



Siatka i pole powierzchni czworościanu foremnego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Nazwisko Alexandra Grahama Bella, szkockiego naukowca, jest nam dobrze znane w związku z jego wynalazkiem – telefonem. Był on jednak zafascynowany również czworobokami, z których budował latawce. Miały one nie tylko estetyczny wymiar, ale

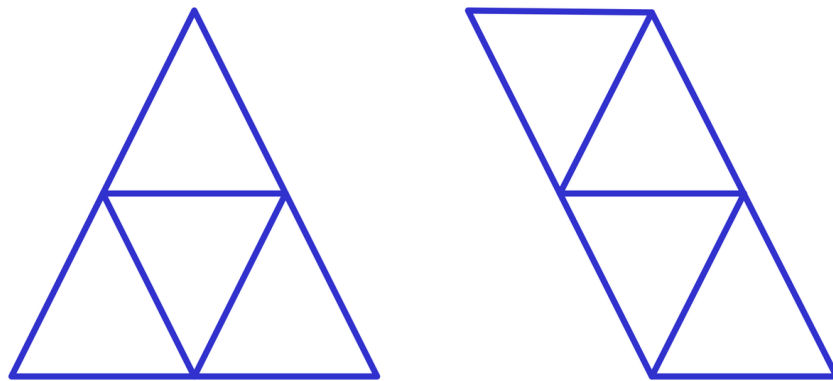
również praktyczny. Ich wielkość była na tyle duża, że mogły pomieścić człowieka i silnik. Jeden z latawców, nazwany Cygnet, zbudowany był z aż 3393 czworoscianów.

Twoje cele

- Narysujesz siatkę czworoscianu foremego.
- Wyznaczysz pole powierzchni czworoscianu foremego.

Przeczytaj

Czworościan foremny jest bryłą – figurą przestrzenną. Siatka wielościanu, tutaj czworościanu, po rozcięciu jego niektórych krawędzi daje nam spójny obraz tej bryły na płaszczyźnie. I w drugą stronę, możemy z płaskiego materiału stworzyć bryłę sklejąc jej odpowiednie brzegi. W komunikacji posługujemy się głównie obrazem, płaskim przedstawieniem obiektów. Dlatego **siatka** pozwala nam obejrzeć wszystkie ściany bryły „jednym rzutem oka”.



Rozróżniamy tylko dwa kształty siatek czworościanu foremnego: jedna w postaci trójkąta równobocznego, a druga w postaci równoległoboku.

Pole powierzchni P czworościanu foremnego o krawędzi długości a możemy obliczyć mnożąc pole powierzchni trójkąta równobocznego o boku a przez liczbę ścian czworościanu, czyli 4:

$$P = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$$

Przykład 1

Pole siatki czworościanu foremnego wynosi $32\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Znajdź długość krawędzi tego czworościanu.

Rozwiązanie:

Pole siatki czworościanu $P = 32\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Na **siatkę** składają się 4 trójkąty równoboczne, stąd pole jednej ściany czworościanu foremnego wynosi $P_s = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Skorzystamy ze wzoru na pole trójkąta równobocznego: $P_s = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}$.

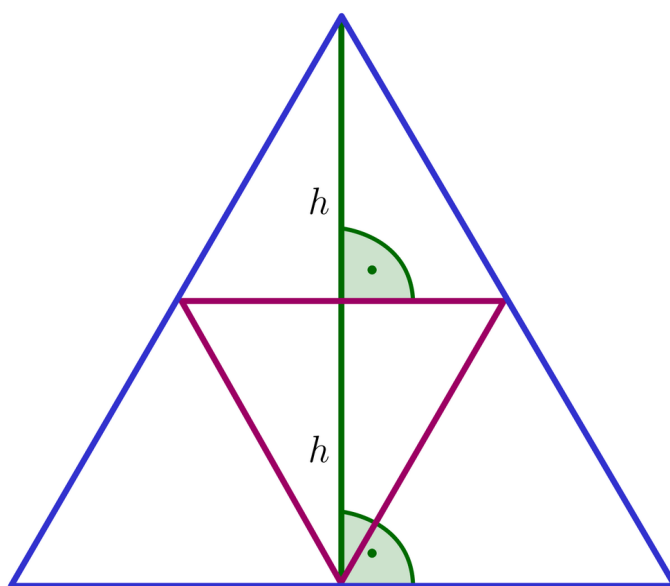
Długość krawędzi czworościanu wynosi zatem $a = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ cm.

Przykład 2

Wysokość trójkąta równobocznego stanowiącego siatkę czworościanu foremnego ma długość $8\sqrt{3}$ cm. Wyznacz pole podstawy czworościanu foremnego.

Rozwiązanie:

Wysokość trójkąta równobocznego stanowiącego siatkę czworościanu foremnego stanowi dwie długości wysokości ściany czworościanu foremnego, trójkąta równobocznego będącego również podstawą czworościanu.



Zatem wysokość podstawy czworościanu wynosi $h = 4\sqrt{3}$ cm.

Ponieważ $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, to długość boku trójkąta równobocznego $a = 8$ cm.

Zatem pole podstawy czworościanu foremnego $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8^2}{4}\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ cm².

Przykład 3

Sebastian wykonał z papieru kartonowego model czworościanu foremnego dla swojej siostry Zuzi. Siostrze bardzo spodobała się bryła i poprosiła brata, aby następnego dnia wykonał większy model. Sebastian postanowił zwiększyć długość krawędzi modelu czworościanu o 60%. Oblicz, o ile procent zwiększy się pole powierzchni siatki czworościanu, który wykona chłopiec.

Rozwiązanie:

Niech a oznacza długość krawędzi czworościanu mniejszego, a P_m pole siatki tego czworościanu.

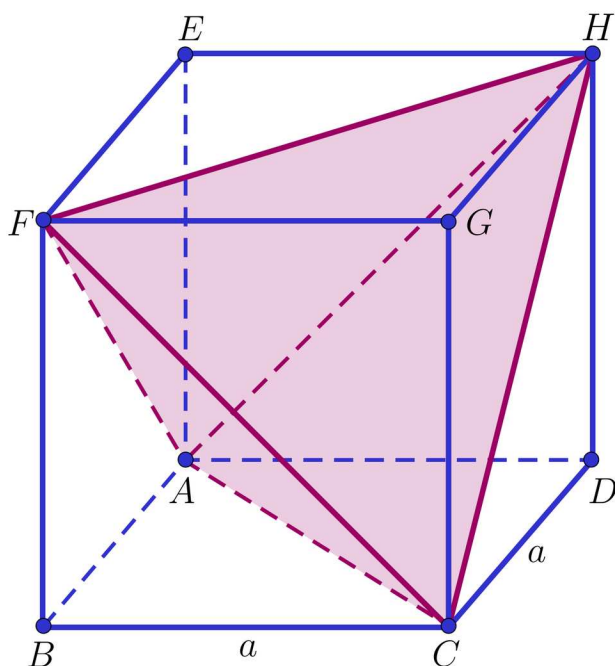
Po zwiększeniu długości krawędzi o 60% długość krawędzi czworościanu będzie wynosiła $1,6a$, a jego pole $P_d = (1,6)^2 P_m = 2,56P_m$.

Wyznamy o ile zwiększy się pole: $P_d - P_m = 2,56P_m - P_m = 1,56P_m$, czyli pole siatki czworościanu zwiększy się o $\frac{1,56P_m}{P_m} \cdot 100\% = 156\%$.

Przykład 4

Czworościan foremny wpisano w sześcián o krawędzi długości a tak, że każda krawędź czworościanu jest przekątną ściany tego sześciánu. Wyznamy stosunek pola powierzchni sześciánu do pola powierzchni czworościanu.

Rozwiązanie:



Pole powierzchni sześciánu wynosi $P_{sz} = 6a^2$.

Ponieważ krawędź czworościanu jest przekątną ściany sześciánu, to długość krawędzi czworościanu równa jest $d = a\sqrt{2}$.

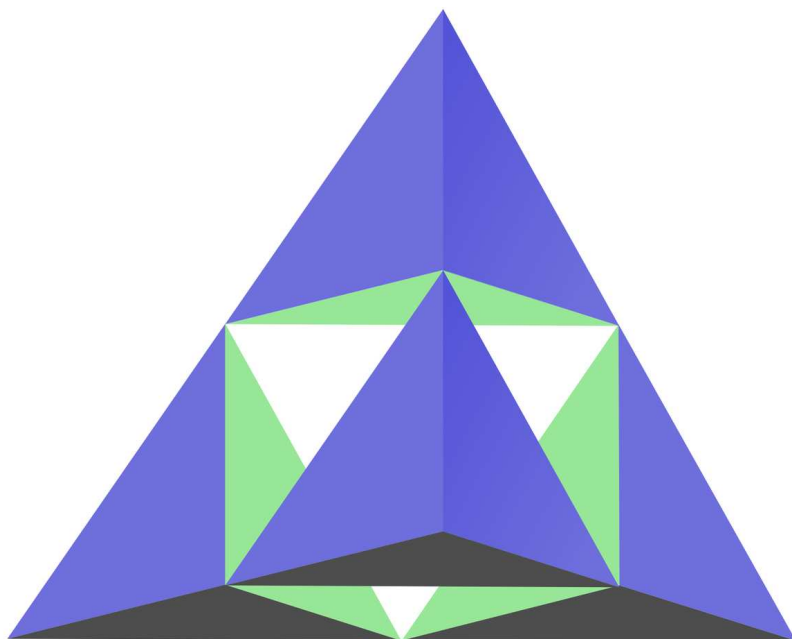
Pole powierzchni czworościanu foremego wynosi $P_{cz} = 4 \frac{d^2 \sqrt{3}}{4} = (a\sqrt{2})^2 \sqrt{3} = 2\sqrt{3}a^2$.

Stąd stosunek pola powierzchni sześciánu do pola powierzchni czworościanu foremego wynosi $\frac{P_{sz}}{P_{cz}} = \frac{6a^2}{2\sqrt{3}a^2} = \sqrt{3}$.

Przykład 5

Z czterech czworościanów foremnych zbudowano większy czworościan foremny w ten sposób, że na trzech małych czworościanach foremnych postawiono czwarty. Wysokość tak otrzymanej bryły wynosi $4\sqrt{6}$. Wewnętrzne strony pomalowano na kolor zielony, zaś zewnętrzne na kolor niebieski. Podstawa została niepomalowana. Oblicz pole powierzchni pomalowanej na kolor zielony i pole powierzchni pomalowanej na kolor niebieski.

Rozwiązanie:



Wysokość małego czworościanu stanowi połowę wysokości otrzymanej bryły, czyli $H = 2\sqrt{6}$.

Korzystając ze wzoru na [wysokość czworościanu foremnego](#) $H = \frac{a\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$. Stąd $a = 6$.

Na kolor zielony pomalowano 4 ściany, a na kolor niebieski 9 ścian.

Pole powierzchni jednej ściany wynosi $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

Otrzymujemy zatem – pole powierzchni pomalowanej na zielono: $4 \cdot 9\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$, zaś pole powierzchni pomalowanej na niebiesko: $9 \cdot 9\sqrt{3} = 81\sqrt{3}$.

Słownik

siatka czworościanu

figura płaska, powstająca w wyniku rozcięcia wielościanu wzdłuż pewnych krawędzi i rozłożenia ścian na płaszczyźnie

wysokość czworościanu foremnego

obliczamy ze wzoru:

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi w animacji 3D, a następnie wykonaj polecenie 2.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DfPfxI2vG>

Film przybliżający zagadnienie powierzchni czworościanu foremnego.

Polecenie 2

Przeciągając prawidłowe wyrazy w odpowiednie miejsca zbuduj warunek istnienia czworościanu analogiczne do warunku istnienia trójkąta.

Aby zbudować z czworościan, każdy powinien mieć mniejsze od pozostałych trójkątów.

trójkąt

czworościan

sumy pól powierzchni

różnicy pól powierzchni

pole powierzchni

czterech trójkątów

trójkątów

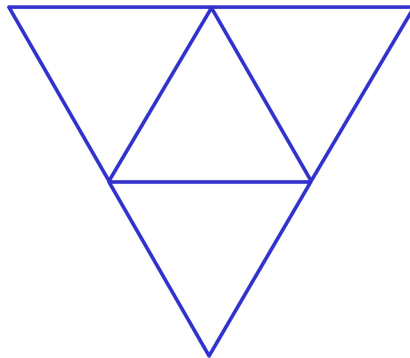
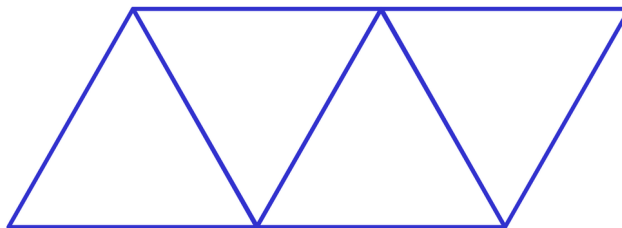
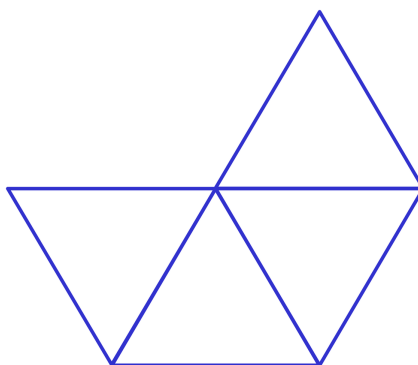
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



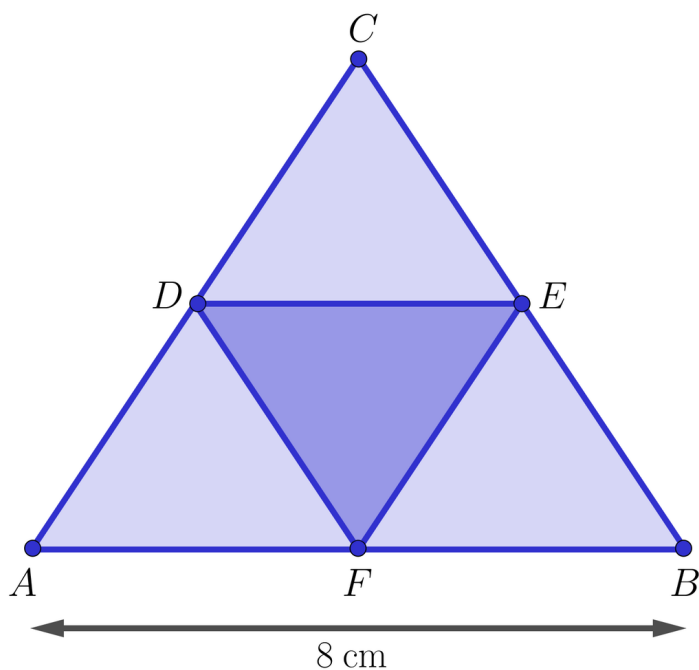
Która z zaproponowanych figur jest siatką czworościanu foremnego? Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐☐☐

Ćwiczenie 2



Trójkąt równoboczny o boku 8 cm jest siatką czworościanu foremnego. Wysokość ściany czworościanu foremnego ma długość:



Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $2\sqrt{3}$

☐ $4\sqrt{3}$

☐ $\sqrt{3}$

☐ $2\sqrt{2}$

Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź. Pole powierzchni czworościanu foremnego o boku długości a obliczamy ze wzoru:

☐ $P = a^2\sqrt{3}$

☐ $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

☐ $P = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$

☐ $P = a^2\sqrt{6}$

Ćwiczenie 4



Połącz parami: pole siatki czworościanu foremnego i długość krawędzi czworościanu zbudowanego z tej siatki.

$P = 16\sqrt{3}$

$a = 4\sqrt{6}$

$P = 12\sqrt{3}$

$a = 4$

$P = 96\sqrt{3}$

$a = 2\sqrt{3}$

$P = 4\sqrt{3}$

$a = 2$

Ćwiczenie 5



Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego jest równe $16\sqrt{3}$. Oblicz długość krawędzi bryły.

Ćwiczenie 6



W czworościan foremny o krawędzi długości a wpisano kulę. Oblicz stosunek powierzchni czworościanu do powierzchni tej kuli.

Ćwiczenie 7



Dany jest czworościan foremny o krawędzi długości a . Jak zmieni się jego pole powierzchni całkowitej, jeżeli długość krawędzi zostanie zmniejszona czterokrotnie? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Zmaleje czterokrotnie.

☐ Zmniejszy się o połowę.

☐ Zmaleje szesnastokrotnie.

☐ Pozostanie takie samo.

Ćwiczenie 8



Na czworościanie foremnym o krawędzi długości a opisano kulę. Oblicz stosunek powierzchni czworościanu do powierzchni tej kuli.

Dla nauczyciela

Autor: Beata Kuna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Siatka i pole powierzchni czworościanu foremnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje obywatelskie.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rysuje siatkę czworościanu foremnego;
- wyznacza pole powierzchni siatki czworościanu foremnego;
- znajduje relację pola powierzchni czworościanu foremnego do powierzchni innych brył, jak sfery wpisanej w czworościan foremny, czy sfery opisanej na czworościanie foremnym.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa kierowana;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego;
- praca w grupach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Lekcja jest bardzo dobrą okazją do wykorzystania klocków konstrukcyjnych, z których buduje się figury i bryły – tutaj trójkąty równoboczne i czworościany foremne. W prosty sposób można pokazać siatki czworościanu foremnego.
2. Następnie wraz z uczniami określa cele i kryteria sukcesu.
3. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Przykład 1 uczniowie wykonają prawdopodobnie w pamięci.
2. Przykład 2 i Przykład 3 mogą ochotnicy rozwiązać przy tablicy.
3. W Przykładzie 4 dla przypomnienia pojawia się wysokość czworościanu foremnego.
4. Przykład 5 ma na celu przypomnienie relacji między polami powierzchni figur podobnych.
5. Przykład 6 jest bardzo prosty. Nauczyciel prosi ucznia do tablicy. Warto tutaj wziąć słabszego ucznia i pokierować go w rozwiązywaniu przykładu.
6. Przykład 7 jest związany z piramidą Sierpińskiego. W tym zagadnieniu można podzielić klasę na grupy i poprosić o zbudowanie takich piramid wykorzystując klocki konstrukcyjne. Można następnie zbudować dużą piramidę, wykorzystując klocki wszystkich grup.
7. Uczniowie pozostają w grupach i rozwiązują ćwiczenia 1-4 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem przykładów i ćwiczeń, które pojawiły się na lekcji.

Praca domowa:

- Uczniowie wykonują ćwiczenia 5-8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Pole powierzchni ostrosłupa](#)

Wskazówki metodyczne:

- Polecenia związane z animacją 3D można wykorzystać jako materiał, służący powtórzeniu materiału w temacie „Siatka i pole powierzchni czworościanu foremnego” lub przygotowania do matury.