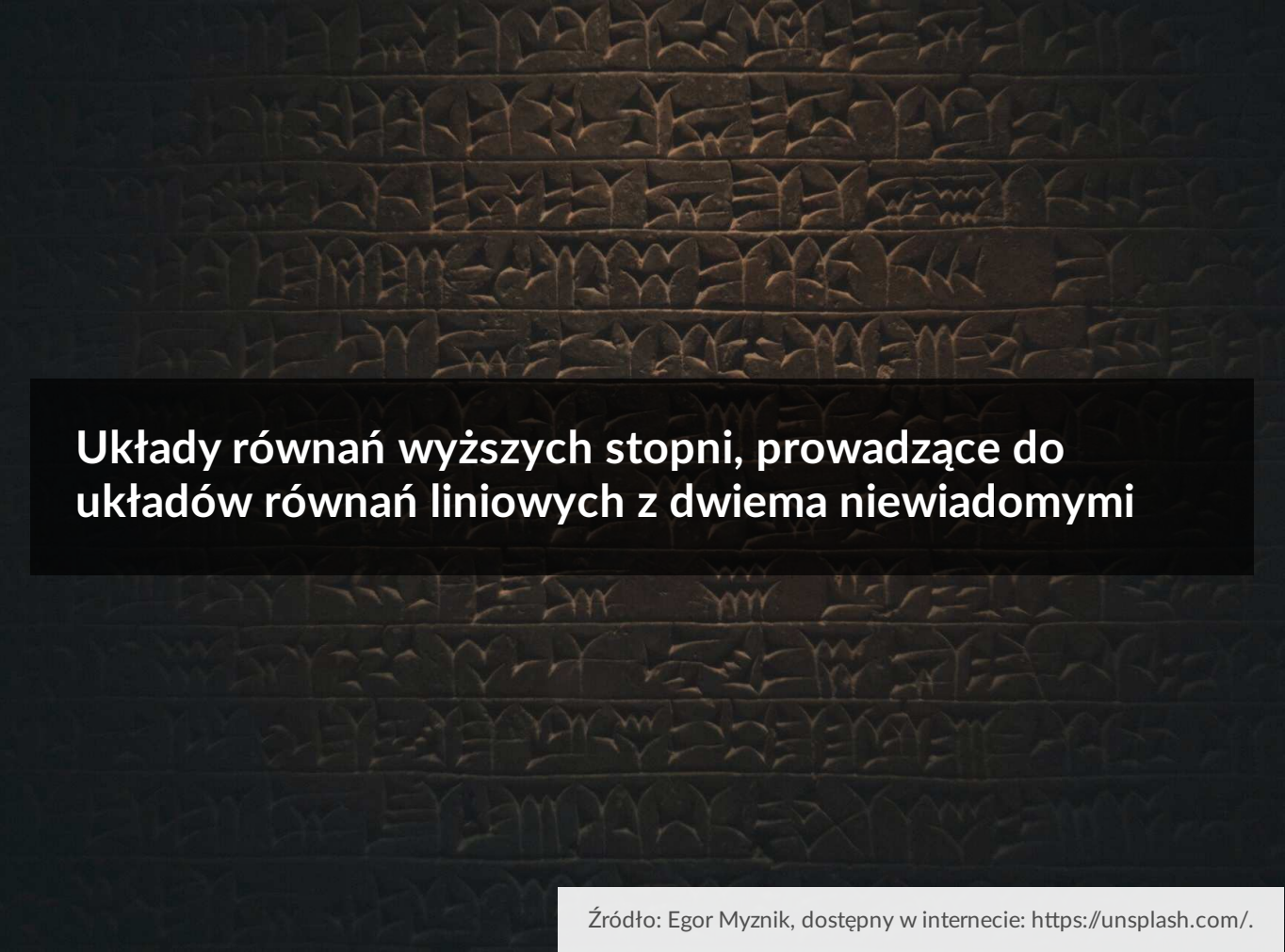




Układy równań wyższych stopni, prowadzące do układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Układy równań wyższych stopni, prowadzące do układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Źródło: Egor Myznik, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

W równaniach z dwiema niewiadomymi, niewiadome mogą występować w dowolnej potęgze. Jeśli w układzie równań pojawi się przynajmniej jedno równanie, w którym przynajmniej jedna niewiadoma jest co najmniej drugiego stopnia, to mówimy wówczas o układach równań wyższych stopni. W tym materiale zajmiemy się takimi układami równań wyższych stopni, które prowadzą do układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi. Oczywiście każdy może samodzielnie zdecydować, którą metodę rozwiązywania układu równań liniowych stosować. W tym materiale przypomnimy wszystkie trzy metody. Pamiętaj, że znajomość metody wyznacznikowej nie jest obowiązkowa.

Twoje cele

- Utrwalisz metody rozwiązywania układów równań liniowych.
- Utrwalisz zasady wykorzystywania wzorów skróconego mnożenia do zapisywania równań w postaci iloczynowej.
- Rozwiążesz układ równań wyższych stopni, prowadzący do układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi.

Przeczytaj

Przypomnijmy najpierw definicję układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi.

Definicja: Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Układem równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy koniunkcję dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Układ taki przyjmuje postać

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

gdzie:

x oraz y – oznaczają niewiadome,

a_1, a_2, b_1 oraz b_2 – współczynniki przy niewiadomych odpowiednio x oraz y , przy czym przynajmniej jedna z pary liczb a_1 i a_2 oraz b_1 i b_2 jest różna od zera,

c_1 i c_2 – nazywamy wyrazami wolnymi.

Aby rozwiązać układ równań liniowych

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

możemy zastosować jedną z metod:

- metodę podstawiania;
- metodę przeciwnych współczynników;
- metodę wyznacznikową.

Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania polega na:

- wyznaczeniu dowolnej niewiadomej z dowolnego równania,
- podstawieniu tak uzyskanego wyrażenia do drugiego z równań w miejsce wyznaczonej niewiadomej,
- rozwiązaniu otrzymanego równania z jedną niewiadomą,
- podstawieniu otrzymanej wartości niewiadomej do pierwszego równania.

Metoda przeciwnych współczynników polega na pomnożeniu obu stron jednego lub każdego równania przez dowolną liczbę różną od zera, tak aby przy jednej z niewiadomych

otrzymać przeciwne współczynniki, dzięki czemu po dodaniu do siebie równań stronami można obliczyć jedną z niewiadomych.

Aby rozwiązać układ równań metodą wyznacznikową, musimy obliczyć trzy liczby:

- wyznacznik główny W – utworzony ze współczynników znajdujących się przy niewiadomych x i y

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

- wyznacznik niewiadomej x oznaczany W_x – utworzony poprzez zastąpienie w wyznaczniku głównym kolumny współczynników przy niewiadomej x kolumną wyrazów wolnych

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1$$

- wyznacznik niewiadomej y oznaczany W_y – utworzony poprzez zastąpienie w wyznaczniku głównym kolumny współczynników przy niewiadomej y kolumną wyrazów wolnych

$$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$$

Jeśli **wyznacznik** główny $W \neq 0$, to taki układ równań nazywamy układem Cramera.

Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie (jest oznaczony), które możemy wyznaczyć za pomocą wzorów Cramera

$$x = \frac{W_x}{W} \text{ i } y = \frac{W_y}{W}$$

Przykład 1

Rozwiążemy układ równań
$$\begin{cases} (2+y)^2 - (3x-1)^2 = (y-3x)(y+3x) \\ (x+y)^2 - 2xy = (x-1)^2 + (y+3)^2 \end{cases}.$$

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, doprowadzamy układ równań do postaci

$$\begin{cases} 4 + 4y + y^2 - 9x^2 + 6x - 1 = y^2 - 9x^2 \\ x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 \end{cases}$$

Następnie, redukując wyrazy podobne, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 6x + 4y = -3 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

Jest to **układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi**. Jego rozwiązanie możemy znaleźć, stosując metodę wyznacznikową.

Obliczamy wyznacznik główny.

$$W = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 4 = -22$$

Obliczamy wyznacznik niewiadomej x .

$$W_x = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 20 = -11$$

Obliczamy **wyznacznik** niewiadomej y .

$$W_y = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 3 = 33$$

Korzystając ze wzorów Cramera

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} \\ y = \frac{W_y}{W} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-11}{-22} \\ y = \frac{33}{-22} \end{cases}$$

Obliczamy wartości niewiadomych.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

A zatem rozwiązaniem tego układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$.

Przykład 2

Rozwiążemy układ równań
$$\begin{cases} x^2 + 7xy + 9y^2 = xy \\ 5x^2 + 2(y + 0,5) = 5(3 - x)^2 \end{cases}$$

Doprowadzamy układ równań do najprostszej postaci.

W pierwszym równaniu odejmujemy wyrażenie xy od obu stron równania.

W drugim równaniu stosujemy wzór skróconego mnożenia i mnożymy sumy algebraiczne przez liczbę, opuszczając w ten sposób nawiasy.

$$\begin{cases} x^2 + 6xy + 9y^2 = 0 \\ 5x^2 + 2y + 1 = 45 - 30x + 5x^2 \end{cases}$$

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia, pierwsze z równań możemy zapisać w postaci $(x + 3y)^2 = 0$.

W drugim równaniu redukuje wyrazy podobne.

$$\begin{cases} (x + 3y)^2 = 0 \\ 30x + 2y = 44 \end{cases}$$

A zatem jest to układ równań liniowych:

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 30x + 2y = 44 \end{cases}$$

Rozwiążmy ten układ równań liniowych [metodą przeciwnych współczynników](#).

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez (-30) .

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \mid \cdot (-30) \\ 30x + 2y = 44 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami, następnie obliczamy wartość niewiadomej y :

$$+ \begin{cases} -30x - 90y = 0 \\ 30x + 2y = 44 \\ \hline -88y = 44 \end{cases}$$

$$y = -0,5$$

Podstawimy otrzymaną wartość y do równania $x + 3y = 0$ i obliczamy wartość niewiadomej x .

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ y = -0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1,5 \\ y = -0,5 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 1,5 \\ y = -0,5 \end{cases}$.

Przykład 3

Rozwiążemy układ równań (1) $\begin{cases} (x - y)(2x + y) = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$.

Pierwsze równanie to iloczyn sum algebraicznych.

Wiemy, że $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

Więc powyższy układ równań możemy zapisać w postaci

$$\begin{cases} x - y = 0 \vee 2x + y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

A zatem układ równań (1) jest równoważny alternatywie dwóch układów równań liniowych.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

Każdy z tych układów możemy rozwiązać np. [metodą podstawiania](#).

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

Wyznaczamy niewiadomą y z drugiego równania.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 5 - 3x \end{cases} \vee \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y = 5 - 3x \end{cases}$$

Podstawiamy wyznaczone wyrażenie do pierwszego równania w miejsce niewiadomej y i obliczamy wartość niewiadomej x .

$$\begin{cases} x - (5 - 3x) = 0 \\ y = 5 - 3x \end{cases} \vee \begin{cases} 2x + 5 - 3x = 0 \\ y = 5 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 5 + 3x = 0 \\ y = 5 - 3x \end{cases} \vee \begin{cases} -x = -5 \\ y = 5 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = 5 \\ y = 5 - 3x \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = 5 - 3x \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 - 3x \end{cases}$$

Podstawiając obliczoną wartość x do drugiego równania, obliczamy niewiadomą y .

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = 5 - 3 \cdot \frac{5}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 - 3 \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{5}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ y = -10 \end{cases}$$

A zatem rozwiązaniem układu równań (1) są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{5}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ y = -10 \end{cases}$$

Przykład 4

Rozwiążemy układ równań (2) $\begin{cases} 16x^2 - 9y^2 = 0 \\ x^2y + 10xy + 25y = 0 \end{cases}$.

Korzystając ze [wzorów skróconego mnożenia](#), możemy zapisać układ (2) w postaci

$$\begin{cases} (4x - 3y)(4x + 3y) = 0 \\ y(x^2 + 10x + 25) = 0 \end{cases}$$

A następnie:

$$\begin{cases} (4x - 3y)(4x + 3y) = 0 \\ y(x + 5)^2 = 0 \end{cases}$$

Korzystając ponownie z twierdzenia $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$, otrzymujemy alternatywę czterech układów równań liniowych równoważną danemu układowi (2).

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ (x + 5)^2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ (x + 5)^2 = 0 \end{cases}$$

Każdy z tych układów równań rozwiążemy dowolną metodą.

Pierwszy układ równań:

$$\begin{cases} 4x - 0 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Drugi układ równań:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -20 - 3y = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = -\frac{20}{3} \end{cases}$$

Trzeci układ równań:

$$\begin{cases} 4x + 0 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Czwarty układ równań:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ x + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -20 + 3y = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{20}{3} \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań (2) są trzy pary liczb:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -5 \\ y = -6\frac{2}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -5 \\ y = 6\frac{2}{3} \end{cases}$$

Przykład 5

Rozwiążemy układ równań (3) $\begin{cases} 6x^2 + y^2 = 8 \\ -2x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases}$.

Aby rozwiązać taki układ równań, możemy skorzystać z podstawienia $\begin{cases} x^2 = a \\ y^2 = b \end{cases}$.

A zatem liczby a oraz b muszą być nieujemne.

Układ równań (3) przyjmuje wtedy postać

$$\begin{cases} 6a + b = 8 \\ -2a + 3b = 4 \end{cases}$$

Taki układ równań liniowych możemy rozwiązać metodą wyznacznikową.

$$W = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 2 = 20$$

$$W_a = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20$$

$$W_b = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 16 = 40$$

A więc
$$\begin{cases} a = \frac{W_a}{W} = \frac{20}{20} = 1 \\ b = \frac{W_b}{W} = \frac{40}{20} = 2 \end{cases}$$

A zatem
$$\begin{cases} x^2 = a = 1 \\ y^2 = b = 2 \end{cases}$$

Stąd
$$\begin{cases} x = -1 \vee x = 1 \\ y = -\sqrt{2} \vee y = \sqrt{2} \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań (3) są zatem cztery pary liczb:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Słownik

wzory skróconego mnożenia

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

układ równań liniowych postaci:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

przy czym liczby odpowiednio a_1 i a_2 oraz b_1 i b_2 nie mogą być jednocześnie zerami

metoda podstawiania

metoda polegająca na wyznaczeniu dowolnej niewiadomej z dowolnego równania i podstawieniu tak uzyskanego wyrażenia do drugiego z równań w miejsce wyznaczonej niewiadomej

metoda przeciwnych współczynników

metoda polegająca na pomnożeniu obu stron jednego lub każdego równania przez dowolną liczbę różną od zera, tak aby przy jednej z niewiadomych otrzymać przeciwne

współczynniki, dzięki czemu po dodaniu do siebie równań stronami można obliczyć jedną z niewiadomych

wyznacznik

liczba postaci:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z kolejnymi przykładami układów równań prowadzącymi do układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi. Następnie rozwiąż samodzielnie układy równań podane w Poleceniu 2.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DlWKvSSxF>

Film nawiązujący do treści materiału na temat układów równań wyższych stopni prowadzących do układów równań liniowych z 2 niewiadomymi.

Polecenie 2

Rozwiąż układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} 9x^2 - 6xy + y^2 = 0 \\ 2xy + 6y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 - 64y^2 = 0 \\ 3xy - 9x = -6x^2 \end{cases}$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż układ równań liniowych, który otrzymamy po doprowadzeniu do najprostszej postaci

układu równań
$$\begin{cases} (3x - y)^2 - (2 + y)^2 = 3(3x^2 - 3x - 2xy) \\ 4x(x - 1) - 3y(3y - 1) = 2 + (2x - 3y)(2x + 3y) \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} -9x + 4y = -4 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} 9x - 4y = 2 \\ 4x - 3y = 4 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} 9x - 4y = 2 \\ -4x - 3y = 4 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} -9x + 4y = 4 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}$$

Ćwiczenie 2



Przeciągnij układ równań równoważny danemu układowi równań.

$$\begin{aligned} & \text{„}\{ \text{„} (x+2)^2 + (y-1)^2 = (x-y)(x+y) + 2(y^2-3) \text{„„} \\ & \quad (2x-1)^2 - (3-2x)^2 = 4+y \\ & \text{„}\{ \text{„} (2x+y)^2 - (2x-y)^2 = 8x(y+5) + 20y \text{„„} \\ & \quad (5-y)^2 - (y-4)^2 = 12-x \\ & \text{„}\{ \text{„} \quad 4(x-y) + x^2 = (x-1)^2 + 2y \quad \text{„„} \\ & \quad (y+3)^2 - 2(y^2+x) = 4y - (3x+y^2-10) \end{aligned}$$

Układ równań	Równoważny układ równań
$\text{„}\{ \text{„} (x+2)^2 + (y-1)^2 = (x-y)(x+y) + 2(y^2-3) \text{„„}$ $(2x-1)^2 - (3-2x)^2 = 4+y$	
$\text{„}\{ \text{„} (2x+y)^2 - (2x-y)^2 = 8x(y+5) + 20y \text{„„}$ $(5-y)^2 - (y-4)^2 = 12-x$	
$\text{„}\{ \text{„} \quad 4(x-y) + x^2 = (x-1)^2 + 2y \quad \text{„„}$ $(y+3)^2 - 2(y^2+x) = 4y - (3x+y^2-10)$	

Ćwiczenie 3



Zaznacz pary liczb, które **nie** są rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} (3x - y)(x + y) = 0 \\ 5x - 10y = 15 \end{cases}$.

☐ $\begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{9}{7} \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{9}{5} \end{cases}$

Ćwiczenie 4



Dany jest układ równań $\begin{cases} 4x^2 - 4xy + y^2 = 0 \\ 4x(x - 2) = 4(x^2 + y) - 3(2y + 3x - 1) \end{cases}$

Zaznacz równania tworzące układ równań liniowych równoważny danemu.

☐ $y = 2x - 3$

☐ $y = 2x$

☐ $2x + y = 0$

☐ $x - 2y = 3$

☐ $x = 3 - 2y$

Ćwiczenie 5



Zaznacz układy równań liniowych tworzące alternatywę układów równań równoważną danemu $\begin{cases} (5x - 10y + 5)(x + 2y) = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$.

☐ $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = 2y \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ 5x = 10y + 5 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = 2y - 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = -2y \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

Ćwiczenie 6



Ułóż rozwiązanie układu równań, we właściwej kolejności.

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 + x - 3x^2y - 6xy - 3y = 0 \\ x^2 - (y + 2)^2 = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = -1 \\ -1 + y + 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ -1 - y - 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3y \\ 3y + y + 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3y \\ 3y - y - 2 = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3y \\ 3y + y + 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3y \\ 3y - y - 2 = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} (x^2 + 2x + 1)(x - 3y) = 0 \\ (x + y + 2)(x - y - 2) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \vee x - 3y = 0 \\ x + y + 2 = 0 \vee x - y - 2 = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x + 1 = 0 \vee x - 3y = 0 \\ x + y + 2 = 0 \vee x - y - 2 = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x(x^2 + 2x + 1) - 3y(x^2 + 2x + 1) = 0 \\ (x + (y + 2))(x - (y + 2)) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} (x + 1)^2 = 0 \vee x - 3y = 0 \\ x + y + 2 = 0 \vee x - y - 2 = 0 \end{cases}$$



Ćwiczenie 7



Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2y^2 - 6xy^2 + 9y^2 = 0 \\ \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{4}y^2 = 0 \end{cases}.$$

Ćwiczenie 8



Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 5x^2 - 3y^2 = 1 \\ 2x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$, korzystając z podstawienia $\begin{cases} x^2 = a \\ y^2 = b \end{cases}$.

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Układy równań wyższych stopni, prowadzące do układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IV. Układy równań. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi; podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przekształca układ równań tak, aby otrzymać układ równoważny
- rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania
- rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą przeciwnych współczynników
- rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą wyznacnikową
- wykorzystuje wzory skróconego mnożenia do zapisywania równań w postaci iloczynowej
- rozwiązuje układy równań wyższych stopni, prowadzące do układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi
- tworzy i wykorzystuje algorytmy rozwiązywania układów równań

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- stacje eksperckie
- analiza przypadku
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji

Formy pracy:

- praca całego zespołu klasowego
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie będą pracować metodą stacji eksperckich.
3. Ośmiu uczniów tworzy cztery grupy eksperckie i przygotowuje informacje na temat metod rozwiązywania układów równań.
 - Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą podstawiania – przypomnienie informacji.
 - Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą przeciwnych współczynników – przypomnienie informacji.
 - Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą wyznacznikową – przypomnienie informacji.
 - Rozwiązywanie układów równań wyższych stopni, prowadzących do układów równań liniowych.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie – eksperci kolejno prezentują przygotowane przez siebie informacje. Po prezentacji odpowiadają na pytania pozostałych uczniów i wyjaśniają wątpliwości.
2. Pracując w parach, uczniowie oglądają animację i wykonują polecenie umieszczone pod nią.

3. Uczniowie analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj”, eksperci wspierają pozostałych uczniów, wyjaśniają wątpliwości.
4. Pracując w parach, uczniowie rozwiązują ćwiczenia 1-4. Nauczyciel oraz eksperci nadzorują pracę grup i wyjaśniają wątpliwości.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń krótko podsumowuje najważniejsze informacje z lekcji.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, omawia pracę ekspertów oraz wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 5- 8.

Materiały pomocnicze:

- [Równania stopnia trzeciego w postaci iloczynu](#)
- [Równanie wielomianowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana przez uczniów do powtórzenia wiadomości z lekcji oraz przez ekspertów do przygotowania materiałów na lekcję. Animacja pomaga przypomnieć wzory skróconego mnożenia i usystematyzować wiedzę dotyczącą układów równań liniowych.