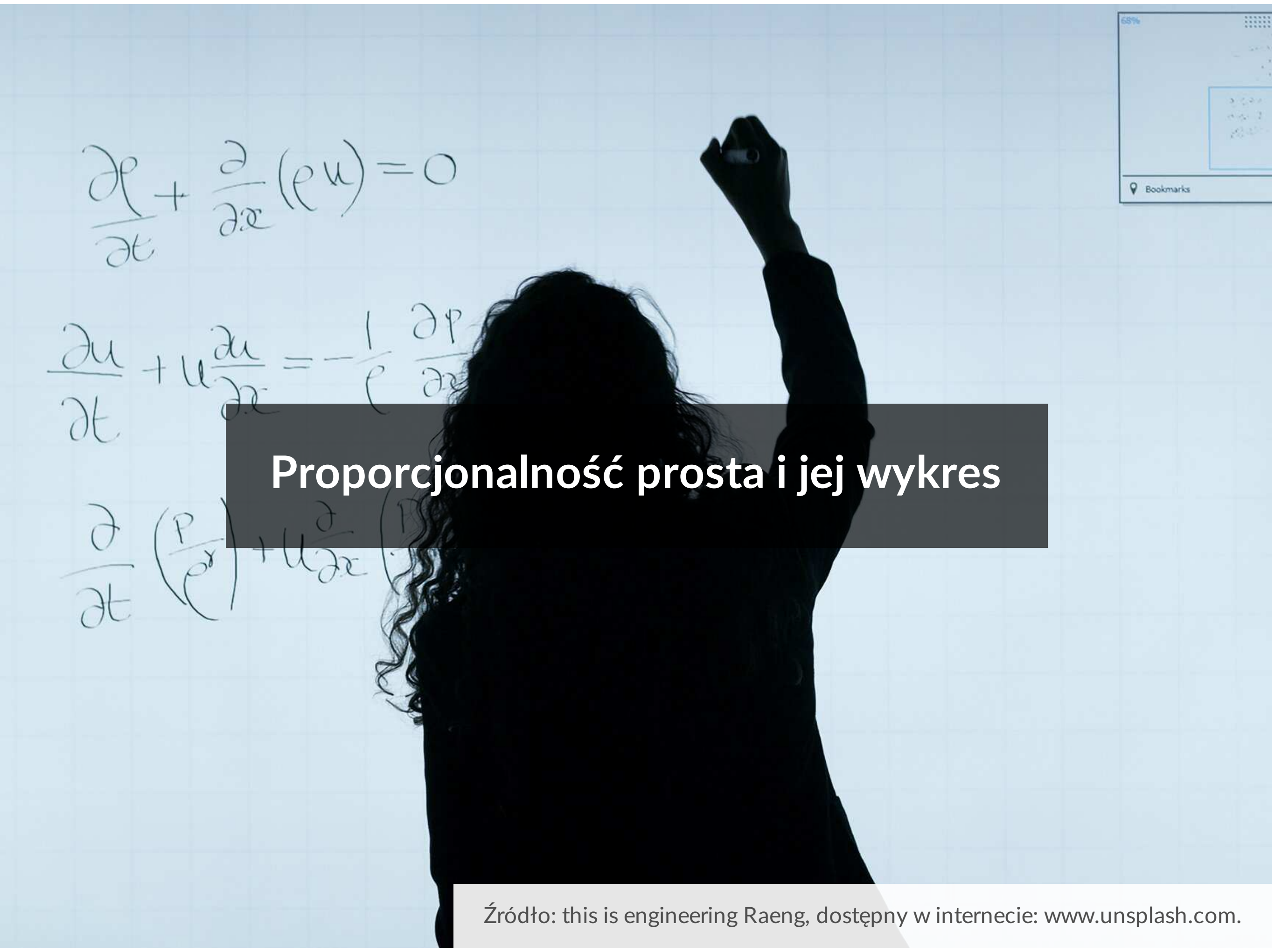
Proporcjonalność prosta i jej wykres

Proporcjonalność prosta i jej wykres



Źródło: this is engineering Raeng, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Magda i Basia postanowiły upiec dwie blachy tego samego ciasta i chciały się dowiedzieć, ile składników do tego potrzebują, dlatego sięgnęły po przepis. W przepisie wymienione zostały jednak jedynie składniki oraz ich ilości potrzebne do upieczenia jednej blachy ciasta. Basia powiedziała, że aby upiec dwie blachy ciasta wystarczy pomnożyć ilość każdego z produktów z przepisu razy dwa, a Magda, że do każdej ilości należy dodać dwa. Która z nich miała rację?

Poprawnej odpowiedzi udzieliła Basia. Taki zabieg nazywamy proporcjonalnością prostą, czyli jeżeli jedna wielkość rośnie, to druga wielkość rośnie tyle samo razy. Zatem skoro ilość blach ciasta zwiększyła się dwa razy, to ilość każdego ze składników należało pomnożyć razy dwa.

W dalszej części materiału poznasz inne zastosowania proporcjonalności prostej oraz własności jej wykresu.

> **Twoje cele**
>
> - Zdefiniujesz proporcjonalność prostą.
> - Narysujesz wykres proporcjonalności prostej i podasz jego własności.
> - Rozwiążesz zadania z kontekstem realistycznym dotyczącym proporcjonalności prostej.

Przeczytaj

Przykłady wielkości wprost proporcjonalnych:

- Obwód kwadratu L jest wprost proporcjonalny do długości x boku kwadratu, bowiem zawsze jest od niego cztery razy większy. Można to wyrazić wzorem:
$L(x) = 4x$, gdzie $x > 0$.
- Masa złota Z wyrażona w gramach jest wprost proporcjonalna do jego objętości x wyrażonej w centymetrach sześciennych:
$Z(x) = \frac{193}{10}x$.
Współczynnik proporcjonalności (gęstość złota wyrażona w gramach na centymetr sześcienny) wynosi $19,3$.
- Masa srebra S wyrażona w gramach też jest wprost proporcjonalna do jego objętości x wyrażonej w centymetrach sześciennych:
$S(x) = \frac{21}{2}x$.
Jednak tym razem współczynnik proporcjonalności (przedstawiający gęstość srebra) wynosi $10,5$.

Jak mogliśmy zauważyć w powyższych przykładach, zależność pomiędzy wielkościami wprost proporcjonalnymi opisuje funkcja postaci:

$$f(x) = ax,$$

gdzie x jest argumentem funkcji, natomiast a to pewna ustalona liczba rzeczywista różna od 0, zwana **współczynnikiem proporcjonalności**.

Funkcję takiej postaci nazywamy **proporcjonalnością prostą**.

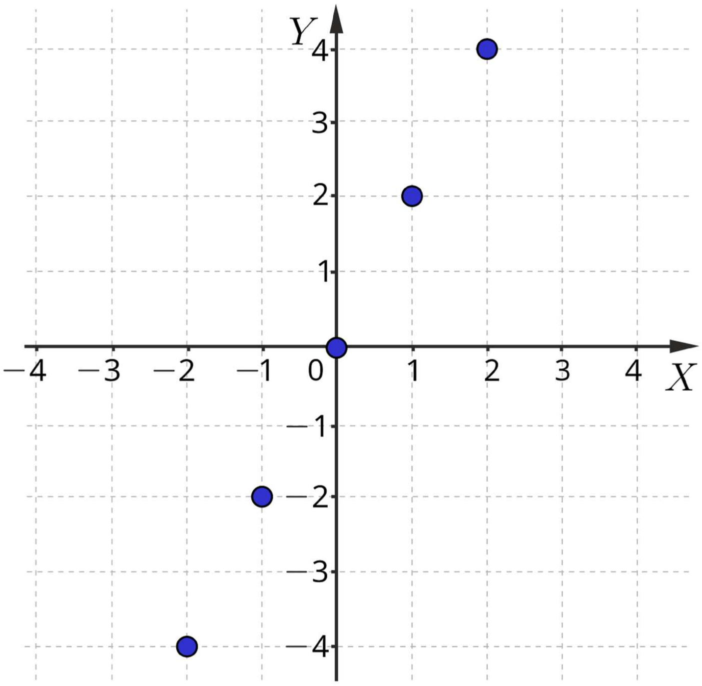
Ważne!

W sytuacjach rzeczywistych dziedzina funkcji $f(x) = ax$ może być rozmaita. Jeśli nie wystąpią oczywiste ograniczenia, będziemy przyjmować, że funkcja f jest określona dla każdej liczby rzeczywistej.

Przykład 1

Narysujmy wykres proporcjonalności prostej danej wzorem $f(x) = 2x$. Sporządzimy tabelę wartości funkcji.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	-2	0	2	4



Czy możemy powstałe punkty połączyć prostą i w ten sposób otrzymać wykres proporcjonalności prostej f?

Tak, ponieważ dziedziną podanej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.

W przypadku, gdyby dziedziną funkcji byłby zbiór $\{-2, -1, 0,\ 1,\ 2\}$ to wykres byłby taki jak na pierwszej grafice.

Twierdzenie: Wykres proporcjonalności prostej

Niech a będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Wykresem funkcji:

$$f(x) = ax$$

jest prosta o równaniu:

$$y = ax$$

przechodząca przez punkt $O = (0, 0)$ i $A = (1, a)$.

Powyższe twierdzenie ułatwia rysowanie wykresu funkcji $f(x) = ax$.

Ważne!

To, że wykres proporcjonalności prostej przechodzi przez punkty $O = (0, 0)$ i $A = (1, a)$, wynika z faktu, że:
dla $x = 0$ jest $y = f(0) = a \cdot 0 = 0$,
dla $x = 1$ jest $y = f(1) = 1 \cdot a = a$.

Przykład 2

Narysujmy wykres proporcjonalności prostej:
$f(x) = \frac{1}{2}x$.

Aby go narysować, wystarczy zauważyć, że np.:
$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$,
a następnie narysować prostą przechodzącą przez punkty $O = (0, 0)$ i $A = (2, 1)$.
Przykład 3

Narysujmy wykres proporcjonalności prostej:
$f(x) = -\frac{1}{3}x$.

Zauważmy, że np.:
$f(3) = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$,
następnie poprowadźmy prostą przez punkty $O = (0, 0)$ i $A = (3, -1)$.

Przeanalizujmy wykresy proporcjonalności prostej danej wzorem $f(x) = ax$ dla kilku dodatnich wartości a, a następnie dla kilku ujemnych.

Spójrzmy na wykresy proporcjonalności prostych danych wzorami $f(x) = ax$ dla: $a = \frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $a = 2$ oraz $a = 4$.

A teraz spójrzmy na wykresy proporcjonalności prostych danych wzorami $f(x) = ax$ kolejno dla: $a = -\frac{1}{4}$, $a = -\frac{1}{2}$, $a = -1$, $a = -2$ oraz $a = -4$.

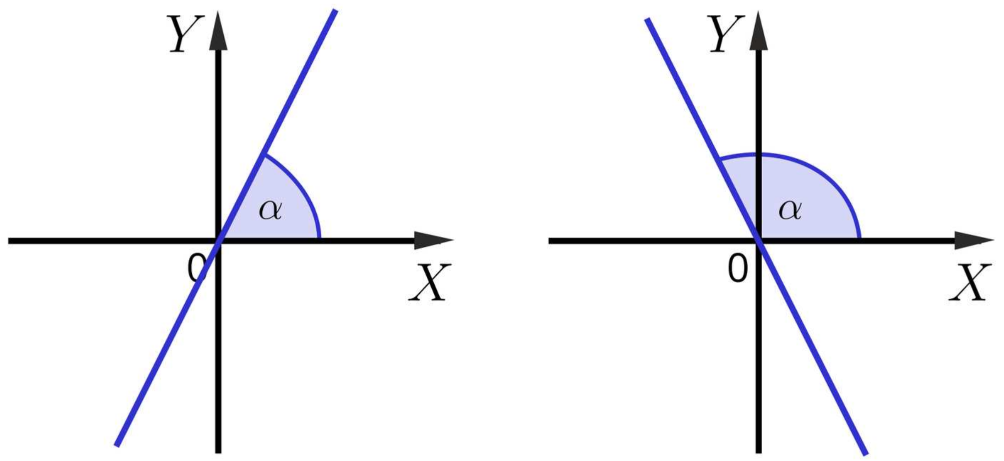
Powyższe przykłady można podsumować następująco: im większa jest wartość bezwzględna liczby a, tym bardziej „stroma” jest prosta $y = ax$.

Ważne!

Jeśli a jest liczbą dodatnią, to prosta $y = ax$ przechodzi przez I i III ćwiartkę układu współrzędnych. Jeśli zaś a jest liczbą ujemną, to prosta $y = ax$ przechodzi przez II i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

Kąt nachylenia prostej do osi X

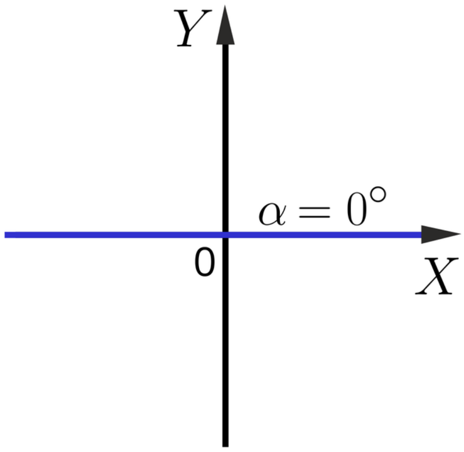
Kątem nachylenia prostej do osi nazwiemy kąt, którego jedno ramię jest dodatnią częścią osi X, a drugie ramię zawiera się w tej części prostej, która leży nad osią.



Ważne!

Przyjmujemy, że wnętrze kąta nachylenia stanowią te punkty płaszczyzny, które leżą pomiędzy dodatnią półosią X a prostą, gdy poruszamy się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Tak zdefiniowany kąt nachylenia ma miarę z przedziału $(0^\circ; 90^\circ)$ dla prostej $f(x) = ax$, dla której $a > 0$ lub z przedziału $(90^\circ; 180^\circ)$ dla prostej $f(x) = ax$, dla której $a < 0$.

Prosta $y = 0$ ma kąt nachylenia równy 0°, ponieważ pokrywa się ona z osią X, a więc tworzy z nią kąt zerowy.



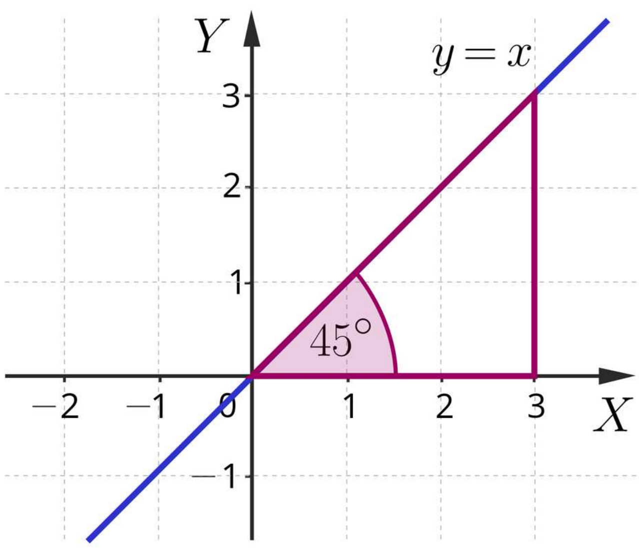
Ważne!

Prosta pokrywająca się z osią Y tworzy z osią X kąt 90° i nie jest wykresem żadnej funkcji zmiennej x.

Przykład 4

Określimy kąt nachylenia prostej $y = x$ do osi X.

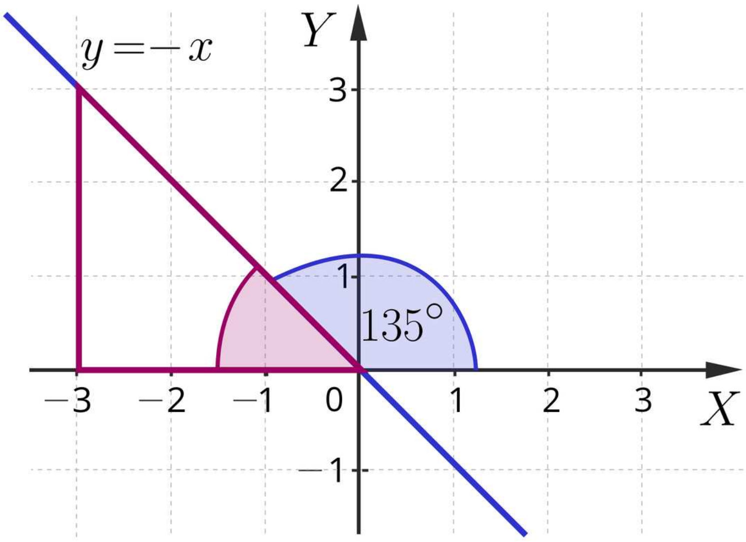
Prosta $y = x$ ma kąt nachylenia równy 45°, ponieważ punkty leżące na tej prostej mają obie współrzędne równe sobie. Na rysunku obok trójkąt o różowych bokach jest równoramiennym trójkątem prostokątnym, więc różowy kąt, to znaczy kąt nachylenia prostej $y = x$, ma miarę 45°.



Przykład 5

Określimy kąt nachylenia prostej $y = -x$ do osi X.

Rozumując podobnie, jak w poprzednim przykładzie, można wykazać, że na rysunku poniżej różowy kąt jest kątem o mierze 45°. Zatem niebieski kąt z rysunku poniżej ma miarę 135° (jako kąt przyległy do kąta o mierze 45°), co oznacza, że prosta $y = -x$ ma kąt nachylenia równy 135°.



Sposób wyznaczenia kąta nachylenia prostej $y = ax$ precyzuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie: kąt nachylenia

Jeśli α jest kątem nachylenia prostej $y = ax$ do osi X, to:

$$a = \operatorname{tg} \alpha.$$

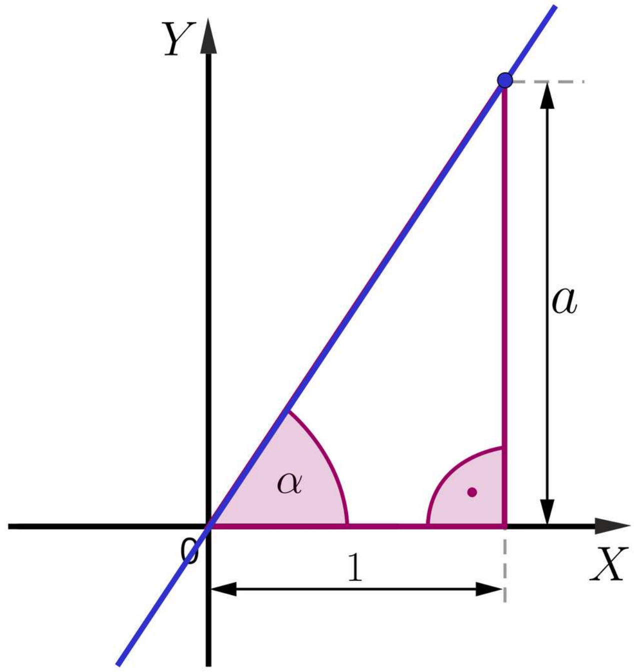
Dowód

Rozpatrzmy dwa przypadki.

Przypadek I

Jeśli $a > 0$, to wiemy, że punkt $(1, a)$ należy do prostej $y = ax$ i sytuację obrazuje rysunek poniżej. Zaznaczony trójkąt jest prostokątny, więc:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{1} = a.$$



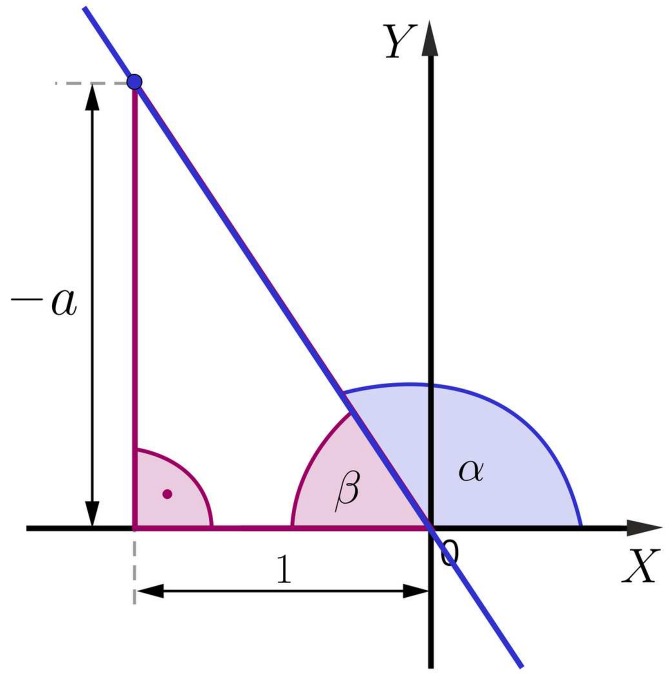
Przypadek II

Jeśli $a < 0$, to zauważmy, że punkt $(-1, -a)$ należy do prostej $y = ax$, a całą sytuację obrazuje kolejny rysunek (zauważmy, że wówczas liczba $(-a)$ jest dodatnia). Zaznaczony trójkąt jest prostokątny, więc:

$$\operatorname{tg} \beta = \tfrac{-a}{1} = -a.$$

Stąd

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta = a.$$



Słownik

wielkości wprost proporcjonalne

dwie zmienne wielkości dodatnie nazywamy wprost proporcjonalnymi, jeżeli iloraz odpowiadających sobie wartości tych wielkości jest stały.

dziedzina funkcji

zbiór wszystkich argumentów funkcji

prosta

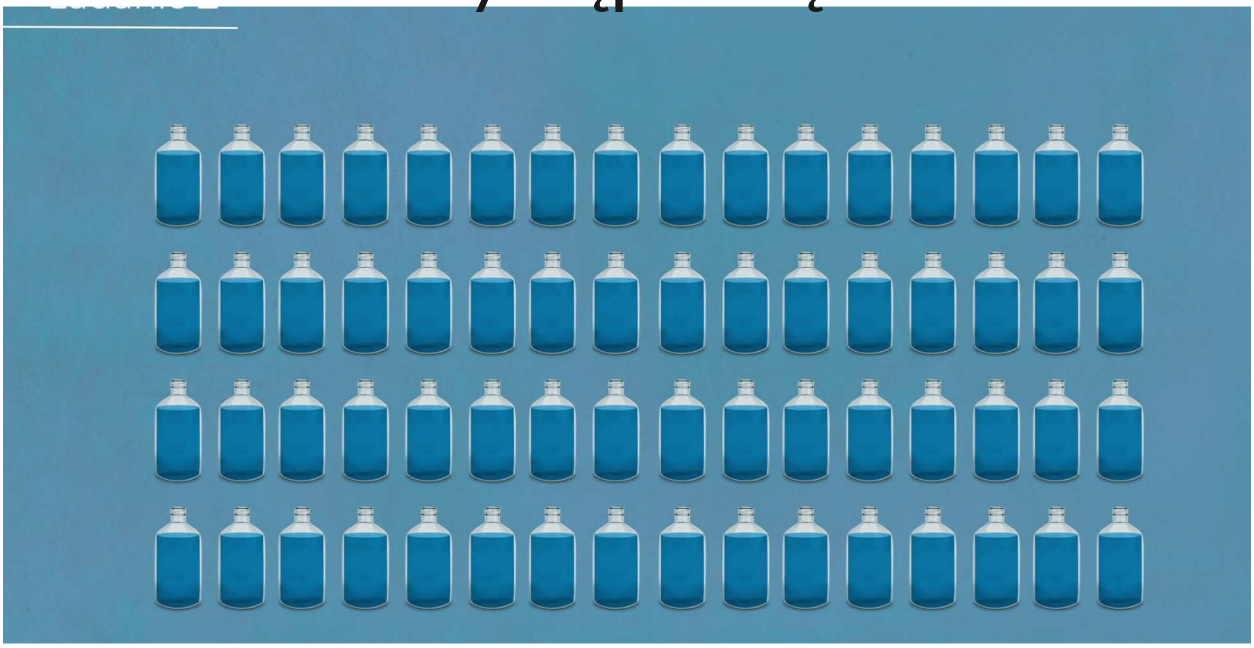
zbiór punktów opisanych następującym równaniem ogólnym $Ax + By + C = 0$, gdzie A i B nie mogą być jednocześnie równe zeru

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z zadaniami w animacji i następnie rozwiąż polecenia poniżej.

Wystąpił błąd



Film dostępny pod adresem /preview/resource/R15lGC1pQHYle

Film nawiązujący do treści materiału dotyczący proporcjonalności prostej i jej wykresu.

Polecenie 2

W 2 kg pewnego roztworu wodnego kwasu solnego znajduje się 400 g czystego kwasu. Ile gramów czystego kwasu znajduje się w 5 kg tego roztworu?

Polecenie 3

Ania stwierdziła, że jej zegarek w ciągu doby spóźnił się o 11 minut. Czy to prawda, że zegarek Ani w ciągu minuty spóźnia się o pół sekundy?

Polecenie 4

Mateusz dostaje od swoich rodziców co miesiąc kieszonkowe w wysokości 200 zł. Postanowił, że 40% z każdego kieszonkowego, będzie odkładać na nowy telefon, który kosztuje 1600 zł. Po ilu miesiącach uda mu się kupić upragniony telefon?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Jaka jest wartość a, jeżeli wielkości x i y, prezentowane w tabeli, są wprost proporcjonalne?

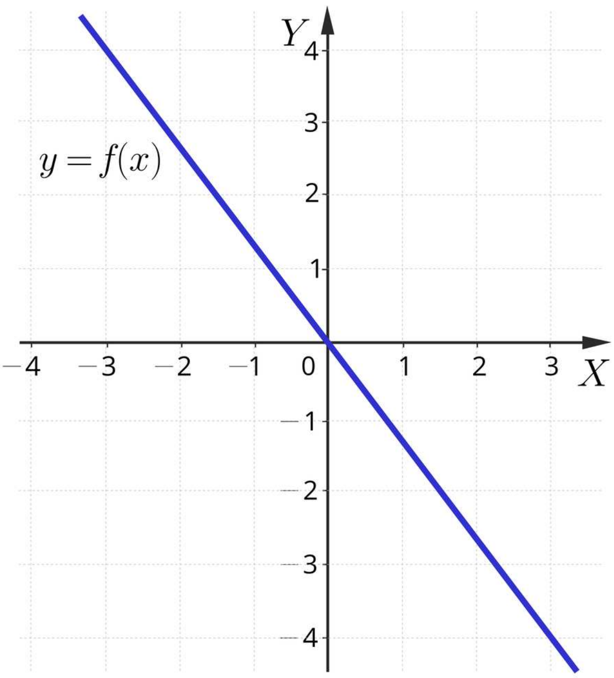
x	a	12
y	-6	30

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono wykres proporcjonalności prostej określonej wzorem:



Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Ćwiczenie 10

Ćwiczenie 11

Czy zależność prezentowana w tabeli opisuje wielkości wprost proporcjonalne?

x	6	15	20
y	15	$37,5$	50

Ćwiczenie 12

Automat produkuje papierowe detale, przy czym do wyprodukowania $24\ 000$ sztuk zużywa $4,32$ kg papieru. Ile gramów papieru potrzeba, żeby wyprodukować 70 takich detali?

Ćwiczenie 13

W pięciolitrowym kanistrze jest $6,25$ kg benzyny. Jaką pojemność ma naczynie, które po wypełnieniu benzyną waży 26 kg, a puste waży 2 kg?

Ćwiczenie 14

Treść zadań na sprawdzian z matematyki mieści się na jednej stronie. W ciągu 10 sekund drukarka wydrukowała 8 kartek z treścią zadań. Ile czasu bedzie potrzebował ten model, by wydrukować materiały dla trzydziestosześcioosobowej klasy?

Ćwiczenie 15

Za 25 kg jabłek trzeba zapłacić 30 zł. Ile kosztuje 8 kg tych jabłek?

Ćwiczenie 16

Naszkicuj w zeszycie wykres proporcjonalności prostej f, określonej wzorem:

a. $f(x) = 3x$,

b. $f(x) = -3x$,

c. $f(x) = \frac{1}{5}x$,

d. $f(x) = -\frac{2}{3}x$.

Ćwiczenie 17

Statek płynął ze stałą prędkością w dół rzeki, a po godzinie postoju zawrócił do miejsca, z którego wypłynął. Płynąc w dół rzeki, statek pokonał $30\ \mathrm{km}$ w ciągu $1,5\ \mathrm{h}$. Opisz:

a. w jakiej odległości s od punktu startu statek znalazł się po x minutach od momentu wypłynięcia w dół rzeki, $0 < x < 90$;

b. w jakiej odległości a od miejsca postoju statek znalazł się po y minutach od momentu wypłynięcia w górę rzeki, jeżeli prędkość prądu rzeki wynosi $5\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Ustal, dla jakich y to zadanie ma sens.

Ćwiczenie 18

Ustal, jaką wartość ma współczynnik proporcjonalności a, jeżeli po zwiększeniu argumentu x o 3 wartość y proporcjonalności prostej zwiększa się o 15.

Ćwiczenie 19

Do wykresu proporcjonalności prostej $f(x) = ax$ należy punkt $A = (2, -6)$. Oblicz $f(-1)$. Dla jakiego x wartość funkcji f wynosi 8?

Ćwiczenie 20

Marek odczytał z wykresu proporcjonalności prostej, że leżą na nim punkty $A = (2, 5)$ i $B = (-3, -7)$. Wykaż, że Marek się pomylił.

Ćwiczenie 21

Podaj wzór proporcjonalności prostej, wiedząc, że jej wykres jest nachylony do osi X pod kątem:

a. 30°;

b. 45°;

c. 60°;

d. 120°.

Ćwiczenie 22

Podaj wzór proporcjonalności prostej $f(x) = ax$, wiedząc, że liczba a jest całkowita, a wykres funkcji f jest nachylony do osi X pod kątem α takim, że:

a. $71^\circ < \alpha < 72^\circ$;

b. $81^\circ < \alpha < 82^\circ$.

Ćwiczenie 23

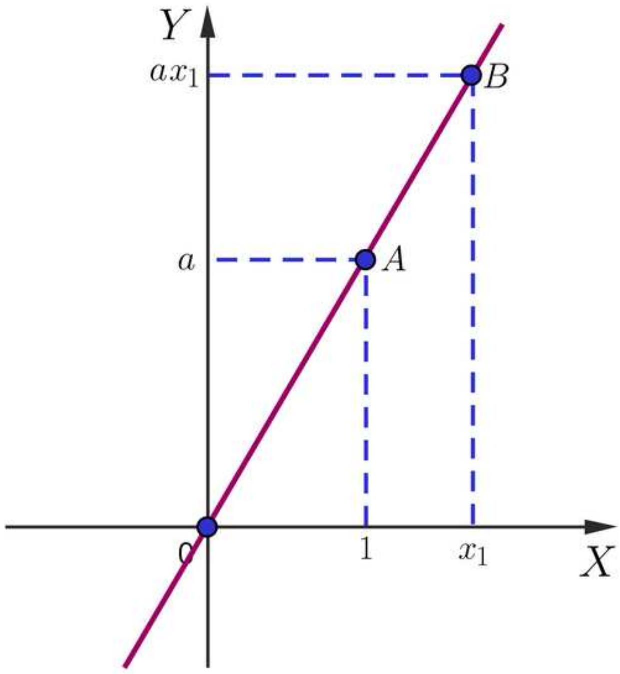
Cztery koty łapią cztery myszy w ciągu czterech dni. Ile czasu potrzebuje jeden kot, aby złapać trzy myszy?

Ćwiczenie 24

Marek wybrał się pieszo do swojego kolegi Darka. Idąc ze stałą prędkością, po półgodzinnym marszu stwierdził, że zostało mu do przejścia jeszcze 5 km, a po godzinie marszu miał jeszcze 3 km do celu. W jakiej odległości od Darka mieszka Marek?

Ćwiczenie 25

Liczba a jest różną od zera liczbą rzeczywistą. Na rysunku zaznaczono punkty O, A, B należące do wykresu funkcji $f(x) = ax$. Wykaż, że punkty $O = (0, 0)$, $A = (1, a)$ i $B = (x_1, ax_1)$, gdzie $x_1 \neq 0$ i $x_1 \neq 1$, są współliniowe.



Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski
Przedmiot: Matematyka

Temat: Proporcjonalność prosta i jej wykres

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;

5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;

6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje proporcjonalność prostą,
- rysuje wykres proporcjonalności prostej i podaje jego własności,
- rozwiąuje zadania realistycznym dotyczącym proporcjonalności prostej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- praca z tekstem
- metoda kota i myszy

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- arkusze papieru, pisaki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w czterech grupach analizują zadania z sekcji Przeczytaj oraz zadania przedstawione w animacji. Notują pytania do poznawanych treści, następnie zadają je na forum klasy, odpowiedzi udzielają liderzy grup.
2. Uczniowie pracują w parach, metodą kot i mysz rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie w grupach (tych samych w których pracowali na początku lekcji) omawiają wyniki swojej pracy.
2. Nauczyciel przedstawia wyniki swoich obserwacji, ocenia pracę uczniów.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują polecenia w sekcji „Animacja”.

Materiały pomocnicze:

- Proporcjonalność prosta

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać na lekcji o wielkościach wprost proporcjonalnych.