 - (m + 1)x + m - 3 = 0$ miało dokładnie jedno rozwiązanie musi być spełniony warunek:

☐ $-(m + 1)^2 - 4 \cdot (m - 3) = 0$

☐ $(m^2 + 1)^2 - 4 \cdot (m - 3) \geq 0$

☐ $(m + 1)^2 - 4 \cdot (m - 3) = 0$

☐ $(m + 1) - 4 \cdot (m - 3) = 0$

Ćwiczenie 2



Przenieś w wyznaczone miejsce odpowiedni znak nierówności.

Równanie $x^2 + (1 - 2m)x + m^2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania dla m $\frac{1}{4}$.

Ćwiczenie 3



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Aby równanie kwadratowe $mx^2 + (m + 2)x - 4 = 0$ miało co najmniej jedno rozwiązanie musi być spełniony warunek:

☐ $m^2 + 20m + 4 \geq 0$

☐ $(m + 10 - 4\sqrt{6})(m - 10 + 4\sqrt{6}) \geq 0$

☐ $m^2 + 20m + 4 > 0$

☐ $(m + 10 + 4\sqrt{6})(m + 10 - 4\sqrt{6}) \geq 0$

☐ $(m + 2)^2 + 16m \geq 0$

Ćwiczenie 4



Przeciągnij w wyznaczone miejsce odpowiedni znak.

Równanie $x^2 - 3px + 4 = 0$ z niewiadomą x nie posiada rozwiązań dla p $-\frac{4}{3}$
i p $\frac{4}{3}$.

Ćwiczenie 5



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe. Określ liczbę pierwiastków równania $2x^2 + 3kx + (k - 4) = 0$ w zależności od parametru k .

☐ Równanie nie posiada rzeczywistych rozwiązań dla $k \in \mathbb{R}$.

☐ Dla dowolnego $k \in \mathbb{R}$ równanie ma dwa różne pierwiastki.

☐ Równanie nigdy nie posiada jednego rozwiązania.

☐ Dla $k = 0$ równanie jest sprzeczne.

☐ Dla $k = 4$ równanie posiada dwa rozwiązania.

Ćwiczenie 6



Zaznacz poprawną odpowiedź. Dla jakich wartości parametru z rozwiązaniem równania $x^2 + zx + (z - 2) = 0$ są dwa pierwiastki różnych znaków?

☐ $z \in (-\infty, 2 - 2\sqrt{3})$

☐ $z \in (-\infty, 2 - 2\sqrt{3}) \cup (2 + 2\sqrt{3}, \infty)$

☐ $z \in (2, +\infty)$

☐ $z \in (-\infty, 2)$

Ćwiczenie 7



Przenieś w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

Aby rozwiązaniem równania $3x^2 + 2mx + (m - 1) = 0$ z niewiadomą x były dwa różne pierwiastki rzeczywiste ujemne musi zachodzić warunek:

$$m \in (\text{ } , \infty)$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$-1$$

$$0$$

$$1$$

Ćwiczenie 8



Wyznacz takie wartości parametru m , dla których różne pierwiastki $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ równania $-2x^2 + (m - 2)x - 1 = 0$ spełniają warunek $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 0$.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dyskusja liczby rozwiązań równania kwadratowego zupełnego z parametrem

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- bada liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru występującego w równaniu
- przeprowadza rozumowania związane z analizą równania kwadratowego zupełnego z parametrem, formułuje wnioski i uzasadnia ich poprawność

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- śnieżna kula
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości i umiejętności związane ze sposobami rozwiązywania równań kwadratowych.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą śnieżnej kuli. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami dotyczącymi sposobów rozwiązywania równania kwadratowego niepełnego z parametrem, które przypomnieli w domu. Następnie łączą się w grupy 4 osobowe omawiają przykłady z sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie oglądają animację i analizują liczbę rozwiązań równania kwadratowego pełnego z parametrem.
3. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują Przykład 2 umieszczony pod animacją.

Materiały pomocnicze:

[Równanie kwadratowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Przykłady zawarte w animacji uczniowie mogą przeanalizować w czasie zajęć podsumowujących rozwiązywanie równań różnego typu z parametrem.