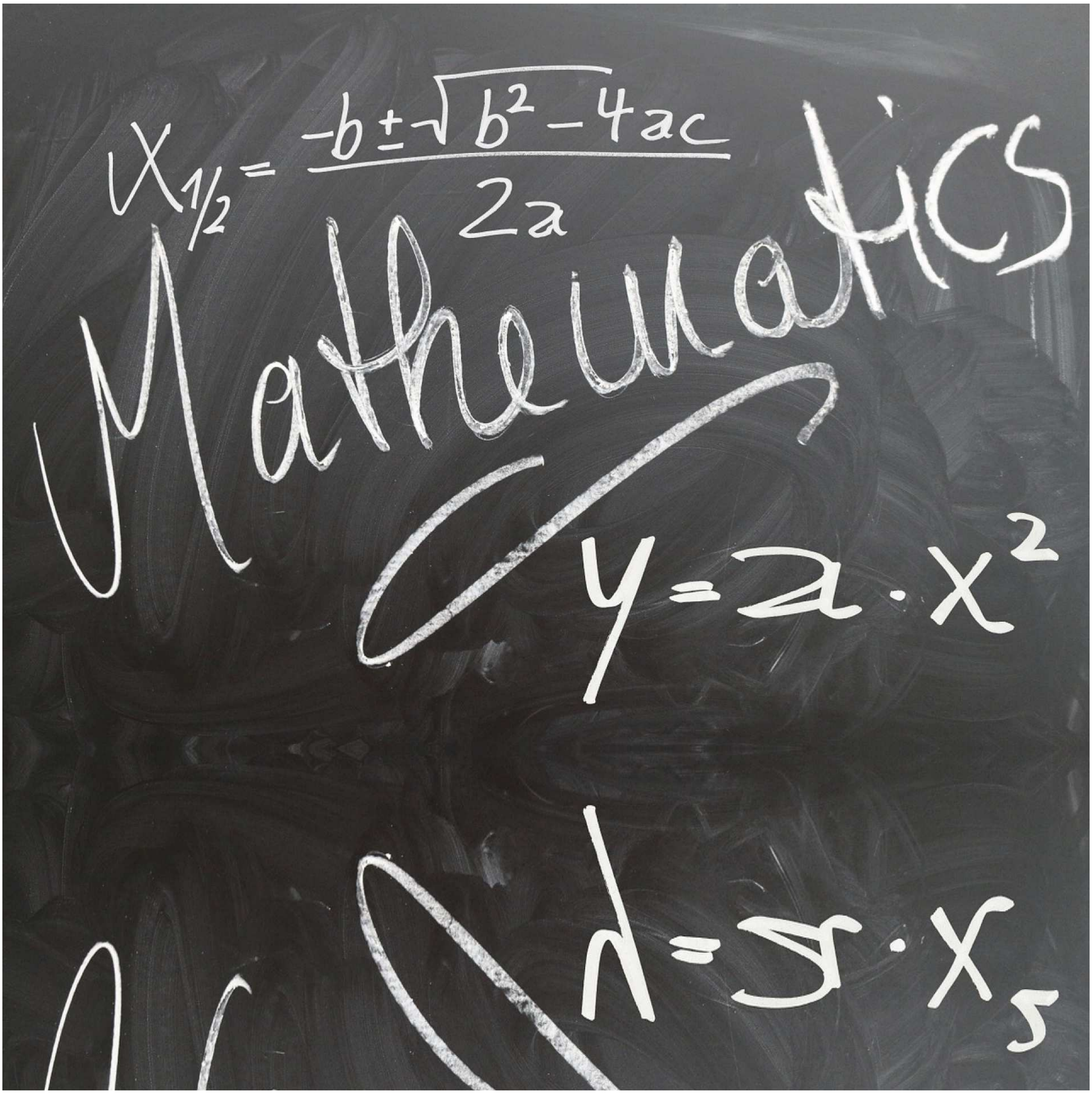
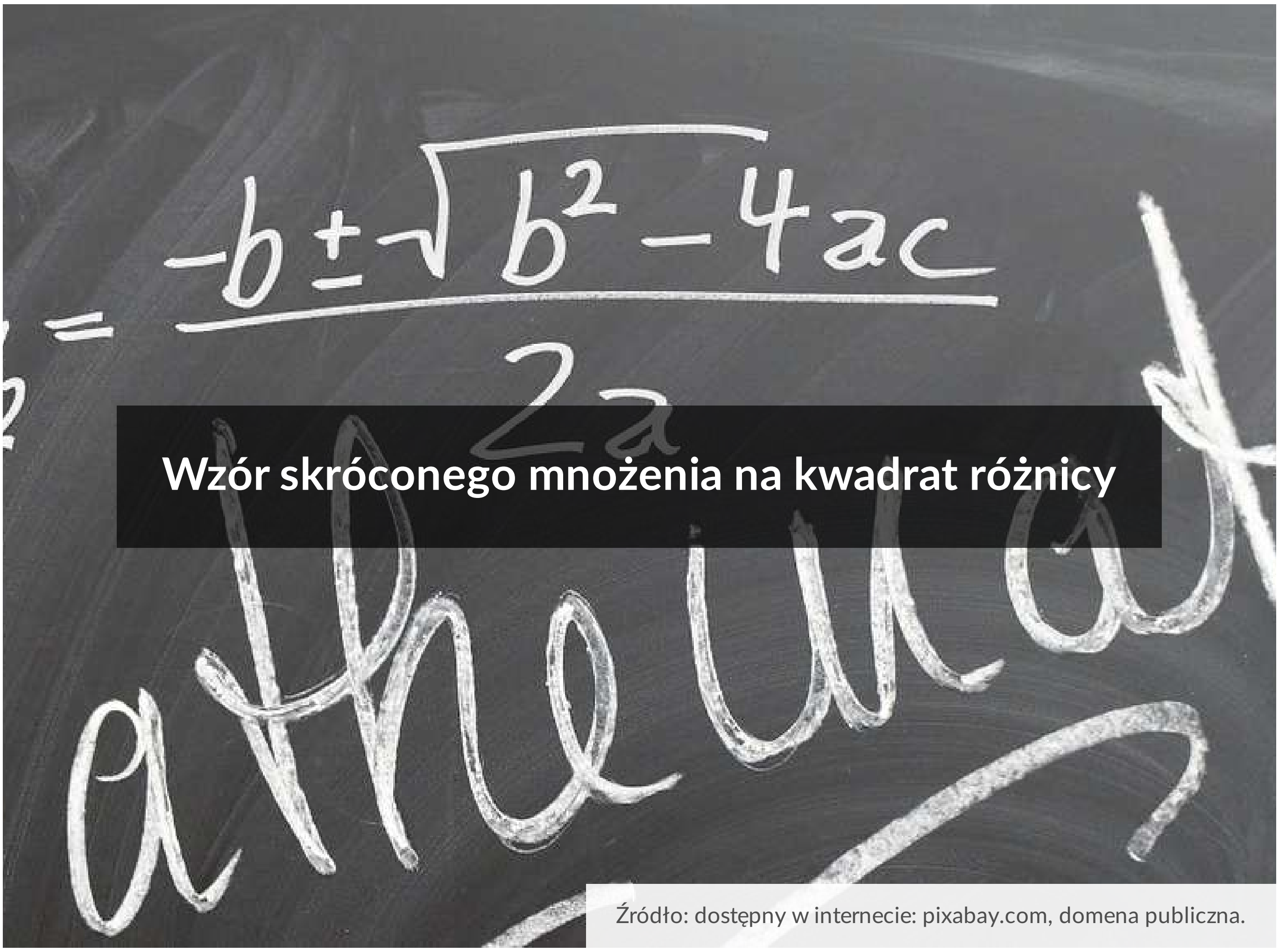


Wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Galeria zdjęć interaktywnych
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Poznamy teraz kolejny wzór skróconego mnożenia, który pozwoli na szybką zamianę pewnych iloczynów na sumy algebraiczne. Będziemy też wykonywać dużo trudniejsze zadania, związane z zamianą niektórych sum na iloczyny. Umiejętności te bardzo przydadzą się, gdy będziemy przekształcać wyrażenia algebraiczne.

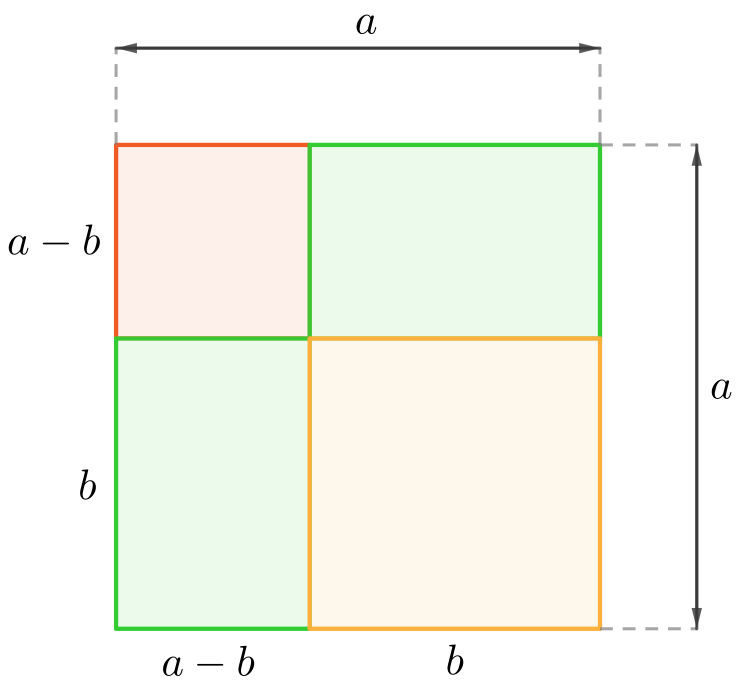
Wykorzystanie wzoru **skróconego mnożenia na kwadrat różnicy** pozwoli na obliczenie kwadratu różnicy dwóch wyrażeń, bez konieczności redukcji wyrazów podobnych.

Twoje cele

- Poznasz wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.
- Zapiszesz kwadrat różnicy dwóch wyrażeń w postaci sumy.
- Przekształcisz wyrażenia algebraiczne, wykorzystując wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.

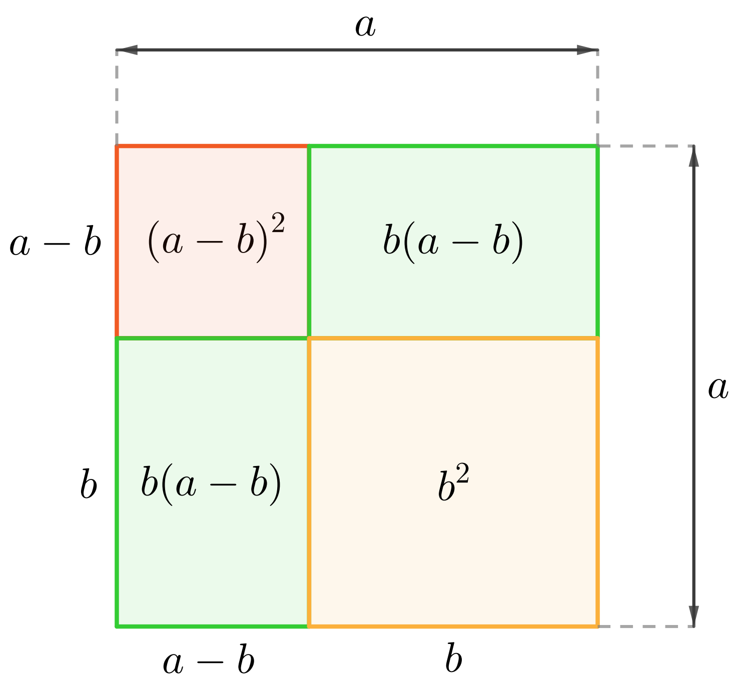
Przeczytaj

Obliczymy dwoma sposobami pole kwadratu przedstawionego na rysunku.



Interpretacja geometryczna wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

Bok kwadratu ma długość a, zatem $P = a^2$.



Interpretacja geometryczna wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

Pole tego kwadratu można też obliczyć jako sumę pól kwadratu o boku długości $a-b$, kwadratu o boku długości b, dwóch prostokątów o bokach długości $a-b$ i b.

$$P=(a-b)^2+b(a-b)+b(a-b)+b^2=(a-b)^2+ab-b^2+ab-b^2+b^2$$

Porównując otrzymane wyrażenia, otrzymujemy:

$$a^2=(a-b)^2+2ab-b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Otrzymana równość zwana jest wzorem skróconego mnożenia na **kwadrat różnicy dwóch wyrażeń**.

Ważne!

Wzór na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń minus podwojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez drugie.

Powyższy wzór można też uzyskać, zapisując kwadrat różnicy w postaci iloczynu i wykonując mnożenie.

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$$

Korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy, można podnosić do kwadratu dwumiany, nie wykonując mnożenia.

Przykład 1

Zapiszemy każde z wyrażeń w postaci sumy.

$(x-1)^2=x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2=x^2-2x+1$

$\left(a-\sqrt{3}\right)^2=a^2-2\cdot a\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=a^2-2\sqrt{3}a+3$

$\left(x^2-4\right)^2=x^4-2\cdot x^2\cdot 4+4^2=x^4-8x^2+16$

$(2x-3a)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3a+(3a)^2=4x^2-12ax+9a^2$

Przykład 2

Przekształcimy potęgi na sumy algebraiczne, wykorzystując wzór na kwadrat różnicy.

$$\left(xy-2\sqrt{3}\right)^2=\left(xy\right)^2-2\cdot xy\cdot 2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2=x^2y^2-4\sqrt{3}xy+12$$

$$\left(a^4x^3-0,1\right)^2=a^8x^6-2\cdot a^4x^3\cdot 0,1+\left(0,1\right)^2=a^8x^6-0,2a^4x^3+0,01$$

Wykorzystanie wzoru na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń znacznie ułatwia przekształcanie wyrażeń algebraicznych.

Przykład 3

Zapiszemy podane wyrażenie w najprostszej postaci, a następnie obliczymy jego wartość dla $x=-\sqrt{3}$.

$$2(x-1)^2-[(-x+1)(1-x)-2x]=$$

$$=2\left(x^2-2x+1\right)-\left[\left(1-x\right)\left(1-x\right)-2x\right]=$$

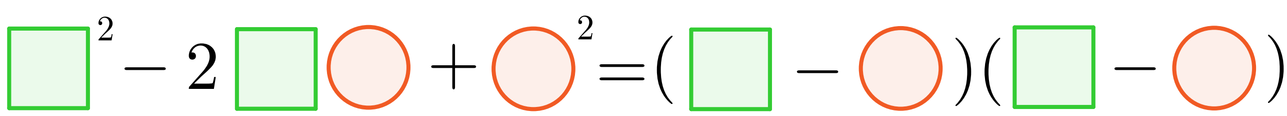
$$=2x^2-4x+2-\left(1-2x+x^2-2x\right)=x^2+1$$

$$\left(-\sqrt{3}\right)^2+1=3+1=4$$

Odpowiedź:

Wartość wyrażenia jest równa 4.

Ważnym zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy jest zapisywanie sum algebraicznych w postaci iloczynu.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Przykład 4

Zapiszemy sumy algebraiczne w postaci iloczynów.

$$25a^2-10a+1=\left(5a-1\right)\left(5a-1\right)$$

$$9x^2-48xy+64y^2=\left(3x-8y\right)\left(3x-8y\right)$$

$$3a^2 - 18ac + 27c^2 = \left(\sqrt{3}a - \sqrt{27}c\right)\left(\sqrt{3}a - \sqrt{27}c\right)$$

$$k^2 - \sqrt{3}km + 0,75m^2 = \left(k - 0,5\sqrt{3}m\right)\left(k - 0,5\sqrt{3}m\right)$$

Wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy można zastosować, obliczając wartości wyrażeń zawierających pierwiastki.

Przykład 5

$$\left(3 - \sqrt{3}\right)^2 + 6\sqrt{3} = 9 - 6\sqrt{3} + 3 + 6\sqrt{3} = 12$$

$$\left(\sqrt{2} - 2\sqrt{10}\right)^2 - \left(42 - 8\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{2} - 2\sqrt{10}\right)^2 - \left(\sqrt{2} - 2\sqrt{10}\right)^2 = 0$$

Słownik

wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

kwadrat różnicy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń minus podwojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez drugie

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych, rozwiązując samodzielnie podane przykłady, a następnie sprawdź ich rozwiązania.

Polecenie 2

Podaj ilustrację geometryczną wzoru $(x-4)^2$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Wykaż, że suma kwadratu liczby naturalnej parzystej dodatniej i kwadratu liczby o 1 od niej mniejszej, w dzieleniu przez 4 daje resztę 1.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zapisuje kwadrat dwumianu w postaci sumy, wykorzystując odpowiedni wzór skróconego mnożenia
- zamienia sumę algebraiczną na iloczyn, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy
- przekształca wyrażenia algebraiczne, z zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy
- analizuje problemy związane z zapisywaniem wyrażeń w najprostszej postaci i dobiera odpowiednie modele matematyczne do ich rozwiązania
- ocenia poprawność stosowanych algorytmów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda wędrujących plakatów
- konkurs zadaniowy

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów i każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Nauczyciel prosi uczniów, aby przypomnieli sobie w domu prawa działań na potęgach i pierwiastkach oraz poznane do tej pory sposoby zamiany iloczynów algebraicznych na sumy algebraiczne.

Faza wstępna:

Praca w parach. Uczniowie przypominają sposób mnożenia różnic dwumianów, podają przykłady obliczania potęg, również liczb niewymiernych. Wykorzystują metodę wędrujących plakatów – jedna z par uczniów siedzących w tej samej ławce zapisuje odpowiedni przykład i podaje karton z zapisem osobom siedzącym w następnej ławce, itd.

W razie wątpliwości uczniowie proszą o pomoc nauczyciela.

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, wspólnie z uczniami ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Ćwiczenie 1
Praca w 4 grupach. Każda z grup ma za zadanie wyprowadzenie wzoru na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń: $(x-y)^2$. Uczniowie powinni skorzystać przy tym z graficznej interpretacji wzoru – obliczając pole kwadratu o boku x oraz pole kwadratu o boku x podzielonego na kwadrat o boku y, dwa prostokąty o bokach $(x-y)$ i y oraz kwadrat o boku $(x-y)$.
I z otrzymanej równości wyznaczyć $(x-y)^2$.

Ćwiczenie 2
Teraz grupy łączą się – grupa 1 z 2 oraz grupa 3 z 4. Zadaniem grup jest wymyślenie 2 podobnych przykładów takich, jak w ćwiczeniu 1. Przeanalizowanie wszystkich rozwiązanych przykładów i sformułowanie odpowiedniej zależności.

Ćwiczenie 3
Grupy udowadniają algebraicznie zapisane przez siebie wzory.

Prezentacja prac grup, wspólne zapisanie wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.

Uczniowie w parach oglądają galerię zdjęć interaktywnych, rozwiązują samodzielnie podane tam przykłady i porównują między sobą rozwiązania, a następnie porównują z wynikami przedstawionymi w galerii.

Wspólna praca uczniów – uczniowie kolejno podają przykłady kwadratu różnicy, a ochotnicy zapisują na tablicy te przykłady w postaci sum.

Praca indywidualna uczniów – uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

Podsumowaniem zajęć jest konkurs zadaniowy – zapisywanie w postaci sumy kwadratu wyrażenia arytmetycznego zawierającego co najmniej jeden pierwiastek.

Trzej ochotnicy zapisują na tablicy wymyślone przez siebie przykłady kwadratów wyrażeń arytmetycznych typu $\left(a-\sqrt{b}\right)^2$ – pierwszy poziom, $\left(a-b\sqrt{c}\right)^2$ – drugi poziom, $\left(a\sqrt{b}-c\sqrt{d}\right)^2$ – trzeci poziom. Wygrywa uczeń, który najszybciej pokona kolejne progi zadaniowe.

Końcowy element zajęć to podsumowanie przez uczniów pracy grup, określenie czy postawione cele zostały osiągnięte, wskazanie przez nauczyciela ważnych elementów zajęć, ocena pracy uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wymyślenie lub poszukanie w dostępnych źródłach zastosowania wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy.

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

Rozwiązywanie równań kwadratowych z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia

Księga liczb, J.H. Conway, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne 1999 – rozdział o trójkącie Pascala.

Wskazówki metodyczne:

Galerię zdjęć interaktywnych można wykorzystać do samodzielnej pracy uczniów, jako wstęp do zajęć.