Zadania na dowodzenie z zastosowaniem wyrażeń wymiernych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Zadania na dowodzenie z zastosowaniem wyrażeń wymiernych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Uczniowie rozpoczynający przygodę z matematyką nabywają często przeświadczenie, że najważniejsze w matematyce jest liczenie. Mamy obliczyć wartość jakiegoś wyrażenia, obliczyć pole figury geometrycznej, wyznaczyć prędkość jazdy pociągu w zadaniu tekstowym.

Tak naprawdę jednak matematyka to nauka o przeprowadzaniu rozumowania. Rozwój matematyki to definiowanie nowych pojęć, stawianie hipotez odnośnie ich własności, a następnie wykazywanie ich prawdziwości lub ich obalanie.

Dlatego w arkuszach maturalnych pojawiają się zadania na dowodzenie, przeprowadzenie rozumowania, uzasadnienie podanej tezy.

Twoje cele

- Udowodnisz tożsamości, w których zapisie występują ułamki algebraiczne.
- Udowodnisz prawdziwość pewnych nierówności za pomocą ułamków algebraicznych i wzorów skróconego mnożenia.
- Przeanalizujesz przykłady dotyczące zastosowań wyrażeń wymiernych.

Przeczytaj

Podczas dowodzenia tożsamości z wykorzystaniem wyrażeń wymiernych, trzeba zwrócić uwagę na dziedzinę takiego wyrażenia. Wiadomo, że wyrażenie wymierne jest zapisane w postaci ilorazu dwóch wielomianów, dlatego należy pamiętać, że miejsca zerowe wielomianu wystepującego w mianowniku nie należą do dziedziny (nie wolno dzielić przez zero). Z tego powodu w poleceniach będą pojawiać się stwierdzenia wpływające na dziedzinę danego wyrażenia. Na przykład: liczby wsytępujące w mianowniku są parami różne lub wyrażenie $\frac{x}{y}$ jest liczbą dodatnią.

Ważnym narzędziem podczas rozwiązywania tego typu zadań będą wzory skróconego mnożenia oraz znajomość zasad wykonywania działań na ułamkach.

Przykład 1

Udowodnijmy, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b i c są parami różne, to prawdziwa jest równość

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2.$$

Dowód

- Zacznijmy przekształcać prawą stronę równości, stosując wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy trzech wyrażeń.

  $$P = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 =$$

  $$= \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{2}{(a-b)(b-c)} + \frac{2}{(b-c)(c-a)} + \frac{2}{(c-a)(a-b)} = (i)$$

- Obliczmy teraz sumę trzech ostatnich ułamków, sprowadzając je do wspólnego mianownika.

  $$\frac{2}{(a-b)(b-c)} + \frac{2}{(b-c)(c-a)} + \frac{2}{(c-a)(a-b)} =$$

  $$= \frac{2c-2a}{(a-b)(b-c)(c-a)} + \frac{2a-2b}{(a-b)(b-c)(c-a)} + \frac{2b-2c}{(a-b)(b-c)(c-a)} =$$

  $$= \frac{2c-2a+2a-2b+2b-2c}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$$

- Zatem

  $$(i) = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + 0 = L.$$

- Wykazaliśmy, że prawa strona równości jest równa lewej, więc tożsamość została udowodniona. Przy podanych założeniach wszystkie działania były możliwe do wykonania.

Przykład 2

Wykażemy, że jeżeli liczby x, y są różne od zera i $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ jest liczbą całkowitą, to również $\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}$ jest liczbą całkowitą.

Dowód

- Oznaczmy $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=a\in\mathbb{Z}$.
- Zauważmy, że

  $a^2=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2=$

  $=\frac{x^2}{y^2}+2\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}=$

  $=\frac{x^2}{y^2}+2\cdot\cancel{\frac{x}{y}}\cdot\cancel{\frac{y}{x}}+\frac{y^2}{x^2}=$

  $=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2,$

  czyli

  $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=$

  $=a^2-2.$

- Podnieśmy obustronnie do kwadratu ostatnią równość.

  $\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)^2=\left(a^2-2\right)^2$

  $\frac{x^4}{y^4}+2\cdot\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^4}{x^4}=a^4-4a^2+4$

  $\frac{x^4}{y^4}+2\cdot\cancel{\frac{x^2}{y^2}}\cdot\cancel{\frac{y^2}{x^2}}+\frac{y^4}{x^4}=a^4-4a^2+4$

  $\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}+2=a^4-4a^2+4.$

- Zatem

  $\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}=a^4-4a^2+2,$

  co jest liczbą całkowitą, ponieważ z założenia $a\in\mathbb{Z}$.

Ciekawostka

Używając wzorów skróconego mnożenia, można uogólnić ostatni przykład i wykazać, że jeżeli $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ jest liczbą całkowitą, to również dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wartość wyrażenia $\frac{x^n}{y^n}+\frac{y^n}{x^n}$ jest liczbą całkowitą.

Przykład 3

Wykażemy, że jeżeli dla liczb rzeczywistych x, y, z różnych od 0 zachodzi równość

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}=-2,$

to

$(x+y)(y+z)(z+x)=0.$

Dowód

- Sprowadźmy ułamki po lewej stronie pierwszej równości do wspólnego mianownika i obliczmy ich sumę.

  $\frac{zx^2+y^2z+xy^2+z^2x+yz^2+x^2y}{xyz}=-2$

- Możemy pomnożyć wyrażenie obustronnie przez xyz, a następnie przenieść wszystko na lewą stronę.

  $zx^2+y^2z+xy^2+z^2x+yz^2+x^2y=-2xyz$

  $zx^2+y^2z+xy^2+z^2x+yz^2+x^2y+2xyz=0$

- Uzyskaliśmy zapis, w którym po prawej stronie - podobnie jak w tezie - znajduje się 0.

  Spróbujmy tak pogrupować wyrazy po lewej stronie, aby możliwe było wyłączenie przed nawias czynnika $(x+y)$.

  $\left(zx^2+xyz\right)+\left(xyz+y^2z\right)+\left(xy^2+x^2y\right)+\left(z^2x+yz^2\right)=0$

  $zx(x+y)+yz(x+y)+xy(x+y)+z^2(x+y)=0$

  $(x+y)\left(zx+yz+xy+z^2\right)=0$

- Wyrażenia w drugim nawiasie łatwo pogrupować tak, by uzyskać tezę.

  $(x+y)\left(\left(yz+z^2\right)+(zx+xy)\right)=0$

  $(x+y)(z(y+z)+x(z+y))=0$

$(x+y)(y+z)(z+x)=0.$

Przykład 4

Wykażemy, że jeżeli dla liczb rzeczywistych x, y, z różnych od 0 zachodzi równość

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}=-2,$

to prawdziwa jest również również równość

$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}=-2.$

Dowód

- Założenia w przykładzie 3 i 4 się pokrywają. Wiemy zatem, że zachodzi teza wykazana w przykładzie 3, który potraktujemy jako lemat.
- Wiemy, że prawdziwa jest równość

  $(x+y)(y+z)(z+x)=0.$
- Oznacza to, że przynajmniej jeden z nawiasów w powyższym iloczynie przyjmuje wartość 0, czyli wśród liczb x, y, z jest para liczb przeciwnych. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że liczbami przeciwnymi są x i z. Przekształćmy lewą stronę tezy wykorzystując podstawienie $z=-x$. Zauważmy, że $z^3=-x^3$.
- $L=\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}=$

  $=\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}-\frac{y^3}{x^3}-\frac{x^3}{y^3}-\frac{x^3}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}=-2=P$

Ciekawostka

Zauważmy, że ostatni przykład można uogólnić, podstawiając w wykładnikach potęgi dowolną liczbę naturalną nieparzystą w miejsce 3. Dowód będzie wyglądać podobnie.

Przykład 5

Wykażemy, że dla parami różnych liczb dodatnich x, y i z zachodzi równość

$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{x-z}{\sqrt{x}+\sqrt{z}}+\frac{y-z}{\sqrt{y}-\sqrt{z}}.$

Dowód

- W dowodzie tożsamości wykorzystamy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów, zapisując licznik każdego z ułamków w postaci iloczynu.
- Zacznijmy od lewej strony równości.

$$L = \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{\cancel{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{y}}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} = (i)$$

- W podobny sposób przekształcimy prawą stronę.

$$P = \frac{x-z}{\sqrt{x}+\sqrt{z}} + \frac{y-z}{\sqrt{y}-\sqrt{z}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{z}} + \frac{\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)}{\sqrt{y}-\sqrt{z}} =$$

$$= \frac{\cancel{\left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)}\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)}{\cancel{\sqrt{x}+\sqrt{z}}} + \frac{\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\cancel{\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)}}{\cancel{\sqrt{y}-\sqrt{z}}} =$$

$$= \sqrt{x} - \sqrt{z} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{x} + \sqrt{y} = (ii)$$

- Zauważmy, że $(i) = (ii)$ co oznacza, że analizowana tożsamość jest prawdziwa.

Słownik

podstawowe wzory skróconego mnożenia (kwadraty i sześciany)

- kwadrat sumy:
  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

- kwadrat różnicy:
  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

- różnica kwadratów:
  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

- sześcian sumy:
  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

- sześcian różnicy:
  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

- suma sześcianów:
  $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

- różnica sześcianów:
  $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z zaprezentowanymi w animacji metodami dowodzenia nierówności z zastosowaniem ułamków algebraicznych.

Zauważ, że wszystkie dowody opierają się na odpowiednim użyciu wzorów skróconego mnożenia i własności, która mówi, że kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DniyVxmNw

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej zadań na dowodzenie z zastosowaniem wyrażeń wymiernych.

Polecenie 2

Udowodnij, że jeżeli x, y, z są liczbami rzeczywistymi dodatnimi takimi, że $x + y + z = 1$, to zachodzi nierówność

$$\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+y}{1-y} \cdot \frac{1+z}{1-z} \geq 8.$$

To zadanie może Ci sprawić trochę trudności.
Spróbuj najpierw rozwiązać je samodzielnie.
Jeśli Ci się nie uda, spróbuj kolejno użyć podanych pod poleceniem podpowiedzi.
Na końcu zamieszczone jest pełne rozwiązanie. Możliwe, że Twoje rozwiązanie będzie inne, zadania matematyczne bardzo często można rozwiązać różnymi sposobami.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Wykaż, że jeśli $5xy + 2x^2 = 10xy + 25y^2$ oraz $2x \neq -5y$, to wartość wyrażenia $\frac{7x+3y}{2x+5y}$ jest stała.
Oblicz, ile wynosi wartość tego wyrażenia. Zaznacz poprawną odpowiedź.

- $\frac{10}{7}$
- $\frac{7}{10}$
- $\frac{38}{15}$
- $\frac{15}{38}$

Ćwiczenie 2

Dane są liczby dodatnie a, b, c, d.
Oceń prawdziwość poniższego zdania. Zaznacz poprawną odpowiedź.

Jeżeli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, to $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$.

- Fałsz
- Prawda

Ćwiczenie 3

Wykaż, że jeśli liczby x, y są różne od zera i $12x^2y - 4x^3 = -xy^2 + 3y^3$ oraz $x \neq 3y$, to wyrażenie $\frac{3x-y}{3y-x}$ może przyjąć jedną z dwóch możliwych wartości.
Wyznacz te wartości, a następnie zaznacz poprawne odpowiedzi.

- [ ] $-\frac{1}{5}$
- [ ] $\frac{1}{5}$
- [ ] $\frac{5}{7}$
- [ ] $-\frac{5}{7}$

Ćwiczenie 4

Dane są liczby $a, b \in \langle 0; 1\rangle$. Udowodnij, że zachodzi nierówność: $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \leq \frac{2}{ab+1}$. Ustaw kolejne kroki rozwiązania we właściwej kolejności. Złap element i przesuń go w górę lub w dół.

Uprośćmy wyrazy podobne w liczniku:
$\frac{2a^2b^2-ab^3-a^3b+a^2+b^2-2ab}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} \geq 0.$

Możemy zatem zapisać nierówność w postaci
$\frac{(a-b)^2(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} \geq 0.$

Po przemnożeniu wyrażeń w licznikach uzyskamy
$\frac{ab^3+b^2+ab+1}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} + \frac{a^3b+a^2+ab+1}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} \leq \frac{2a^2b^2+2a^2+2b^2+2}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)}.$

Przenieśmy wszystkie wyrazy na jedną stronę i sprowadźmy do wspólnego mianownika:
$\frac{2a^2b^2+2a^2+2b^2+2-ab^3-b^2-ab-1-a^3b-a^2-ab-1}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} \geq 0.$

Zauważmy, że
$2a^2b^2 - ab^3 - a^3b = -ab(a-b)^2$ i $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$,
czyli
$2a^2b^2 - ab^3 - a^3b + a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2(1-ab).$

Przekształćmy nierówność równoważnie, sprowadzając wszystkie ułamki do wspólnego mianownika:
$\frac{(b^2+1)(ab+1)}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} + \frac{(a^2+1)(ab+1)}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} \leq \frac{2(a^2+1)(b^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)}.$

Uzyskana nierówność jest zawsze prawdziwa dla $a, b \in \langle 0; 1\rangle$, bo

$$\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ 1 - ab \geq 0 \\ a^2 + 1 \geq 1 \\ b^2 + 1 \geq 1 \\ ab + 1 \geq 1 \end{cases}.$$

Ćwiczenie 5

Wykonaj poniższe polecenie, a następnie uzupełnij lukę, wpisując poprawną wartość.

Wykaż, że jeśli $x+y+z=0$ oraz $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$, to wartość wyrażenia $\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy}$ jest stała i wynosi ______.

Ćwiczenie 6

Dla jakich założeń nierówność $\frac{(a+b)^2}{ab}\geq 4$ jest zawsze prawdziwa? Zaznacz poprawną odpowiedź.

- [ ] $\begin{cases} a\in(0;\infty) \\ b\in(0;\infty) \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} a\in(-\infty;0) \\ b\in(-\infty;10) \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} a\in\langle 0;\infty) \\ b\in\langle 0;\infty) \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} a\in\mathbb{R} \\ b\in\mathbb{R} \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} a\in(-\infty;0\rangle \\ b\in(-\infty;0\rangle \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} a\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ b\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$

Ćwiczenie 7

Dane są różne od zera liczby rzeczywiste a, b, c. Wykonaj poniższe polecenie, a następnie uzupełnij lukę, wpisując poprawną wartość.

Wykaż, że wartość wyrażenia $\left(1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2+\left(1+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(1+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)^2+$ $-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)^2$ jest stała i wynosi ______.

Ćwiczenie 8

Wykonaj poniższe polecenie, a następnie uzupełnij lukę, wpisując poprawną wartość.

- Udowodnij, że ułamek

  $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

  można jednoznacznie przedstawić jako sumę ułamków

  $\frac{A}{x-1}$, $\frac{B}{x-2}$ oraz $\frac{C}{x-3}$

  dla pewnych całkowitych wartości A, B, C.
- Wskaż te wartości:
- $A =$
- $B =$
- $C =$

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zadania na dowodzenie z zastosowaniem wyrażeń wymiernych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- dowodzi z pomocą ułamków algebraicznych i wzorów skróconego mnożenia prawdziwość pewnych nierówności,
- na podstawie poznanych przykładów przeprowadza własne rozumowania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów,
- rosnące plakaty,
- stoliki eksperckie.

Formy pracy:

- praca w grupach,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- arkusze papieru, pisaki.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Nauczyciel prosi wybranych trzech uczniów (uczniowie ci będą pełnili rolę ekspertów na lekcji) o zapoznanie się w domu z animacją oraz z materiałem z sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą rosnących plakatów. Najpierw za pomocą burzy mózgów przypominają sobie wszystko, co wiedzą na temat twierdzeń (budowa, rodzaje dowodów, przykłady), a następnie przedstawiają graficznie uzyskane wiadomości. Powstały plakat uzupełnią w końcowej części zajęć o nowo uzyskane informacje. W ten sposób plakat „rozrośnie się”.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w 3 grupach pod kierunkiem ekspertów. Zapoznają się z animacją przedstawiającą sposób dowodzenia nierówności. Zwracają uwagę na zastosowanie wzorów skróconego mnożenia i wykorzystanie przyjętych założeń.
2. Trzech ekspertów siedzi przy osobnych stolikach, pracuje ze swoimi grupami. Wskazany przez eksperta uczeń losuje numer przykładu z części „Przeczytaj” i próbuje je rozwiązać, objaśniając przy tym na głos wykonywane czynności. Pozostali członkowie grupy mogą mu podsuwać pomysły na rozwiązanie. Jeśli w określonym czasie grupa nie upora się z zadaniem, może poprosić o pomoc eksperta.
3. Kolejnym elementem wspólnej pracy jest wzbogacenie rosnących plakatów o wiadomości zdobyte w czasie zajęć.
4. Na koniec grupy rywalizują rozwiązując ćwiczenia interaktywne; wygrywa grupa, która w określonym przez nauczyciela czasie rozwiąże bezbłędnie jak najwięcej ćwiczeń.

Faza podsumowująca:

1. Liderzy omawiają pracę swoich grup, wskazują na trudności, prezentują wykonane plakaty.

2. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć i zdobyte wiadomości.
3. Nauczyciel ocenia pracę uczniów – wskazuje na mocne i słabe strony.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać polecenia powiązane z animacją.

Materiały pomocnicze:

- Wyrażenia wymierne

Wskazówki metodyczne:

Animacja może posłużyć jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem. Można również wykorzystać animację w realizacji lekcji „Nierówności wymierne”.