



Oprocentowanie lokat i kredytów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Oprocentowanie lokat i kredytów

Źródło: Micheile Henderson, dostępny w internecie: www.unsplash.com, domena publiczna.

Lokata bankowa jest jednym z najbezpieczniejszych sposobów pomnażania środków pieniężnych. Idea lokaty polega na tym, że klient wpłaca na wybraną lokatę określoną kwotę pieniędzy na określony czas, a następnie na koniec tego okresu bank przekazuje klientowi wpłacone fundusze, powiększone o należne odsetki. Odwrotną sytuacją jest kredyt. Wtedy dawcą jest bank, a biorcą jest klient, który po upływie ustalonego czasu oddaje do banku określoną kwotę pieniędzy, przy czym dopłaca należne bankowi prowizje oraz odsetki. W materiale omówimy, jak obliczać odsetki od lokat i kredytów przy użyciu pojęcia procentu.

Twoje cele

- Określisz wzór na obliczanie wysokości odsetek od lokat oraz kredytów.
- Zastosujesz pojęcie raty równej i raty malejącej do obliczania kosztów kredytu.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania zagadnień z życia codziennego.

Przeczytaj

W materiale omówimy, w jaki sposób obliczać oprocentowanie od założonych lokat bankowych oraz udzielonych kredytów.

Lokaty bankowe

Lokatą bankową nazywamy umowę z bankiem, na mocy której bank przyjmuje na określony z góry czas kapitał inwestora, a po zakończeniu trwania umowy zwraca kapitał powiększony o zysk, który nazywa się odsetkami.

W obecnym systemie bankowym uzyskane odsetki pomniejsza się o należny podatek.

Z pojęciem lokaty związana jest kapitalizacja odsetek.

Kapitalizacją odsetek nazywa się powiększanie kapitału poprzez dopisanie odsetek, które zostały wypracowane przez ten kapitał.

Okresem kapitalizacji nazywamy czas, po którym następuje dopisanie odsetek do kapitału.

Do obliczania wartości kapitału otrzymanego po upływie okresu trwania lokaty, możemy skorzystać z prostego wzoru.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

K_0 – kapitał początkowy,

K_n – kapitał końcowy po n latach,

n – liczba lat depozytu,

r – roczna stopa procentowa.

Jeśli [kapitalizacja odsetek](#) odbywa się jeden raz w roku, to:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

Na wysokość kapitału w kolejnych latach ma wpływ to, czy odsetki naliczone po kapitalizacji zostają:

- wypłacone po roku trwania lokaty,
- dopisane do kolejnego roku trwania lokaty.

Kredyty

Kredytem bankowym nazywamy pisemną umowę pomiędzy kredytodawcą (bankiem) a kredytobiorcą (klientem), na podstawie której kredytodawca udostępnia określoną kwotę pieniędzy, a obowiązkiem kredytobiorcy jest zwrot kredytu w ustalonym okresie wraz z odsetkami.

Do kosztów kredytu zalicza się:

- odsetki – ich wysokość jest wyznaczona przez oprocentowanie stałe lub zmienne,
- prowizja – opłata pobierana przez bank w zamian za udzielenie kredytu,
- ubezpieczenie, w formie polisy, które chroni kredytobiorcę np. w razie utraty pracy,
- dodatkowe opłaty – koszty, które uwzględniają na przykład opłatę za rozpatrzenie wniosku.

Oprocentowanie kredytu jest określone w stosunku rocznym, zaś raty kredytu płacone są miesięcznie.

Rata kredytu obejmuje dwa elementy: część kapitałową i odsetki. Istnieje możliwość wyboru jednego z dwóch rodzajów rat:

- raty równe – przez cały okres spłaty zobowiązania ich wysokość będzie taka sama, zmieniać się będzie jedynie proporcja pomiędzy poszczególnymi elementami,
- raty malejące – kwota kapitału jest przez cały czas na jednym poziomie, zmienia się tylko wysokość odsetek, a sama rata będzie malała wraz z upływem czasu.

Wysokość raty równej obliczamy ze wzoru:

$$I = \frac{N \cdot r}{k \cdot \left(1 - \left(\frac{k}{k+r}\right)^n\right)}$$

gdzie:

I – wysokość raty równej,

N – kwota udzielonego kredytu,

r – oprocentowanie kredytu w skali roku,

k – liczba rat płatnych w ciągu roku,

n – liczba rat.

Wysokość raty malejącej w pierwszym miesiącu obliczamy ze wzoru:

$$I = \frac{N}{n} + N \cdot \frac{r}{100k}$$

przy czym w kolejnych miesiącach kwotę udzielonego kredytu pomniejsza się o zapłacone raty.

W poniższych przykładach omówimy, w jaki sposób obliczyć odsetki od lokaty oraz wysokość rat równych i malejących w przypadku kredytu.

Przykład 1

Na roczną lokatę bankową wpłacono kwotę 50000 zł przy rocznym oprocentowaniu 1,8%. Obliczymy, ile [odsetek](#) otrzymamy z tej lokaty, jeżeli podatek od odsetek wynosi 19%.

Rozwiązanie:

Z treści zadania mamy następujące dane:

$$K_0 = 50000 \text{ zł}$$

$$r = 1,8\%$$

$$n = 1$$

Zatem

$$K_1 = 50000 \cdot \left(1 + \frac{1,8}{100}\right) = 50900$$

$$i = 50900 - 50000 = 900$$

Po odjęciu podatku od odsetek w wysokości 19% otrzymujemy kwotę:

$$81\% \cdot 900 = 729$$

Wobec tego po upływie roku otrzymamy kwotę odsetek 729 zł.

Przykład 2

Obliczymy wysokość drugiej raty kredytu udzielonego na kwotę 36000 zł na okres dwóch lat, przy rocznym oprocentowaniu kredytu 4%, jeżeli raty miesięczne są malejące.

Rozwiązanie:

Z zadania mamy następujące dane:

$$N = 36000 \text{ zł}$$

$$k = 12$$

$$n = 24$$

$$r = 4\%$$

Wysokość raty I_1 w pierwszym miesiącu trwania kredytu wynosi:

$$I_1 = \frac{N}{n} + N \cdot \frac{r}{100k} = \frac{36000}{24} + 36000 \cdot \frac{4}{100 \cdot 12} = 1500 + 120 = 1620$$

Wysokość raty I_2 w drugim miesiącu trwania kredytu wynosi:

$$I_2 = \frac{N}{n} + \left(N - \frac{N}{n}\right) \cdot \frac{r}{100k} = \frac{36000}{24} + 34500 \cdot \frac{4}{100 \cdot 12} =$$

$$= 1500 + 115 = 1615$$

Przykład 3

Obliczymy wysokość raty równej, kredytu udzielonego na kwotę 80000 zł na okres 5 lat, jeżeli raty są spłacane miesięcznie, a roczna stopa procentowa wynosi 5%.

Rozwiązanie:

Z zadania mamy następujące dane:

$$N = 80000 \text{ zł}$$

$$k = 12$$

$$n = 60$$

$$r = 5\%$$

Do obliczenia raty kredytu wykorzystamy wzór:

$$I = \frac{N \cdot r}{k \cdot \left(1 - \left(\frac{k}{k+r}\right)^n\right)}$$

Zatem:

$$I = \frac{80000 \cdot \frac{5}{100}}{12 \cdot \left(1 - \left(\frac{12}{12 + \frac{5}{100}}\right)^{60}\right)} \approx 1509,70$$

Można łatwo sprawdzić, że kapitał spłacony po upływie okresu kredytu jest zbliżony do kwoty, jaką otrzymalibyśmy z lokaty na ten sam okres i przy tym samym oprocentowaniu.

Przykład 4

Połowę kwoty 4000 zł złożono na lokatę roczną w banku I, a drugą połowę w banku II. Wiadomo, że odsetki uzyskane po roku w banku I były o 30 zł wyższe niż odsetki uzyskane w banku II. Obliczymy, o ile punktów procentowych oprocentowanie lokaty w banku I było wyższe od oprocentowania w banku II.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

p – oprocentowanie lokaty w banku I,

r – oprocentowanie lokaty w banku II.

Wobec tego odsetki uzyskane w bankach wynoszą odpowiednio:

- w banku I: $2000 \cdot p$
- w banku II: $2000 \cdot r$

Ponieważ odsetki uzyskane po roku w banku I były o 30 zł wyższe niż odsetki uzyskane w banku II, zatem zachodzi zależność:

$$2000 \cdot \frac{p}{100} = 2000 \cdot \frac{r}{100} + 30$$

$$2000 \cdot \frac{p}{100} - 2000 \cdot \frac{r}{100} = 30$$

$$2000 \cdot (p - r) = 3000$$

$$p - r = \frac{3000}{2000} = 1,5$$

$$p = r + 1,5$$

Zatem oprocentowanie w pierwszym banku było większe niż oprocentowanie w drugim banku o 1,5 punktu procentowego.

Przykład 5

Kwotę 20000 zł podzielono na dwie części. Jedną część wpłacono do banku I na lokatę roczną oprocentowaną 2% w skali roku. Drugą część wpłacono do banku II na lokatę roczną oprocentowaną 1% w skali roku. W każdym z banków od naliczonych odsetek pobrano podatek w wysokości 19%. Obliczymy, jaką kwotę wpłacono do każdego z banków, jeżeli po roku otrzymano 226,80 zł odsetek.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

x – kwota wpłacona do banku I,

$20000 - x$ – kwota wpłacona do banku II,

$$r_1 = 2\%,$$

$$r_2 = 1\%.$$

Po odliczeniu 19% podatku od odsetek kapitał uzyskany po roku z banku I wynosi:

$$x \cdot \left(1 + \frac{2}{100} \cdot \frac{81}{100}\right)$$

Po odliczeniu 19% podatku od odsetek kapitał uzyskany po roku z banku II wynosi:

$$(20000 - x) \cdot \left(1 + \frac{1}{100} \cdot \frac{81}{100}\right)$$

Łączny kapitał uzyskany po roku z obu banków wynosi 20226,80 zł.

Zatem do wyznaczenia wartości x rozwiązujemy równanie:

$$x \cdot \left(1 + \frac{2}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) + (20000 - x) \cdot \left(1 + \frac{1}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = 20226,8$$

Z równania otrzymujemy, że

$$x = 8000, \text{ zatem:}$$

$$20000 - x = 20000 - 8000 = 12000$$

Wobec tego do banku I wpłacono kwotę 8000 zł, zaś do banku II wpłacono kwotę 12000 zł.

odsetki

wynagrodzenie za korzystanie z kapitału przez bank

kapitalizacja odsetek

dodanie odsetek, które do końca danego okresu wypracował złożony kapitał

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Obejrzyj galerię zdjęć interaktywnych.

Następnie wykonaj polecenie znajdujące się poniżej.

Polecenie 2

Oblicz wysokość pierwszej, drugiej i trzeciej raty kredytu udzielonego na kwotę 90000 zł na okres pięciu lat, przy rocznym oprocentowaniu kredytu 5%, jeżeli raty miesięczne są malejące.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Do banku złożono kwotę 6000 zł na roczną lokatę z pewnym oprocentowaniem. Po roku otrzymano kwotę 6145, 80 zł. Jakie było oprocentowanie lokaty, jeżeli od odsetek pobierany jest podatek w wysokości 19%?

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Połowę z kwoty 8000 zł złożono na lokatę roczną w banku I, a drugą połowę w banku II. Wiadomo, że odsetki uzyskane po roku w banku I były o 40 zł niższe niż odsetki uzyskane w banku II. Oblicz, o ile punktów procentowych oprocentowanie lokaty w banku I było niższe od oprocentowania w banku II.

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Oblicz, jaki procent kwoty kredytu w wysokości 72000 zł udzielonego na okres czterech lat, przy rocznym oprocentowaniu kredytu 6% stanowią łącznie pierwsze dwie raty, jeżeli raty miesięczne są malejące.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Oprocentowanie lokat i kredytów

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa wzór na obliczanie wysokości odsetek od lokat oraz kredytów;
- stosuje pojęcie raty równej i raty malejącej do obliczania kosztów kredytu;
- wykorzystuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania zagadnień z życia codziennego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda krokodyla;
- praca z ekspertem;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu w temacie: „Oprocentowanie lokat i kredytów”.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się z treścią materiału w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1–2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3–5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6–8 z sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Oprocentowanie lokat i kredytów”).

Materiały pomocnicze:

- [Procenty w życiu codziennym](#)
- [Procent składany](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiadomości dotyczących oprocentowania lokat i kredytów lub w realizacji tematu „Procent składany”.