



Przydatny symbol Newtona

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



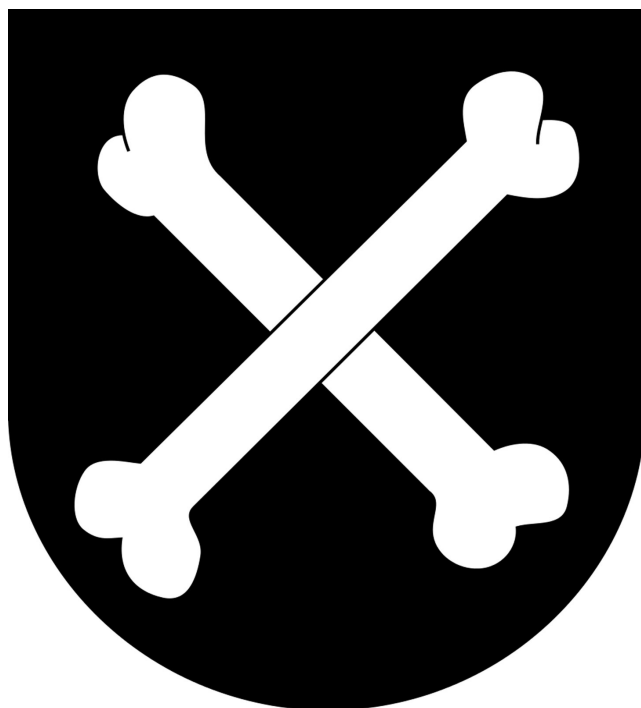
Przydatny symbol Newtona

Źródło: Roger Victorino, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Izaak Newton, jeden z najwybitniejszych uczonych, był człowiekiem bardzo zapracowanym. Podobno pewnego razu zaprosił na obiad przyjaciela, ale zapomniał o tym uprzedzić służbę. Gdy gość się zjawił, zobaczył na stole jedno nakrycie, a stwierdziwszy, że Newton akurat dokonuje obliczeń, zjadł obiad i – nie chcąc przeszkadzać – wyszedł.

– To dziwne – rzekł uczony skończywszy pracę. – Gdyby nie dowody rzeczowe, które stoją na stole, mógłbym sądzić, że nie jadłem dziś obiadu ...

Newton, dzięki umiejętności łączenia elementów różnych dziedzin wiedzy, dokonał wielu przełomowych odkryć między innymi w mechanice klasycznej, astronomii



Herb Isaaca Newtona

Źródło: Avalokitesvara, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 3.0.

i optyce. Był też genialnym matematykiem. Na jego cześć nazwano symbol, który poznamy w tym materiale.

Twoje cele

- Obliczysz wartość symbolu Newtona w sytuacjach kombinatorycznych.
- Udowodnisz niektóre własności symbolu Newtona.
- Wyznaczysz współczynniki liczbowe rozwinięcia potęgi dwumianu.
- Zastosujesz symbol Newtona w dowodzeniu twierdzeń z teorii liczb.

Przeczytaj

Definicja: symbol Newtona (definicja funkcyjna)

Symbolem Newtona (współczynnikiem dwumianowym, dwumiennym) Newtona nazywamy funkcję dwóch argumentów naturalnych k, n określoną wzorem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

gdzie $0 \leq k \leq n$.

Symbol $\binom{n}{k}$ czytamy: n nad k lub n po k .

Wartość symbolu Newtona można obliczyć w uproszczony sposób:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

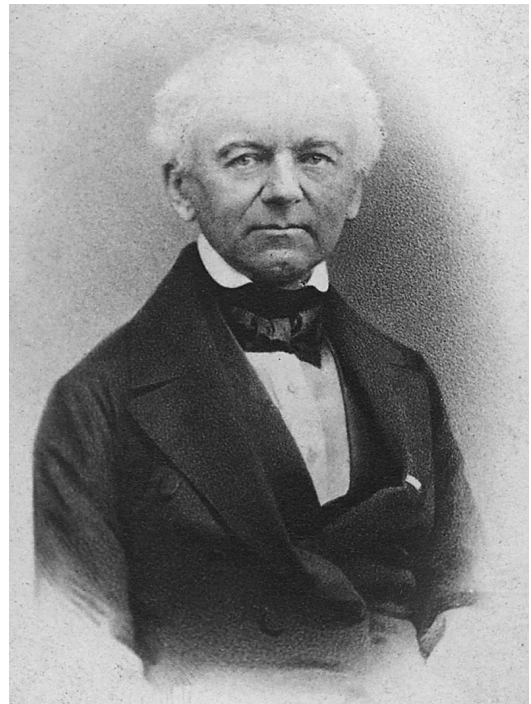
Symbol $\binom{n}{k}$ jako pierwszy wprowadził fizyk i matematyk austriacki Andreas von Ettingshausen, najbardziej znany z tego, że zaprojektował maszynę elektromagnetyczną, która wykorzystywała indukcję elektryczną do wytwarzania energii.

Podstawowe własności symbolu Newtona wynikają bezpośrednio z definicji.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$



Andreas Freiherr von Ettingshausen, 1796 - 1878
Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org,
domena publiczna.

Przykład 1

Zapoznaj się z filmem, który przybliży Ci sposoby obliczania wartości symbolu Newtona.

Trwa wczytywanie danych..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DBCdsmvsn>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący symbolu Newtona.

Symbol Newtona występuje w wielu dziedzinach matematyki – algebrze, teorii ciągów, prawdopodobieństwie, statystyce. W tym materiale pokażemy tylko niektóre jego zastosowania.

Przykład 2

Niech p będzie liczbą pierwszą. Wykażemy, że liczba p dzieli każdą liczbę $\binom{p}{k}$ dla $k = 1, 2, \dots, p - 1$.

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!}$$

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$$

W liczniku ułamka jednym z czynników jest p . W mianowniku występują liczby mniejsze od p , które nie są dzielnikami p (za wyjątkiem liczby 1), gdyż liczba p jest liczbą pierwszą.

Liczba $\binom{p}{k}$ jest całkowita, zatem w jej rozkładzie na czynniki pierwsze występuje p . Czyli liczba p dzieli $\binom{p}{k}$, co należało wykazać.

Symbol Newtona równy jest liczbie wszystkich k -elementowych kombinacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego (nieuporządkowanego). W nomenklaturze kombinatorycznej współczynnik ten z reguły oznacza się C_n^k .

Przykład 3

Obliczymy, ile jest sposobów wyboru 2 spośród 4 elementów: $\{A, B, C, D\}$.

Wypisujemy wszystkie możliwości:

$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}$. Jest ich 6.

Wyznamy teraz te możliwości, korzystając z [symbolu Newtona](#).

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

Otrzymaliśmy ten samy wynik. Zatem jest 6 możliwości wyboru 2 spośród 4 elementów.

Przykład 4

Gra w Lotto polega na wytypowaniu wyników losowania 6 spośród 49 liczb.

Obliczymy ile jest możliwych wyników z trafioną „piątką”.

Aby trafić „piątkę” należy wybrać pięć liczb spośród sześciu, które zostaną wylosowane i jedną liczbę spośród pozostałych.

$$\binom{6}{5} \cdot \binom{49-6}{1} = 6 \cdot \binom{43}{1} = 6 \cdot 43 = 258$$

Jest zatem 258 możliwych wyników z trafioną „piątką”.

Przykład 5

Za pomocą symbolu Newtona określane są liczby Catalana, nazwane tak na cześć belgijskiego matematyka Eugene Catalana. Liczby te można wyznaczyć, korzystając ze wzoru:

$$c_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \text{ dla } n \geq 0$$

Liczby Catalana mają liczne zastosowania kombinatoryczne, na przykład do określania liczby podziałów wielokąta na trójkąty.

Obliczymy szóstą liczbę w ciągu liczb Catalana.

$$c_5 = \frac{1}{5+1} \cdot \binom{10}{5} = \frac{1}{6} \cdot \frac{10!}{5! \cdot 5!}$$

$$c_5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6 \cdot 120} = 42$$

Początkowe **liczby Catalana**:

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, ...

[Symbol Newtona](#) związany jest ze wzorem dwumiennym (dwumianowym) Newtona (jako współczynnik w k -tym wyrazie rozwinięcia n -tej potęgi dwu składników – stąd nazwa –

współczynnik dwumienny).

Szczególne przypadki twierdzenia dwumianowego znane były już za czasów Euklidesa. Uogólnienie twierdzenia przypisuje się Izaakowi Newtonowi.

Zgodnie z twierdzeniem dwumianowym potęgę $(x + y)^n$ można zapisać jako sumę jednomianów postaci $ax^k y^t$. Współczynniki a przy jednomianach to symbole Newtona, suma liczb k i t jest równa n .

Twierdzenie: Wzór dwumianowy Newtona

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots \\ \dots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

W szczególności podstawiając $x = 1, y = 1$ otrzymujemy:

$$(1 + 1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Przykład 6

Wykażemy, że

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1} + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} = 0$$

Do wzoru dwumianowego Newtona podstawiamy $x = 1, y = -1$.

$$(1 - 1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1} + (-1)^n \cdot \binom{n}{n}$$

Czyli

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1} + (-1)^n \cdot \binom{n}{n}$$

Przykład 7

Wyznamy współczynniki liczbowe rozwinięcia potęgi $(1 + x)^5$.

$$(1 + x)^5 = \binom{5}{0} \cdot x^0 + \binom{5}{1} \cdot x^1 + \binom{5}{2} \cdot x^2 + \binom{5}{3} \cdot x^3 +$$

$$+ \binom{5}{4} \cdot x^4 + \binom{5}{5} \cdot x^5$$

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$$

Odpowiedź:

Współczynniki liczbowe to: 1, 5, 10, 10, 5, 1.

Słownik

symbol Newtona

symbolem Newtona (współczynnikiem dwumianowym, dwumiennym)

Newtona nazywamy funkcję dwóch argumentów naturalnych k, n określoną wzorem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

gdzie $0 \leq k \leq n$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się podstawowymi własnościami symbolu Newtona przedstawionymi w animacji, starając się najpierw samodzielnie rozwiązać przedstawione tam problemy.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DCmHphw3C>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący własności symbolu Newtona.

Polecenie 2

Wykaż, że $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ dla liczb naturalnych $0 < k \leq n$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. W rozwinięciu potęgi $(x + y)^7$ współczynnik liczbowy a jednomianu ax^3y^4 jest równy:

☐ 35

☐ 28

☐ 7

☐ 21

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. W rozwinięciu potęgi $(x + y)^8$ liczba 70 jest współczynnikiem liczbowym jednomianu:

☐ x^5y^3

☐ x^3y^5

☐ x^6y^2

☐ x^4y^4

Ćwiczenie 3



Połącz w pary równe liczby.

$$\binom{4}{2}$$

7

$$\binom{8}{3}$$

6

$$\binom{7}{5}$$

28

$$\binom{7}{6}$$

21

$$\binom{8}{6}$$

56

Ćwiczenie 4



Uzupełnij sumę algebraiczną, wpisując odpowiednie liczby naturalne.

$$(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y + \boxed{} \cdot x^4y^2 + \boxed{} \cdot x^3y^3 + \boxed{} \cdot x^2y^4 + \boxed{} \cdot xy^5 + y^6$$

Ćwiczenie 5



Przeciągnij takie wyrażenie, aby uzyskać równość prawdziwą.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \boxed{}$$

$$2^{n+1}$$

$$2^n$$

$$n^2$$

$$(n+1)^2$$

Ćwiczenie 6



Zaznacz, czy dana równość jest prawdziwa, czy fałszywa.

Równość	Równość prawdziwa	Równość fałszywa
$\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$	☐	☐
$\binom{2n}{2} = 2 \cdot \binom{n}{2} + n^2$	☐	☐
$\binom{n}{k} = \frac{k}{n} \cdot \binom{n-1}{k-1}$	☐	☐
$(n-k) \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k}$	☐	☐

Ćwiczenie 7



Wykaż, że

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1},$$

gdzie n, k to liczby naturalne takie, że $0 < k \leq n$.

Ćwiczenie 8



Niech k, n będą liczbami naturalnymi większymi od 1, liczba $p = 2k - 1$ niech będzie liczbą pierwszą.

Wykaż, że jeżeli liczba $A = \binom{n}{2} - \binom{k}{2}$ jest podzielna przez p , to jest podzielna przez p^2 .

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przydatny symbol Newtona

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona): $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$;

3) korzysta ze wzorów na: $a^3 + b^3$, $(a + b)^n$ i $(a - b)^n$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza wartość symbolu Newtona w sytuacjach kombinatorycznych,
- udowadnia niektóre własności symbolu Newtona,

- wyznacza współczynniki liczbowe rozwinięcia potęgi dwumianu,
- stosuje symbol Newtona w dowodzeniu twierdzeń z teorii liczb.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- papierowa wstęga,
- bezludna wyspa.

Formy pracy:

- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego,
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer,
- długie papierowe paski.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie, pracując w parach metodą papierowej wstęgi, powtarzają wiadomości na temat symbolu Newtona (z kartonu wycinają długi pasek – może być skręcony – i na tym pasku na przemian zapisują pozyskane wcześniej informacje na temat symbolu Newtona).
2. Po skończonej pracy wymieniają się wstęgami z sąsiadami z innej ławki. Odczytują zapisane na wstędze sąsiadów wiadomości, ewentualnie dopisują to, czego tam nie ma i wstęgę podają dalej. W ten sposób wszystkie pary uczniów przypomną sobie pożądane wiadomości.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w małych grupach (3–4 osobowych) metodą bezludnej wyspy – uczniowie wyobrażają sobie, że wylądowali na bezludnej wyspie, więc muszą sami sobie radzić. Ich zadaniem jest rozwiązanie wszystkich ćwiczeń interaktywnych w określonym czasie (np. zanim na wyspie zapadnie noc).
2. Są na wyspie sami, więc nie wolno im zwracać się do nikogo o pomoc. Mają tylko do dyspozycji materiał z sekcji „Przeczytaj” i „Animacja”. Nie wolno przy tym, przed

rozwiązaniem zadania, sprawdzać odpowiedzi. Każde źle rozwiązane zadanie to dodatkowa doba na wyspie (czyli rozwiązanie w domu dodatkowych zadań). Grupa, która jako pierwsza bezbłędnie rozwiąże wszystkie ćwiczenia, odpływa z wyspy (czyli otrzymuje stopień bardzo dobry).

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
Liderzy grup opowiadają o sposobach pracy grup, napotkanych trudnościach, dobrych pomysłach.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par. Wyjaśnia wątpliwości.

Praca domowa:

Grupy, które nie rozwiązały poprawnie któregoś z ćwiczeń interaktywnych, mają za zadanie ułożenie 2 zadań podobnego typu i zapisanie co najmniej 2 sposobów ich rozwiązania.

Materiały pomocnicze:

- [Symbol Newtona](#)
- [Własności symbolu Newtona](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać, wprowadzając pojęcie symbolu Newtona lub na zajęciach poświęconych własnościom symbolu Newtona.