



Kąt środkowy, kąt wpisany

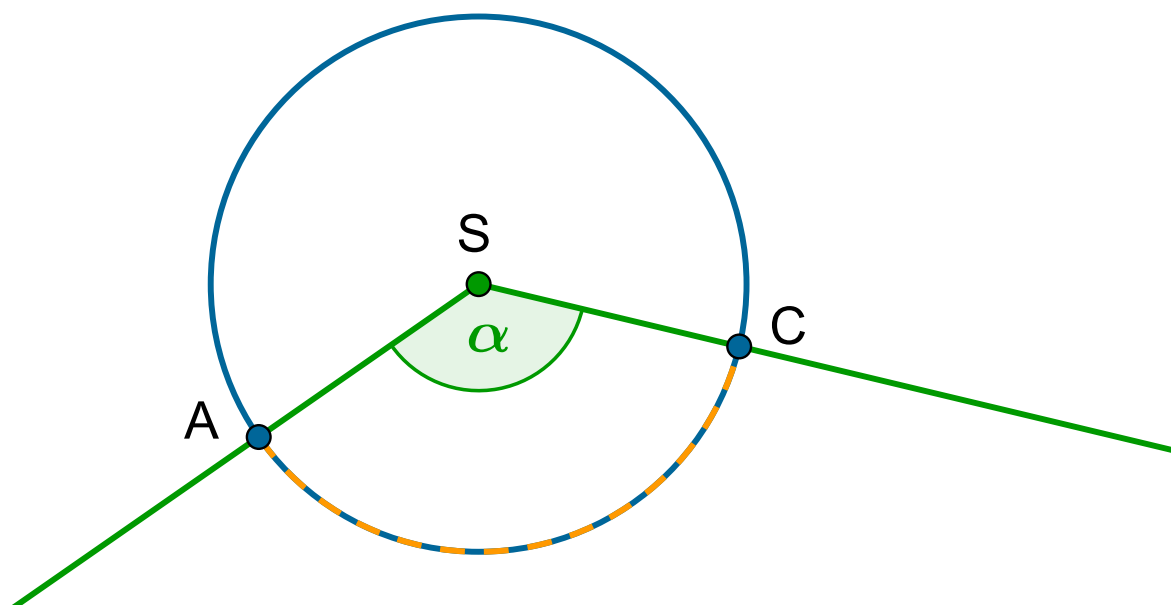
Definicja kąta środkowego. Przykład kąta wpisanego. Kąt wpisany i środkowy opisane na tym samym łuku. Ilustracja interaktywna: związek kąta środkowego z wpisanym. Twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym. Twierdzenie o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku okręgu. Twierdzenie o kącie wpisanym opartym na średnicy okręgu.

Kąt środkowy, kąt wpisany

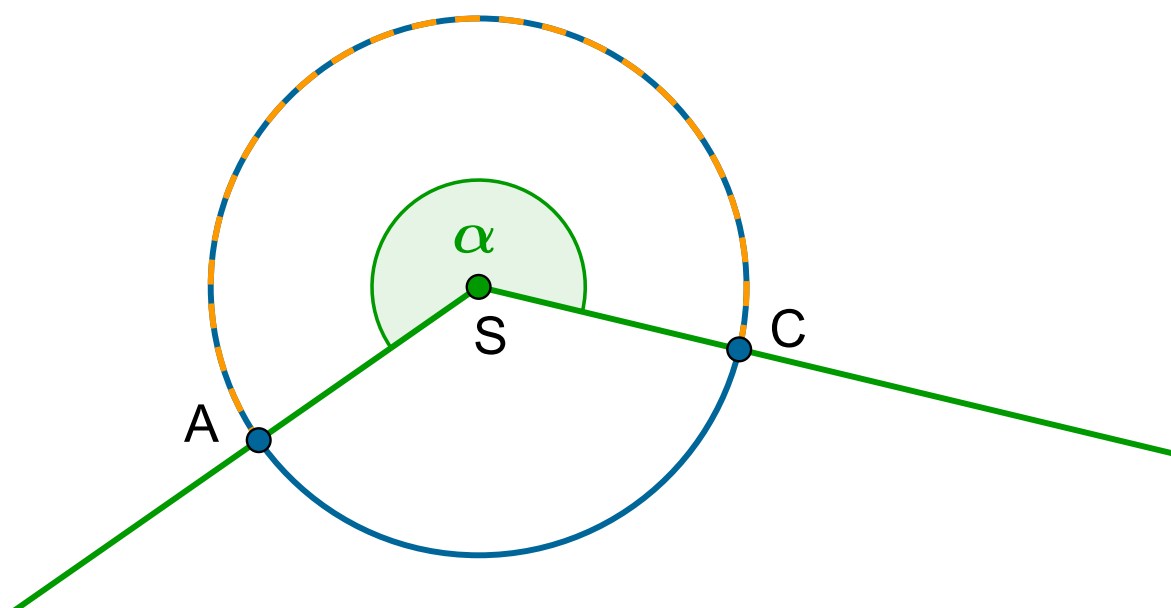
W tym materiale zawarte są wiadomości na temat kąta wpisanego i kąta środkowego okręgu. Poznasz podstawowe definicje, przykłady ilustrujące zależności między tymi kątami oraz twierdzenia związane z tym tematem.

Definicja: Kąt środkowy okręgu

Kątem środkowym okręgu nazywamy kąt, którego wierzchołek jest środkiem okręgu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Mówimy, że kąt środkowy α jest oparty na łuku AC , mając na myśli łuk zaznaczony na rysunku.

- w przypadku kątów mniejszych niż 180° , kąt środkowy jest oparty na krótszym z łuków AC ,
- w przypadku kątów większych niż 180° , kąt środkowy oparty jest na dłuższym z łuków AC ,
- w przypadku kąta równego 180° , kąt środkowy oparty jest na półokręgu.

Rozpatrzmy teraz sytuację, w której kąt środkowy i kąt wpisany oparte są na tym samym łuku okręgu.

Polecenie 1

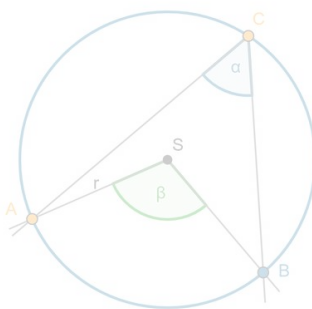
Zapoznaj się z apletem i sprawdź, jaki jest związek kąta środkowego z kątem wpisanym.

Związek kąta środkowego z wpisanym

Dane są okrąg o środku S i promieniu r oraz kąty wpisany α i środkowy β .

Zmień położenie punktów A i C .

Zaobserwuj, jaki jest związek między kątem środkowym a kątem wpisanym.

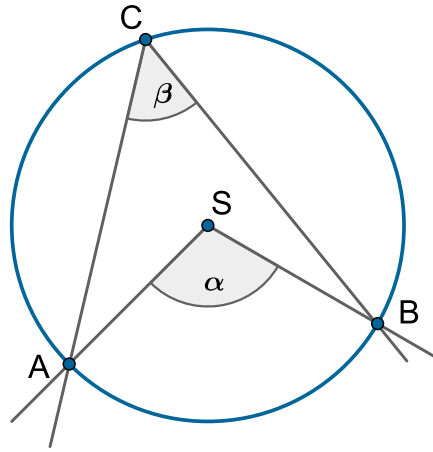


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PBV8uSZFo>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- I przypadek

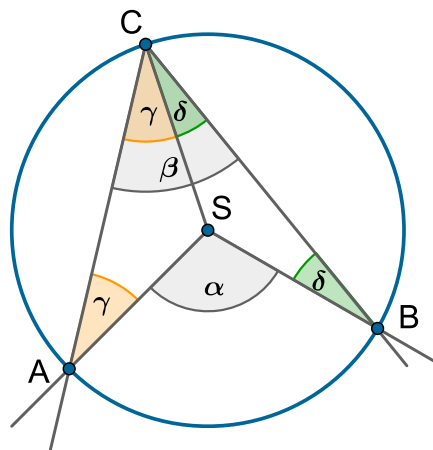
Środek okręgu leży wewnątrz kąta wpisanego.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na okręgu o środku w punkcie S i promieniu r zaznaczmy punkty A , B i C . Niech α będzie kątem środkowym opartym na łuku AB , a β niech będzie kątem wpisanym opartym na tym samym łuku AB .

Oznaczmy $\gamma = |\angle CAS|$ oraz $\delta = |\angle SBC|$. Poprowadźmy z punktu C promień okręgu. Utworzone w ten sposób trójkąty ACS oraz BCS są równoramienne. Zatem w każdym z tych trójkątów miary kątów przy podstawie są równe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zatem $|\angle ACS| = |\angle CAS| = \gamma$ i $|\angle BCS| = |\angle CBS| = \delta$.

Wtedy:

$$|\angle ASC| = 180^\circ - 2\gamma, |\angle BSC| = 180^\circ - 2\delta.$$

Suma miar kątów ASC , BSC , ASB jest równa 360°

$$|\angle ASC| + |\angle BSC| + |\angle ASB| = 360^\circ.$$

Czyli

$$180^\circ - 2\gamma + 180^\circ - 2\delta + \alpha = 360^\circ$$

$$\alpha = 2\gamma + 2\delta = 2(\gamma + \delta),$$

ale

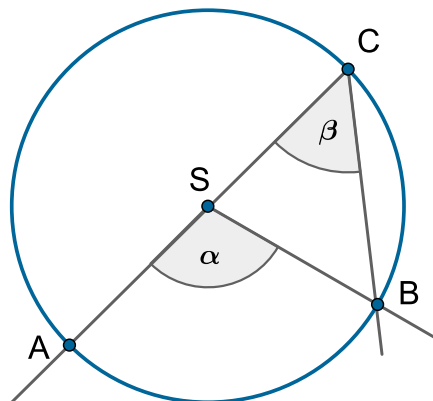
$$\gamma + \delta = \beta,$$

więc

$$\alpha = 2\beta.$$

- II przypadek

Środek okręgu leży na ramieniu kąta wpisanego.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Trójkąt BCS jest równoramienny, stąd $|\sphericalangle SBC| = \beta$. Zatem

$$|\sphericalangle BSC| = 180^\circ - 2\beta.$$

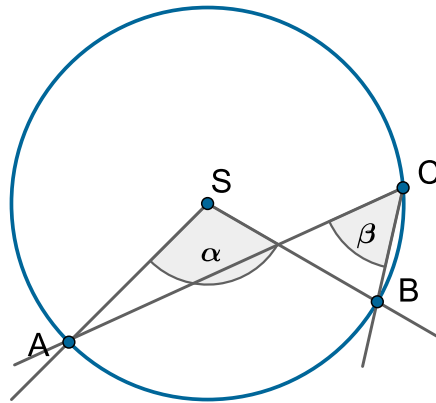
Z drugiej strony $|\sphericalangle BSC| + \alpha = 180^\circ$.

Zatem $180^\circ - 2\beta + \alpha = 180^\circ$, więc w tym przypadku także

$$\alpha = 2\beta.$$

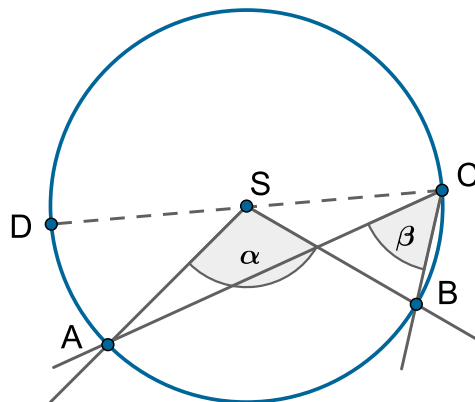
- III przypadek

Środek okręgu leży na zewnątrz kąta wpisanego.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Narysujmy średnicę okręgu przechodzącą przez punkt C .



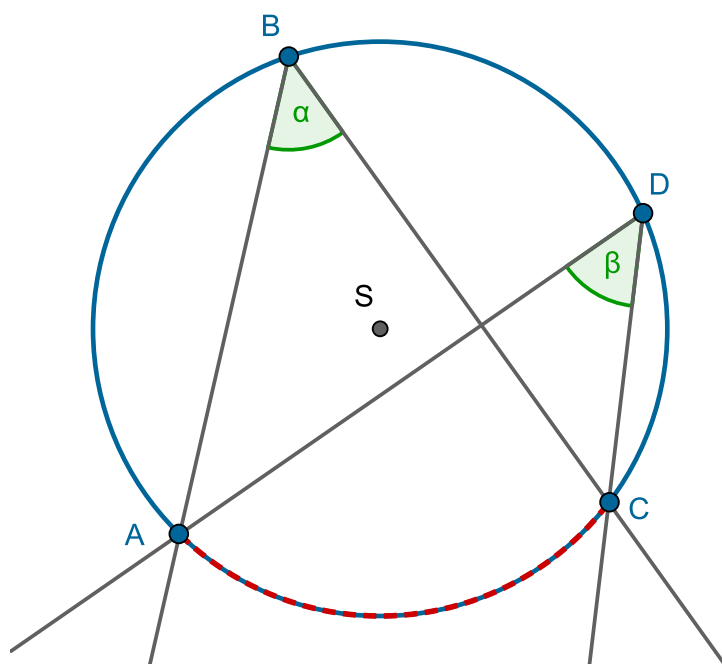
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oznaczmy przez γ kąt pomiędzy narysowaną średnicą a ramieniem AC kąta wpisanego, jak na rysunku.

Zauważmy, że kąt ASD jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt γ i jest to sytuacja opisana w przypadku II. Zatem

$$|\sphericalangle ASD| = 2\gamma.$$

Kąty wpisane oparte na tym samym łuku okręgu mają równe miary.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.