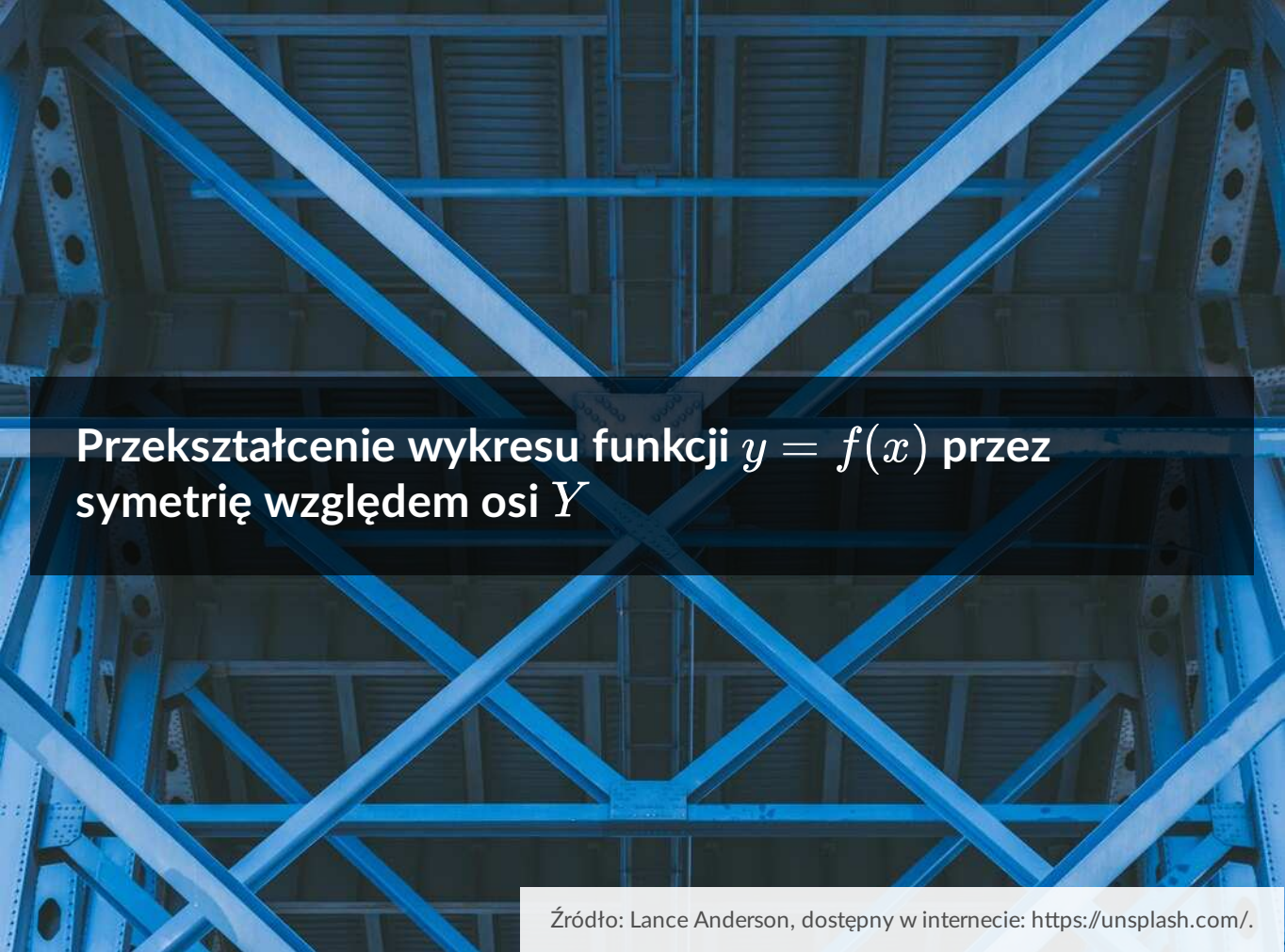




Przekształcenie wykresu funkcji  $y = f(x)$  przez symetrię względem osi  $Y$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Przekształcenie wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi $Y$

Źródło: Lance Anderson, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

W tym materiale wprowadzimy wiadomości dotyczące przekształcania wykresu funkcji  $y = f(x)$  przez symetrię względem osi  $Y$ . Przekształcenie wykresu funkcji sprowadza się do zmiany położenia wykresu funkcji w układzie współrzędnych. Inny też może być wzór funkcji, której wykres otrzymamy oraz jej własności.

Bazując na części teoretycznej materiału i podanych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

### Twoje cele

- Przeanalizujesz przykłady dotyczące przekształcania wykresu funkcji w symetrii względem osi  $Y$ .
- Naszkicujesz wykres funkcji po przekształceniu przez symetrię względem osi  $Y$ .
- Obliczysz wartości funkcji, której wykres otrzymano po przekształceniu wykresu danej funkcji.
- Określisz własności funkcji, której wykres otrzymano po przekształceniu wykresu danej funkcji.
- Wykorzystasz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

# Przeczytaj

W materiale omówimy przekształcenie wykresu funkcji w **symetrii względem osi rzędnych** układu współrzędnych.

## **Twierdzenie: Symetria wykresu funkcji względem osi $Y$**

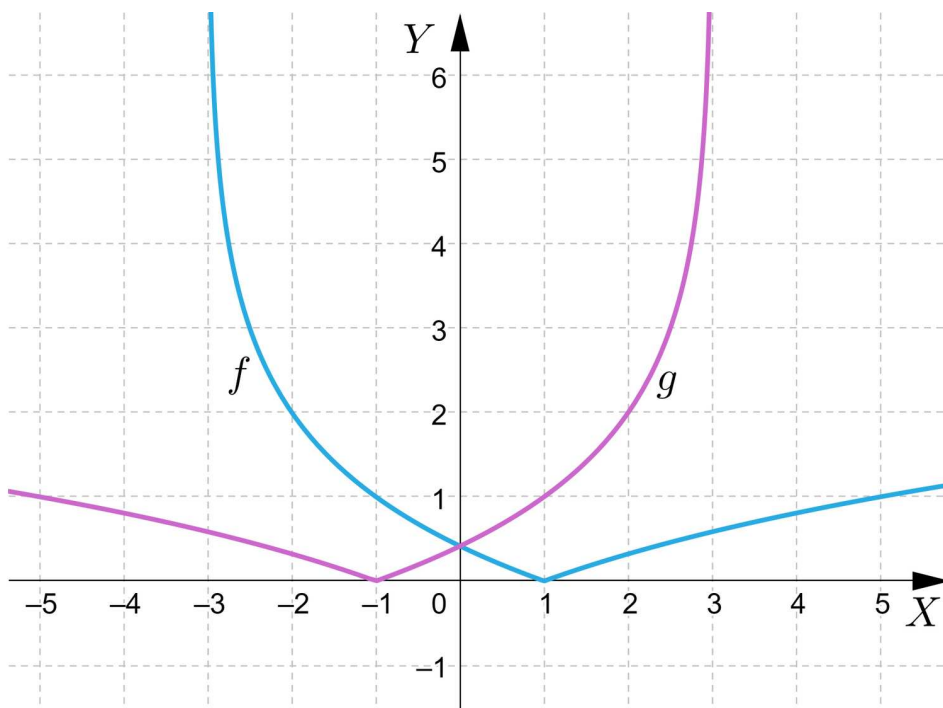
Wykres funkcji  $y = f(-x)$  otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji  $y = f(x)$  względem osi  $Y$ .

Do naszkicowania wykresu funkcji w symetrii względem osi  $Y$  wystarczy skorzystać z poniższej własności.

## **Własność: Współrzędne punktu w symetrii względem osi rzędnych układu współrzędnych**

Obrazem punktu  $P = (x, y)$  w symetrii względem osi  $Y$  układu współrzędnych jest punkt  $P' = (-x, y)$ .

Odbicie symetryczne wykresu funkcji  $f$  względem osi  $Y$  przedstawiono na poniższym rysunku.



Jeżeli po przekształceniu wykresu funkcji  $f$  przez symetrię względem osi  $Y$  układu współrzędnych, otrzymamy wykres funkcji  $g$ , to dziedziny tych funkcji mogą się różnić, ale zbiory wartości są takie same.

## **Przykład 1**

Dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $\{-3, -1, 2, 4, 5\}$ .

Wyznamy dziedzinę funkcji określonej wzorem  $g(x) = f(-x)$ .

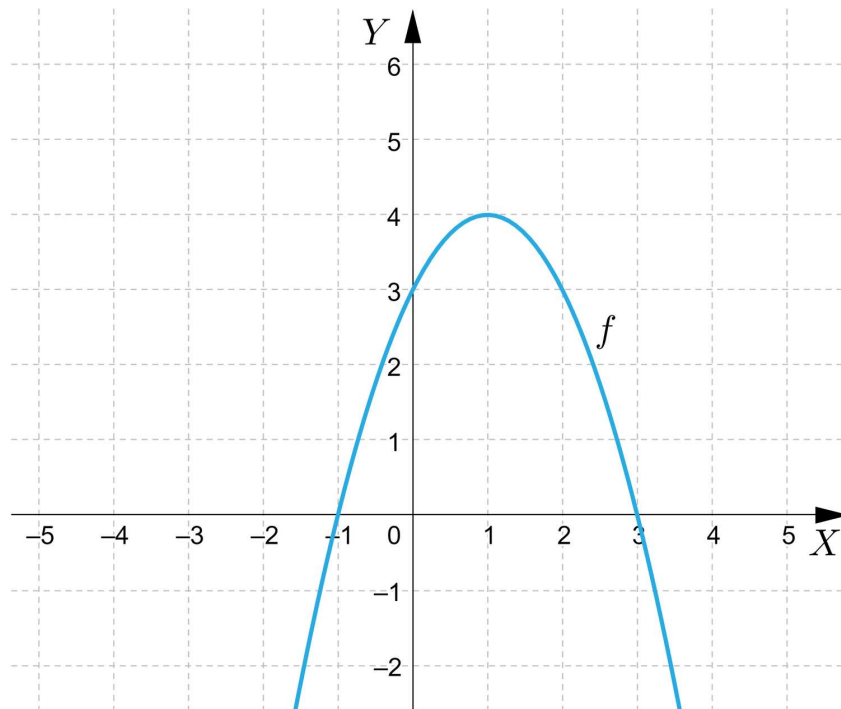
**Rozwiązanie:**

Dziedziną funkcji określonej wzorem  $g(x) = f(-x)$  jest zbiór  $\{-5, -4, -2, 1, 3\}$ .

Jeżeli przekształcimy wykres funkcji  $f$  w symetrii względem osi rzędnych układu współrzędnych, otrzymując w ten sposób wykres funkcji  $g$ , to funkcje te mogą mieć inne przedziały monotoniczności oraz miejsca zerowe (o ile istnieją).

**Przykład 2**

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f$ .

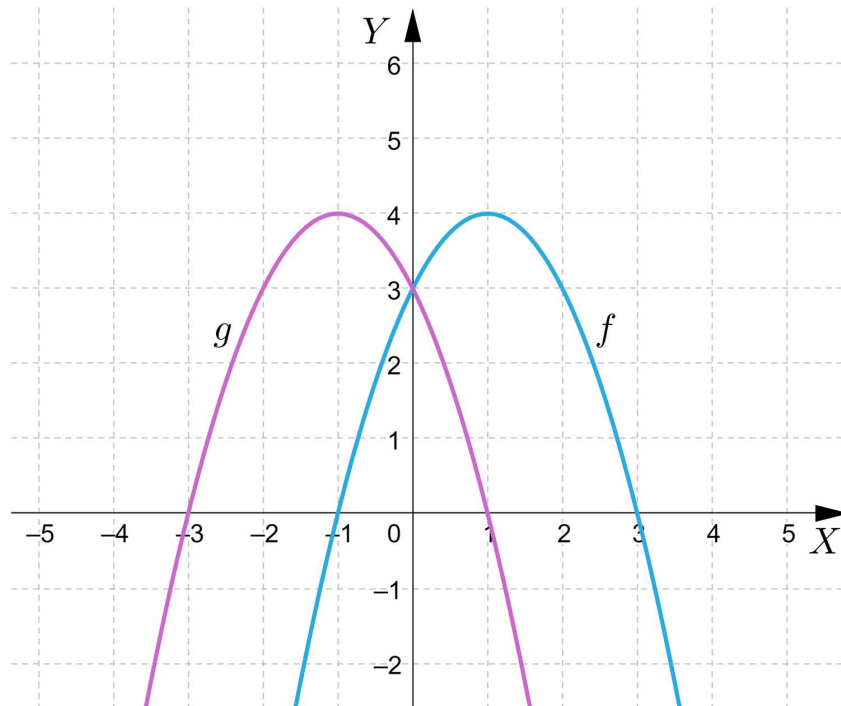


Naszkieujemy wykres funkcji określonej  $g(x) = f(-x)$ , a następnie dla funkcji  $g$  określimy:

- a) dziedzinę i zbiór wartości,
- b) miejsca zerowe,
- c) przedziały monotoniczności.

**Rozwiązanie:**

Przekształcając wykres funkcji  $f$  w symetrii względem osi  $Y$ , otrzymamy wykres funkcji taki, jak na poniższym rysunku:

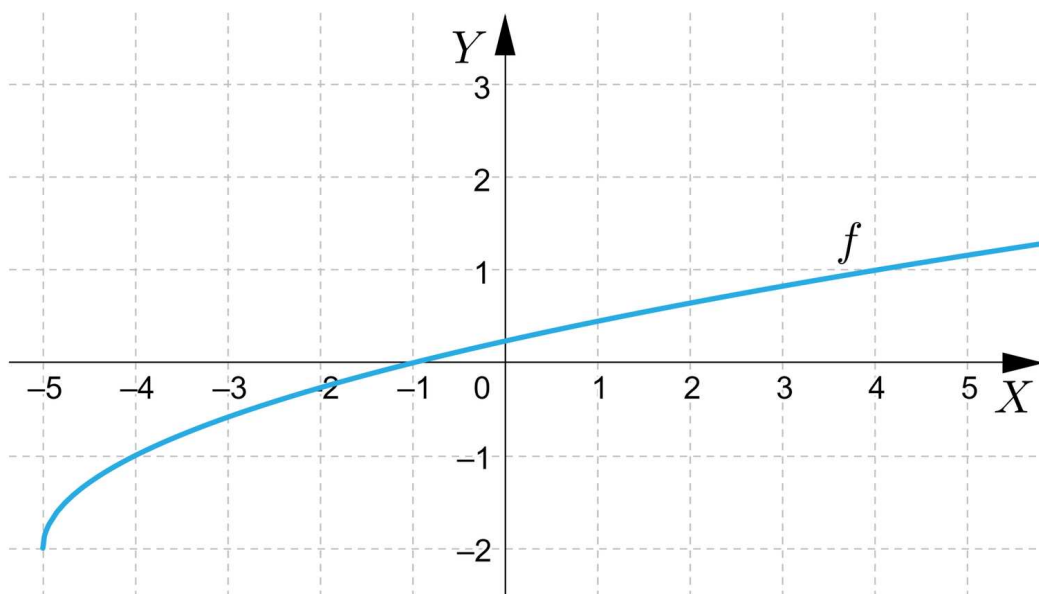


Dla funkcji  $g$  określamy:

- a) dziedzinę:  $x \in \mathbb{R}$  oraz zbiór wartości:  $(-\infty, 4)$ ,
- b) miejsca zerowe:  $(-3)$  oraz  $1$ ,
- c) przedziały monotoniczności: funkcja jest rosnąca w przedziale  $(-\infty, -1)$  oraz malejąca w przedziale  $(-1, \infty)$ .

### Przykład 3

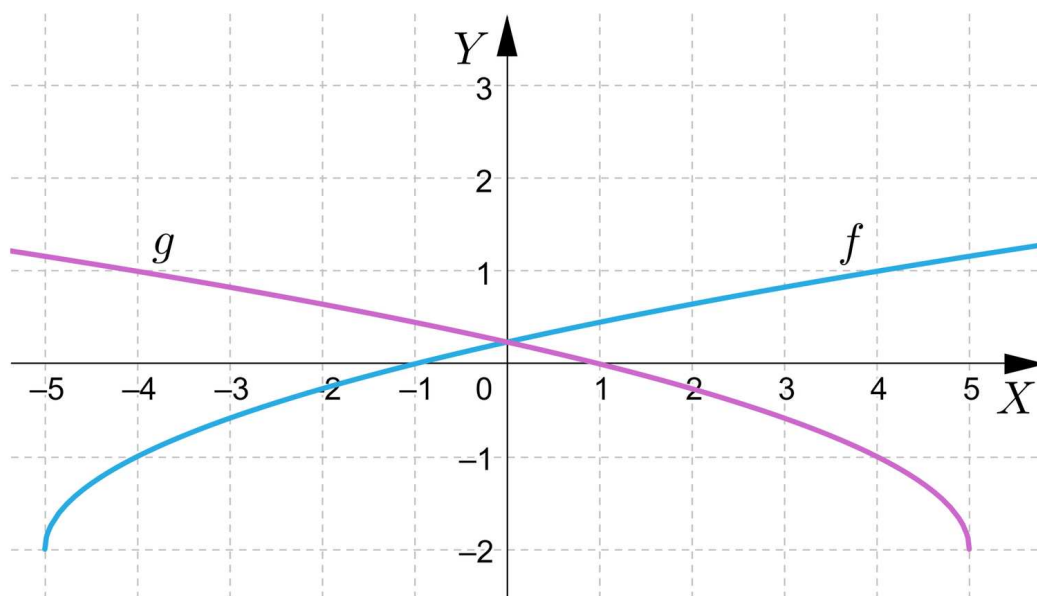
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f$  określonej dla liczb nie mniejszych od  $-5$ .



Naszukujemy wykres funkcji określonej wzorem  $g(x) = f(-x)$ , a następnie określimy miejsca zerowe i przedziały monotoniczności tej funkcji.

**Rozwiązanie:**

Wykres funkcji  $g$  przedstawia się następująco:

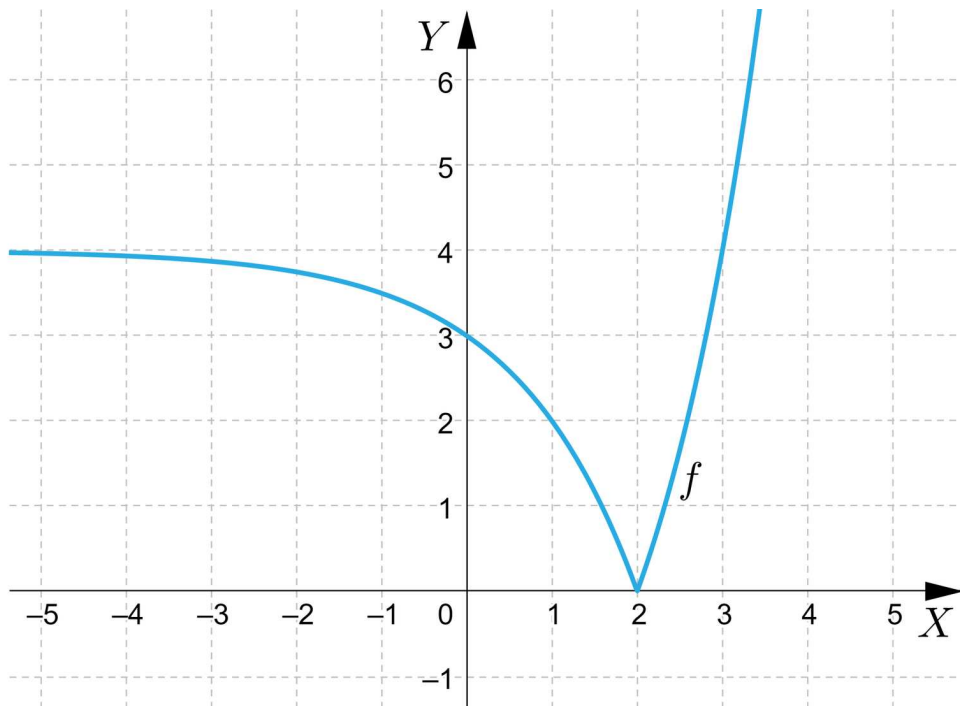


Z wykresu odczytujemy miejsce zerowe: 1.

Funkcja jest malejąca w przedziale  $(-\infty, 5)$ .

#### Przykład 4

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f$ .



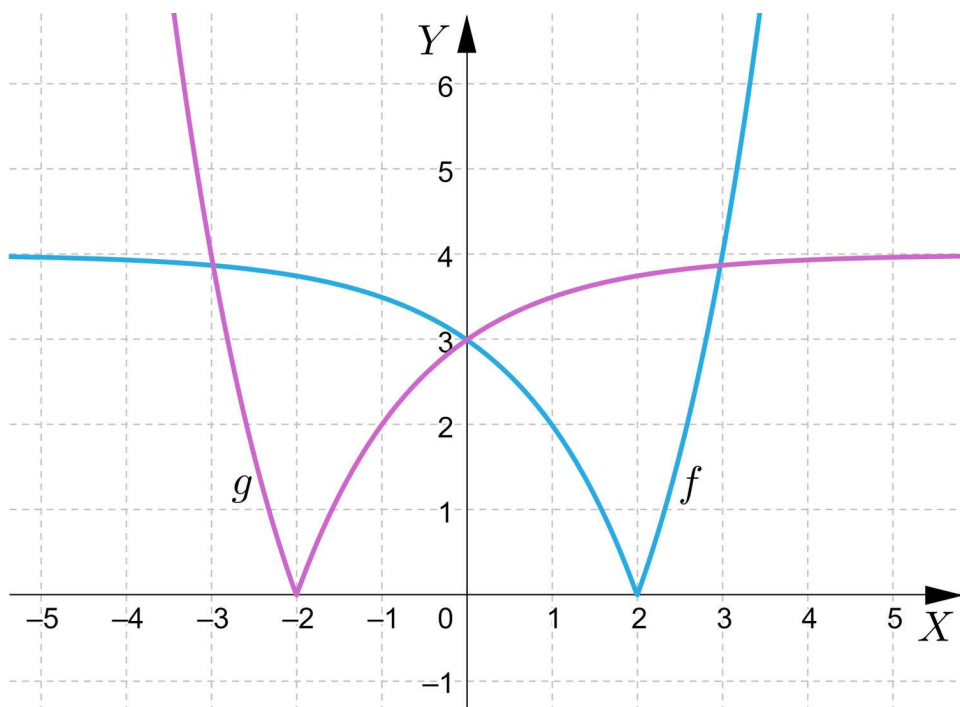
Naszkicujemy wykres funkcji określonej wzorem  $g(x) = f(-x)$ , a następnie wyznaczymy:

a)  $g(x) > 4$ ,

b)  $g(-2) + g(0)$ .

**Rozwiązanie:**

Wykres funkcji  $g$  przedstawia się następująco:



a)  $g(x) > 4$  dla  $(-\infty, -3)$ ,

b)  $g(-2) + g(0) = 0 + 3 = 3$ .

Przy przekształcaniu wykresu funkcji w symetrii względem osi  $Y$  zmienia się wzór funkcji.

Mając dany wzór funkcji  $f$ , możemy wyznaczyć wzór funkcji  $g(x) = f(-x)$ .

### Przykład 5

Dana jest funkcja  $f$ . Wyznamy wzór funkcji  $g(x) = f(-x)$ , jeżeli:

a)  $f(x) = \sqrt{x+1} + 1$ ,

b)  $f(x) = \frac{2x}{1-x}$ .

**Rozwiązanie:**

a)  $g(x) = f(-x) = \sqrt{-x+1} + 1$ ,

b)  $g(x) = f(-x) = \frac{-2x}{x+1}$ .

## Słownik

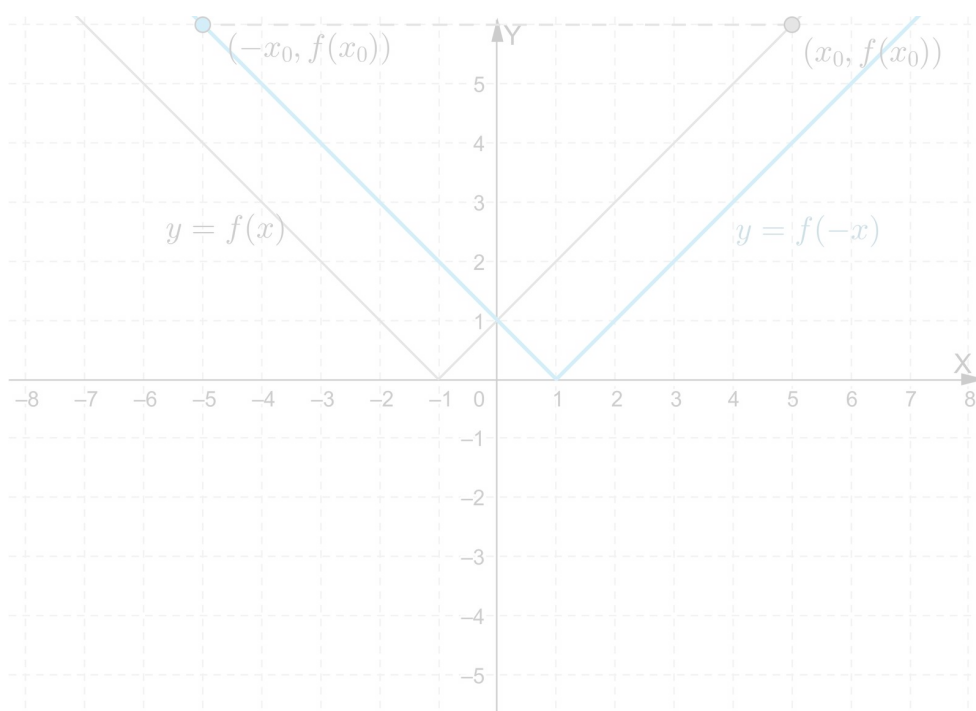
**odbicie symetryczne wykresu funkcji względem osi rzędnych układu współrzędnych**

przekształcenie wykresu funkcji  $f$  względem osi  $Y$  - otrzymanie wykresu funkcji  $g(x) = f(-x)$

# Aplet

## Polecenie 1

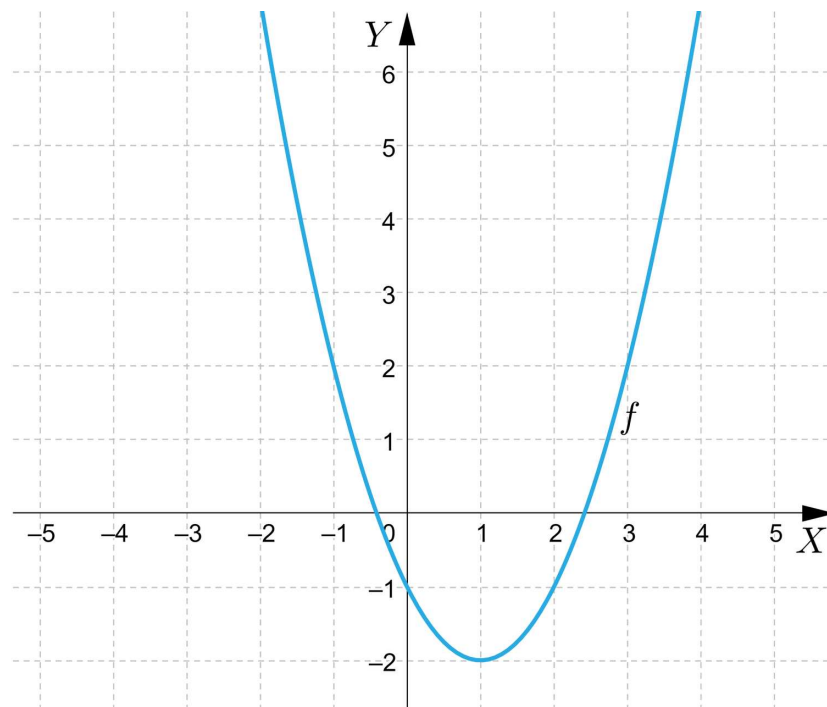
Uruchom aplet, a następnie przeanalizuj krok po kroku, w jaki sposób przekształcamy wykres funkcji  $f$  w symetrii względem osi  $Y$ . Za każdym razem określ dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe (o ile istnieją) oraz przedziały monotoniczności funkcji po przekształceniu jej wykresu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D2AjJCx4a>

## Polecenie 2

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f$  określonej wzorem  $f(x) = (x - 1)^2 - 2$ .



Naszkiuj wykres funkcji określonej wzorem  $g(x) = f(-x)$ , a następnie:

- wyznacz wzór funkcji  $g(x) = f(-x)$ ,
- sprawdź, czy wartości funkcji  $f(x)$  i  $g(x) = f(-x)$  dla argumentów 0 oraz 2 są takie same,
- określ przedziały monotoniczności funkcji  $g$ .

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



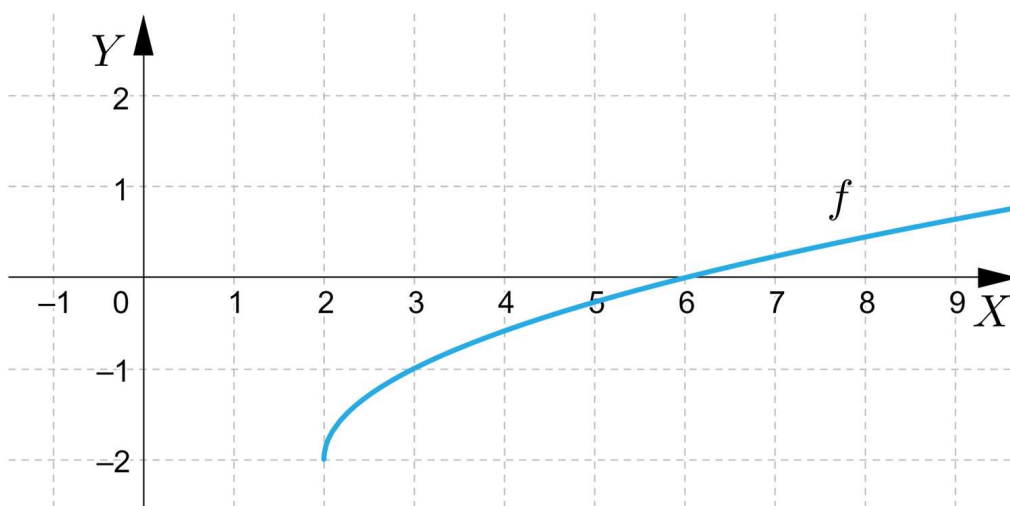
Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f$  określonej dla liczb nie mniejszych od 2.



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



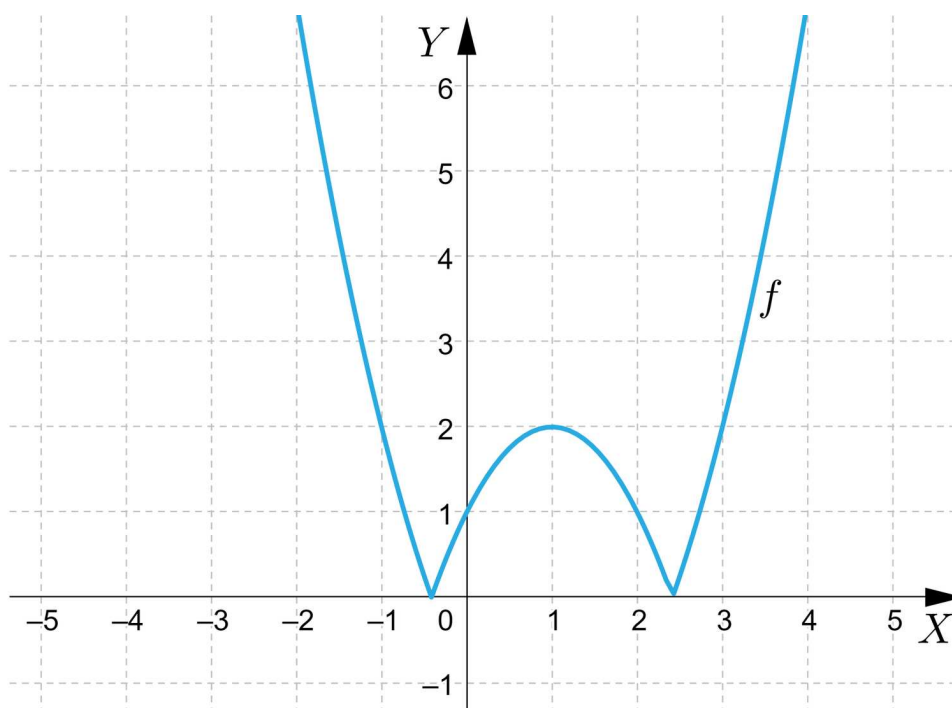
Ćwiczenie 7



## Ćwiczenie 8



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f$ .



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Tomasz Wójtowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Przekształcenie wykresu funkcji  $y = f(x)$  przez symetrię względem osi  $Y$

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

V. Funkcje

Zakres podstawowy. Uczeń:

12) na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  szkicuje wykresy funkcji  $y = f(x - a)$ ,  $y = f(x) + b$ ,  $y = -f(x)$ ,  $y = f(-x)$ .

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- zapisuje wzór na przekształcenie wykresu funkcji przez symetrię względem osi  $Y$ ;
- wyznacza wartości funkcji po przekształceniu wykresu funkcji przez symetrię względem osi  $Y$ ;
- wymienia własności funkcji, które zmieniają się po przekształceniu wykresu funkcji przez symetrię względem osi  $Y$ ;
- szkicuje wykresy funkcji w symetrii względem osi rzędnych układu współrzędnych.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- burza mózgów.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Przekształcenie wykresu funkcji  $y = f(x)$  przez symetrię względem osi  $Y$ ” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie w 4-osobowych grupach zapoznają się z informacjami z sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z materiałem w sekcji „Aplet”. Zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w nim przedstawione – nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia numer 1 i 2 w sekcji „Sprawdź się”. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Uczniowie rozwiązują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5 w sekcji „Sprawdź się”. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania przed całą klasą. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
5. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 w sekcji „Sprawdź się”. Po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.

**Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

**Praca domowa:**

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

**Materiały pomocnicze:**

- [Symetria wykresu funkcji](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Materiał w sekcji „Aplet” można wykorzystać jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w zakresie przekształcania wykresu funkcji w symetrii względem osi rzędnych układu współrzędnych.
- Można też wykorzystać na zajęciach poświęconych określaniu własności funkcji na podstawie jej wykresu.