



Wykorzystanie monotoniczności funkcji wykładniczej w rozwiązywaniu nierówności

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Wykorzystanie monotoniczności funkcji wykładniczej w rozwiązywaniu nierówności

Źródło: Tom Barrett, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Funkcją postaci $f(x) = a^x$ nazywamy funkcją wykładniczą. Charakteryzuje się ona wieloma ciekawymi własnościami. Niektóre z nich można wykorzystać do rozwiązywania nierówności wykładniczych. Jak się okazuje, po dokładnej analizie własności, największe znaczenie w rozwiązaniu nierówności wykładniczych będzie miała monotoniczność funkcji.

Twoje cele

- Wykorzystasz własności funkcji wykładniczej do rozwiązywania nierówności wykładniczych.
- Rozwiążesz różne rodzaje typy nierówności wykładniczych.
- Zastosujesz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Definicja: funkcja wykładnicza

Funkcję postaci

$$f(x) = a^x$$

określoną na zbiorze $\mathbb{R}$,

gdzie:

$a > 0$, $a \neq 1$ nazywamy **funkcją wykładniczą**.

Już wiesz

Monotoniczność funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ zależy od wartości współczynnika a :

- dla $a > 1$ funkcja wykładnicza jest rosnąca,
- dla $a \in (0, 1)$ funkcja wykładnicza jest malejąca.

W tym materiale wykorzystamy monotoniczność funkcji wykładniczej do rozwiązywania nierówności.

Nierównością wykładniczą nazywamy nierówność, w której niewiadoma występuje wyłącznie w wykładniku.

Nierównościami wykładniczymi są na przykład:

- $3^{x+2} < \left(\frac{1}{27}\right)^{x-1}$,
- $5^x \geq \left(\frac{1}{125}\right)^{x+3}$.

Do rozwiązywania nierówności wykładniczych wykorzystujemy monotoniczność funkcji wykładniczej i korzystamy z następujących zależności:

- dla $a \in (0, 1)$ zachodzi warunek: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$,
- dla $a > 1$ zachodzi warunek: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność: $2^{x+6} < 16^{x-2}$.

Rozwiązanie

Korzystając z praw działań na potęgach, nierówność przekształcamy tak, aby po obu stronach była taka sama podstawa, większa od 1:

$$2^{x+6} < 2^{4x-8}.$$

Ponieważ $a > 1$, zatem korzystając z tego, że funkcja wykładnicza jest rosnąca, rozwiązujemy nierówność:

$$x + 6 < 4x - 8.$$

Z nierówności mamy, że $x > \frac{14}{3}$.

Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $x \in (\frac{14}{3}, \infty)$.

Ważne!

W przejściu z **nierówności wykładniczej** do nierówności liniowej znaku nierówności nie zmieniliśmy na przeciwny, ponieważ $a > 1$.

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność: $(\frac{1}{3})^{x-2} \geq (\frac{1}{27})^{2x+3}$.

Rozwiązanie

Korzystając z praw działań na potęgach, nierówność przekształcamy tak, aby po obu stronach była taka sama podstawa, mniejsza od 1 i większa od 0:

$$(\frac{1}{3})^{x-2} \geq (\frac{1}{3})^{6x+9}.$$

Ponieważ $a \in (0, 1)$, zatem z własności funkcji wykładniczej otrzymujemy, że:
 $x - 2 \leq 6x + 9$.

Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $x \in \langle -\frac{11}{5}, \infty \rangle$.

Ważne!

W przejściu z nierówności wykładniczej do nierówności liniowej znak nierówności zmieniliśmy na przeciwny, ponieważ $a \in (0, 1)$.

Aby poprawnie rozwiązać niektóre nierówności wykładnicze, należy rozwiązać nierówności kwadratowe lub wymierne.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność: $3^{x^2} < 3^{x+6}$.

Rozwiązanie

Ponieważ $a > 1$, zatem z własności funkcji wykładniczej otrzymujemy, że:

$$x^2 < x + 6.$$

Nierównością równoważną jest $x^2 - x - 6 < 0$.

Rozwiązaniem nierówności jest zbiór:

$$x \in (-2, 3).$$

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+1}{x-2}} > 1$.

Rozwiązanie

Korzystając z działań na potęgach, otrzymujemy nierówność $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+1}{x-2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^0$.

Ponieważ $a = \frac{1}{3} \in (0, 1)$, więc rozwiązujemy nierówność:

$$\frac{x+1}{x-2} < 0 \wedge x \neq 2.$$

Nierówność ta jest równoważna nierówności $(x+1)(x-2) < 0$.

Jej rozwiązaniem jest zbiór $x \in (-1, 2)$.

Przykład 5

Rozwiążemy nierówność $3^{2x} \cdot \frac{1}{81} \geq \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie

Przekształcamy nierówność tak, aby po obu jej stronach były jednakowe podstawy:

$$3^{2x} \cdot 3^{-4} \geq 3^{-1}.$$

Z własności działań na potęgach otrzymujemy, że:

$$3^{2x-4} \geq 3^{-1}.$$

Ponieważ $a = 3 > 1$, więc nie zmieniamy znaku nierówności pomiędzy wykładnikami.

Otrzymujemy nierówność $2x - 4 \geq -1$.

Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $x \in \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Przykład 6

Rozwiążemy nierówność: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5x+6} < 1$.

Rozwiązanie

Nierówność przekształcamy do postaci $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5x+6} < \left(\frac{1}{2}\right)^0$.

Ponieważ $a = \frac{1}{2} \in (0, 1)$, zatem otrzymujemy nierówność:

$$x^2 - 5x + 6 > 0.$$

Pierwiastkami są liczby 2 i 3, zaś rozwiązanie to zbiór liczb

$$x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty).$$

Nierówność wykładnicza, która jest postaci $a^x < b$, gdzie $b > 0$:

- dla $a \in (0, 1)$ jest równoważna nierówności $x > \log_a b$,
- dla $a \in (1, \infty)$ jest równoważna nierówności $x < \log_a b$.

Przykład 7

Rozwiążmy nierówność $3^x < 5$.

Rozwiązanie

Z powyższych własności otrzymujemy, że $x < \log_3 5$.

Zbiorem rozwiązań tej nierówności jest przedział $x \in (-\infty, \log_3 5)$.

Czasami do rozwiązania nierówności wykładniczej niezbędne jest zastosowanie pomocniczej niewiadomej.

Przykład 8

Rozwiążmy nierówność $2^{2x} > 2^x + 12$.

Rozwiązanie

Przenosimy wszystkie wyrażenia na jedną stronę:

$$2^{2x} - 2^x - 12 > 0.$$

Wykonujemy podstawienie. Niech $t = 2^x > 0$.

Rozwiązujemy nierówność kwadratową $t^2 - t - 12 > 0$.

Rozwiązaniem tej nierówności jest przedział $t \in (-\infty, -3) \cup (4, \infty)$.

Z założenia $t > 0$, więc $t \in (4, \infty)$.

To oznacza, że $2^x \in (4, \infty)$.

Rozwiązujemy nierówność $2^x > 4$, więc $x > 2$.

Słownik

nierówność wykładnicza

nierówność, w której niewiadoma występuje tylko w wykładniku

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Obejrzyj galerię zdjęć interaktywnych, a następnie wykonaj polecenie.

Nierówność wykładniczą definiujemy jako

$$a^x < b,$$

gdzie a , b są liczbami rzeczywistymi dodatnimi oraz a jest różne od 1.



Nierówność wykładniczą definiujemy jako

$$a^x \leq b,$$

gdzie a , b są liczbami rzeczywistymi dodatnimi oraz a jest różne od 1.



1. Można zapisać tę nierówność z pozostałymi znakami nierówności.

Polecenie 2

Rozwiąż nierówności:

a) $(\sqrt{5})^{x^2-x} \leq 1,$

b) $(\frac{1}{2})^{-x+5} > \frac{1}{16}.$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz w pary nierówność z odpowiadającym jej rozwiązaniem:

$$3^x \leq \frac{1}{9}$$

$$x \in (3, \infty)$$

$$2^x > 8$$

$$x \in \langle -3, \infty)$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x < 25$$

$$x \in (-2, \infty)$$

$$6^x \geq \frac{1}{216}$$

$$x \in (-\infty, -2\rangle$$

Ćwiczenie 2



Rozwiązaniem nierówności $4^{2x} \cdot 6 > 3$ jest przedział:

☐ $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

☐ $x \in \left(-\frac{1}{4}, \infty\right)$

☐ $x \in \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$

Ćwiczenie 3



Uporządkuj we właściwej kolejności etapy rozwiązywania nierówności $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leq 32^{-x+3}$:

$$2x - 1 \geq 5x - 15$$



$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leq 32^{-x+3}$$



$$x \leq \frac{14}{3}$$



$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{5x-15}$$



$$x \in \left(-\infty, \frac{14}{3}\right)$$



Ćwiczenie 4



Przeciągnij wzór każdej z nierówności do odpowiedniego pola. Możesz również kliknąć w podaną odpowiedź, aby rozwinąć listę i wybrać odpowiednią grupę.

Nierówności, których rozwiązaniem jest zbiór

$$x \in (-\infty, -2):$$

$$5^{x+2} \geq 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} \leq 16$$

$$3^x \leq \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 9$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \geq 16$$

Nierówności, których rozwiązaniem jest zbiór

$$x \in (-2, \infty)$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^{-x} \geq \left(\sqrt{2}\right)^2$$

Ćwiczenie 5



Uzupełnij tekst odpowiednimi słowami. Przeciągnij odpowiednie słowa w luki albo kliknij w lukę, aby rozwinąć listę i wybrać prawidłową odpowiedź.

Jeżeli rozwiązujemy nierówność wykładniczą postaci $a^x < a^y$ oraz:

- podstawa potęgi $a \in (0, 1)$, to znak nierówności
- podstawa potęgi $a \in (1, \infty)$, to znak nierówności .

pozostaje bez zmian

zmieniamy na przeciwny

Ćwiczenie 6



Aby rozwiązać nierówność $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 > 0$ można wykonać podstawienie:

☐ $t = 10^x$

☐ $t = 2^x$

☐ $t = 3^x$

Ćwiczenie 7



Rozwiązania nierówności $2^{x+1} - 2^x > \frac{1}{4}$ zawierają się w przedziale:

☐ $x \in (-\infty, -4)$

☐ $x \in (-2, \infty)$

☐ $x \in (-1, \infty)$

☐ $x \in (-\infty, -2)$

Ćwiczenie 8



Uzupełnij rozwiązanie nierówności $3^{x+2} + 3^x > 10$.

Nierówność przekształcamy do postaci

$\cdot 3^x + 3^x > 10$.

Zatem otrzymujemy $\cdot 3^x > 10$.

Po podzieleniu obu stron przez nierówność jest postaci $3^x > 1$.

Nierówność jest równoważna nierówności $3^x > 3^0$, jej rozwiązaniem są wszystkie liczby takie, że

$x \in (\text{}, \infty)$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie monotoniczności funkcji wykładniczej w rozwiązywaniu nierówności

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje monotoniczność funkcji wykładniczej do rozwiązywania nierówności wykładniczych;
- określa typy nierówności wykładniczych;
- stosuje różne metody rozwiązywania nierówności wykładniczych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- liga zadaniowa;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego;
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z materiałem w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi uczniów, by na podstawie wiadomości zdobytych przed lekcją zaproponowali cele lekcji dotyczącej „Wykorzystania monotoniczności funkcji wykładowej w rozwiązywaniu nierówności”.
2. Uczniowie w parach przygotowują pytania związane z tematem. Czego chcą się dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują wspólnie na forum klasy ćwiczenia nr 1-2.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia,

zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Wykorzystanie monotoniczności funkcji wykładniczej w rozwiązywaniu nierówności”).

Materiały pomocnicze:

- [Monotoniczność funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać „Galerię zdjęć interaktywnych” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jej treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, aby samodzielnie rozwiązywać nierówności z zastosowaniem monotoniczności funkcji wykładniczej.
- „Galerię zdjęć interaktywnych” można zastosować jako powtórzenie wiadomości w zakresie rozwiązywania nierówności wykładniczych.
- Można też wykorzystać ją na zajęciach poświęconych funkcji wykładniczej.