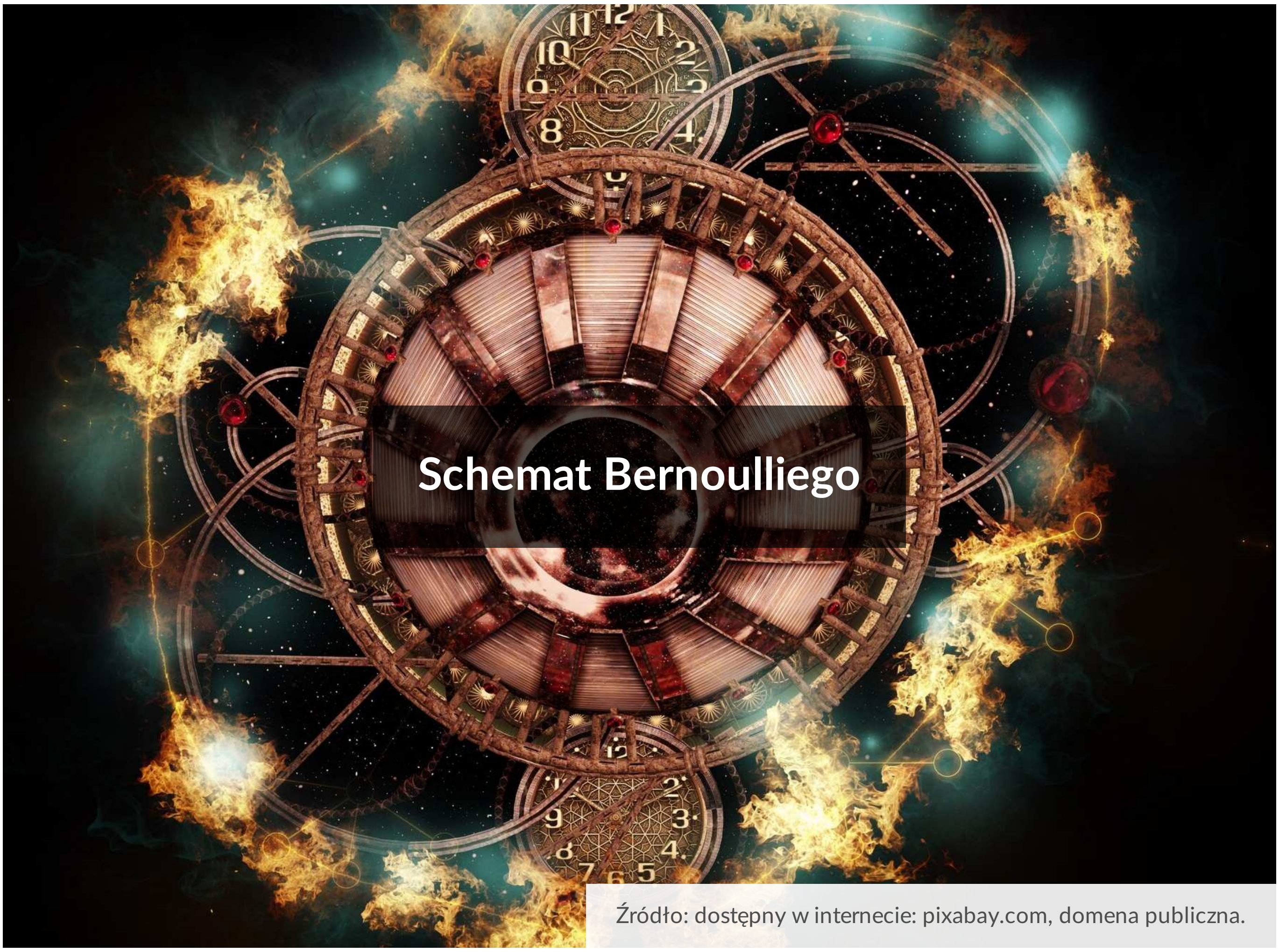
Schemat Bernoulliego

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Większość odkryć z fizyki czy z chemii opiera się na obserwacjach wielokrotnie powtarzanych prób, stawianiu śmiałych hipotez i ich sprawdzaniu w konkretnych sytuacjach. Matematycy i filozofowie zwykle wymyślali problemy, a następnie próbowali dopasować istniejący zasób wiedzy do ich rozwiązania. Jeśli to nie skutkowało, tworzyli swoje teorie.

Sławny ród Bernoullich, z których to wywodzi się Jakub Bernoulli, którego twierdzenie poznamy w tym materiale, wykorzystał obie możliwości. Ponieważ spędzał od czasu do czasu wieczory na grze w karty lub w kości, więc żywotnie interesował się opracowaniem strategii gry pozwalającej na wygraną, a choćby znalezienie reguły, która pozwoli oszacować szansę na wygraną. W ten sposób powstało wiele z jego prac, będących wkładem do rozwijającego się w szybkim tempie rachunku prawdopodobieństwa.

Rzecz działa się w osiemnastym wieku, ale podany przez Bernoulliego wzór nie zdezaktualizował się i stanowi nadal jeden z elementarnych wzorów rachunku prawdopodobieństwa.

> **Twoje cele**
>
> - Wyodrębnisz wśród innych doświadczeń losowych próby Bernoulliego.

- Zastosujesz wzór Bernoulliego, wyznaczając prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach wieloetapowych.
- Określisz najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego.

Przeczytaj

Próba Bernoulliego

Wśród doświadczeń losowych wieloetapowych ważne miejsce zajmują doświadczenia, w których możliwe są tylko dwa wyniki. Nazywamy je wtedy **próbą Bernoulliego** (w skrócie **próbą**). Jeden z wyników próby nazywamy **sukcesem**, a drugi **porażką**.

Przykłady prób:

- rzut monetą – możliwe są dwa wyniki: orzeł i reszka,
- kupno losu na loterii – możliwe są dwa wyniki: los wygrany i los przegrany.

Powtarzania próby nazywamy **niezależnymi**, gdy pojawienie się wyniku w jednej z prób nie zmienia prawdopodobieństwa pojawienia się wyniku w następnych próbach.

Przykładem jest rzut monetą. Sukcesem nazwiemy wypadnięcie orła, a porażką wypadnięcie reszki. Wypadnięcie orła za pierwszym razem nie wpłynie na prawdopodobieństwo wypadnięcia orła za drugim, trzecim, ..., n–tym razem. Rzuty monetą (czyli powtórzenia próby) są niezależne.

Przykładem **zależnych** powtórzeń próby jest losowanie kul z urny bez zwracania.

Schemat Bernoulliego

Schematem n prób Bernoulliego (n – liczba naturalna dodatnia) nazywamy ciąg złożony z n niezależnych powtórzeń tej samej próby Bernoulliego w tych samych warunkach.

W schemacie Bernoulliego ciąg doświadczeń losowych spełnia więc następujące warunki:

- doświadczenia są niezależne,
- każde z doświadczeń może skończyć się tylko na dwa sposoby – sukcesem lub porażką,
- prawdopodobieństwo sukcesu jest w każdym doświadczeniu takie samo.

Przykłady schematów Bernoulliego:

- n – krotny rzut kostką,
- 100 – krotne strzelanie do celu,
- 500 – krotny rzut monetą.

Wzór Bernoulliego

Liczbę sukcesów w n próbach Bernoulliego oznaczamy S_n. Zdarzenie losowe polegające na otrzymaniu w n próbach Bernoulliego dokładnie k sukcesów $(k \in \{0, 1,\ 2,\ \ldots,\ n\})$ zapisujemy:

$$S_n = k$$

a prawdopodobieństwo tego zdarzenia:

$$P(S_n = k)$$

Wzór, który pozwala na obliczanie prawdopodobieństwa wystąpienia k sukcesów w danej próbie (bez względu na ilość jej powtórzeń), sformułował na początku osiemnastego wieku matematyk szwajcarski Jakub Bernoulli.

Twierdzenie: Wzór Bernoulliego

Prawdopodobieństwo, że w n – próbach Bernoulliego sukces wypadnie k razy wyraża się wzorem:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

gdzie:
p – prawdopodobieństwo sukcesu,
$q = 1 - p$ – prawdopodobieństwo porażki w jednej próbie,
$0 < p < 1$ i $k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.,\ n\}$.

Przykład 1

Rzucamy pięć razy kostką do gry. Obliczymy prawdopodobieństwo, że liczba oczek równa 1 wypadnie dwa razy.

Sukcesem w takim rzucie jest wypadnięcie liczby oczek równej 1. Prawdopodobieństwo sukcesu to $p = \frac{1}{6}$.

Porażką jest wypadnięcie liczby oczek innej niż 1. Prawdopodobieństwo porażki to $q = \frac{5}{6}$.

Doświadczenie polega na wykonaniu 5 prób, czyli $n = 5$. Chcemy, aby liczba oczek równa 1 wypadła dwa razy, zatem $k = 2$.

Korzystamy ze wzoru Bernoulliego.

$P(S_5 = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-2}$

$P(S_5 = 2) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{125}{216}$

$P(S_5 = 2) = \frac{625}{3888}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo, że liczba oczek równa 1 wypadnie dwa razy jest równe $\frac{625}{3888}$.

Przykład 2

Rzucono osiem razy monetą.
Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A – wyrzucono co najmniej jednego orła.

Skorzystamy ze wzoru Bernoulliego, ale obliczymy najpierw prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego – nie wyrzucono ani jednego orła.

$$P(A') = \binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

Zatem

$$P(A) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej jednego orła jest równe $\frac{255}{256}$.

Przykład 3

Władysław gra z równorzędnym przeciwnikiem w szachy. Co jest bardziej prawdopodobne: wygranie przez Władysława dwóch partii z czterech czy pięciu partii z ośmiu?

Mamy do czynienia ze schematem Bernoulliego.

W pierwszym przypadku: $n = 4, k = 2, p = q = \frac{1}{2}$.

$$P(S_4 = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

W drugim przypadku: $n = 8, k = 5, p = q = \frac{1}{2}$.

$$P(S_8 = 5) = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 56 \cdot \frac{1}{256} = \frac{7}{32}$$

Ponieważ

$$\frac{3}{8} = \frac{12}{32} > \frac{7}{32}$$

> Więc bardziej prawdopodobne jest, że Władysław wygra dwie partie z czterech, niż pięć z ośmiu.

> **Przykład 4**
>
> W urnie znajduje się 5 kul białych i 2 czarne. Z urny losujemy 5 razy po dwie kule, które za każdym razem wkładamy ponownie do urny. Obliczymy jakie jest prawdopodobieństwo, że 3 razy otrzymamy parę kul różnego koloru.
>
> Zauważmy, że za każdym razem kule zwracamy z powrotem do urny, zatem kolejne doświadczenia są od siebie niezależne.
>
> Każde z doświadczeń może skończyć się sukcesem – wylosowanie kul różnego koloru lub porażką – wylosowanie dwóch kul tego samego koloru (białych lub czarnych).
>
> Prawdopodobieństwo sukcesu za każdym razem jest takie samo (liczba kul w urnie nie zmienia się w kolejnych losowaniach).
>
> Możemy więc w obliczeniach stosować wzór Bernoulliego, gdzie $n = 5$, $k = 3$.
>
> Obliczmy prawdopodobieństwo sukcesu.
>
> $$p = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{10}{21}$$
>
> Zatem prawdopodobieństwo porażki jest równe: $q = 1 - \frac{10}{21} = \frac{11}{21}$.
>
> $$P(S_5 = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{10}{21}\right)^3 \cdot \left(\frac{11}{21}\right)^2$$
>
> $$P(S_5 = 3) = \frac{121}{21} \cdot \left(\frac{10}{21}\right)^4 \approx 0,3$$
>
> Odpowiedź:
>
> Prawdopodobieństwo, że 3 razy otrzymamy parę kul różnego koloru wynosi w przybliżeniu $0,3$.

Najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego

Utożsamiając prawdopodobieństwo z częstością, zakładamy intuicyjnie, że na przykład w serii 100 rzutów monetą najbardziej prawdopodobne jest uzyskanie 50 orłów. W praktyce również pojawia się wiele problemów, których rozwiązanie wymaga oszacowania przewidywanych strat lub zysków. Aby nie wysnuwać wniosków „na oko”, możemy skorzystać w niektórych sytuacjach z odpowiedniego twierdzenia.

Zakładamy, że w schemacie Bernoulliego o n próbach prawdopodobieństwo sukcesu $p \neq 1$ i $p \neq 0$.

Twierdzenie: Najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego

- Jeśli $(n+1)p$ nie jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego jest największą liczbą całkowitą k_0 taką, że $k_0 < (n+1)p$.
- Jeśli $(n+1)p$ jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobne są wartości $(n+1)p - 1$ oraz $(n+1)p$ i prawdopodobieństwa ich są równe.

Przykład 5

Strzelec trafia do celu z prawdopodobieństwem $0,8$. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba trafień w serii składającej się z 20 strzałów?

Liczba prób: $n = 20$.

Prawdopodobieństwo trafienia: $p = 0,8$.

Obliczamy $(n+1)p$.

$(20+1) \cdot 0,8 = 16,8$

Otrzymany wynik nie jest liczbą całkowitą, zatem najbardziej prawdopodobną liczbą trafień jest największa liczba całkowita, mniejsza od $16,8$, czyli 16.

Odpowiedź:

Najbardziej prawdopodobna liczba trafień w serii składającej się z 20 strzałów jest równa 16.

Przykład 6

Waldemar trafia piłką do bramki z prawdopodobieństwem $\frac{2}{5}$. Obliczymy, ile powinien wykonać strzałów, aby najbardziej prawdopodobna liczba uzyskanych bramek była równa 13.

Oznaczmy przez n szukaną liczbę strzałów.

Na podstawie twierdzenia o najbardziej prawdopodobnej liczbie sukcesów w schemacie Bernoulliego stwierdzamy, że

$(n+1) \cdot \frac{2}{5} - 1 < 13 < (n+1) \cdot \frac{2}{5}$

Zapisujemy nierówność podwójną w postaci koniunkcji nierówności.

$(n+1)\cdot\frac{2}{5}-1<13$ i $13<(n+1)\cdot\frac{2}{5}$

Przekształcamy te nierówności, mnożąc obie strony każdej z nich przez 5 i wykonując wskazane działania.

$(n+1)\cdot 2-5<65$ i $65<(n+1)\cdot 2$

$2n-3<65$ i $65<2n+2$

$2n<68$ i $63<2n$

$n<34$ i $31,5<n$

Stąd

$31,5<n<34.$

Ponieważ n jest liczbą naturalną, zatem $n=32$ lub $n=33$.

Odpowiedź:

Aby najbardziej prawdopodobna liczba uzyskanych bramek była równa 13, Waldemar musi strzelić do bramki 32 lub 33 razy.

Słownik

wzór Bernoulliego

prawdopodobieństwo, że w n – próbach Bernoulliego sukces wypadnie k razy wyraża się wzorem:

$$P(S_n=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

gdzie:
p – prawdopodobieństwo sukcesu,
$q=1-p$ – prawdopodobieństwo porażki w jednej próbie,
$0<p<1$ i $k\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem, który przybliży Ci zagadnienia związane ze wzorem Bernoulliego. Postaraj się najpierw samodzielnie rozwiązać prezentowane tam problemy, a następnie porównaj z zamieszczonymi w filmie.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DYrebvNac

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej schematu Bernoulliego.

Polecenie 2

Rzucamy 6 razy dwiema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo, że co najmniej 5 razy wyrzucimy dwie reszki.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Iloma kostkami do gry należy jednocześnie rzucić, aby prawdopodobieństwo otrzymania na co najmniej jednej kostce liczby oczek równej sześć było większe od $\frac{1}{6}$?

Ćwiczenie 8

W skrzynce jest 50 owoców. Są tam jabłka i gruszki. Najbardziej prawdopodobna liczba gruszek to 40. Ze skrzynki wyciągamy w sposób losowy jeden owoc. Oszacuj prawdopodobieństwo wyciagnięcia gruszki.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Schemat Bernoulliego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyodrębnia wśród innych doświadczeń losowych próby Bernoulliego
- stosuje wzór Bernoulliego, wyznaczając prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach wieloetapowych
- określa najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- skaczące żabki
- tor przeszkód

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą „skaczące żabki" przypominają wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa. Przypominanie rozpoczyna uczeń wybrany losowo i formułuje jedną informację (definicję, twierdzenie, itp.) związaną z rozwiązywaniem problemów probabilistycznych. Następnie wskazuje inną osobę, która podaje następną informację, itd. Przy czym uczniowie starają się, aby podawać wiadomości w miarę chronologicznym porządku tak, aby wiązały się z sobą i stopniowo poszerzały obszary treściowe.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach. Zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj" i filmem samouczkiem.
2. Analizując przedstawione tam przykłady, tworzą w grupach „tory przeszkód" – plansze na których zaznaczają, jakie trudności należy kolejno przezwyciężyć, aby rozwiązać zadania z zastosowaniem schematu Bernouliiego.
3. Po jednej stronie „toru" zapisują przeszkody (np. ustalenie prawdopodobieństwa danego zdarzenia w jednej próbie), po drugiej stronie wskazówki, jak ominąć przeszkody (czyli w tym wypadku jak znaleźć prawdopodobieństwo danego zdarzenia w jednej próbie).
4. Zakończeniem tej części pracy jest prezentacja „torów" i wspólne wybranie jednego modelu, który będzie pomocą przy rozwiązywaniu ćwiczeń interaktywnych, które to w dalszej części lekcji rozwiązują uczniowie w parach.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
   Dyskusja – czy graficzne zobrazowanie problemów związanych z rozwiązywaniem zadań na schemat Bernoulliego pomogło w dalszej części pracy, czy może nie.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest poszukanie informacji na temat rodu Bernoullich i ich odkryć matematycznych związanych z rachunkiem prawdopodobieństwa.

Materiały pomocnicze:

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa (treść rozszerzona)

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek może być doskonałą pomocą na zajęciach podsumowujących wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa.