



Przekształcanie wyrażeń zawierających logarytmy

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Przekształcanie wyrażeń zawierających logarytmy

Źródło: dostępny w internecie: piqsels.com, domena publiczna.

Wydawać by się mogło, że obecnie znajomość obliczeń logarytmicznych ma dużo mniejsze znaczenie niż 100 lat temu. Jednak okazuje się, że w wielu przypadkach stosowanie logarytmów jest bardzo przydatne, choćby przy interpretacji graficznej dużej liczby danych. Wiadomo, że wybór odpowiedniej skali do przedstawiania danych na wykresie jest bardzo ważny. Wybór złej skali może uniemożliwić porównywanie danych, szczególnie tych, charakteryzujących się dużą rozpiętością wartości. W takim przypadku korzystanie ze skali liniowej jest mało efektywne, gdyż osie liczbowe musiałyby być bardzo długie, aby zaznaczyć na nich wszystkie dane. Warto wtedy zastosować skalę logarytmiczną. Z takiej skali korzystano na przykład w 2020 r. w czasie epidemii COVID-19, aby porównać stopień zainfekowania koronawirusem w danym kraju.

W tym materiale utrwalimy i rozwinimy umiejętności związane z zastosowaniem wzorów ułatwiających obliczenia logarytmiczne. Udowodnimy też następny wzór, pomocny w przekształcaniu wyrażeń zawierających logarytmy. Niektóre z prezentowanych zastosowań będą prowadziły do rozwiązywania prostych równań, bądź nierówności logarytmicznych. Tych umiejętności nie ma zapisanych w treściach podstawy programowej, ale są one konieczne do późniejszych obliczeń związanych z wykorzystaniem logarytmów w innych dziedzinach wiedzy.

- Przekształcisz wyrażenia arytmetyczne zawierające logarytmy.
- Zapiszesz w prostszej postaci wyrażenia algebraiczne, korzystając z poznanych wzorów logarytmicznych.
- Przeprowadzisz proste rozumowania, prowadzące do udowodnienia zależności logarytmicznych, podasz argumenty uzasadniające poprawność tych rozumowań.
- Zbudujesz model matematyczny problemu, uwzględniając konieczne założenia i zastrzeżenia.

Przeczytaj

Przypomnimy teraz podstawowe wzory logarytmiczne, z których będziemy korzystać.

Podstawowe założenia

$$a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, x > 0, y > 0, p \in \mathbb{R}$$

Nazwa wzoru	Wzór
logarytm iloczynu	$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
logarytm ilorazu	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
logarytm potęgi	$\log_a x^p = p \log_a x$
logarytm pierwiastka	$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$, gdy $n > 1$ i $n \in \mathbb{N}$
zmiana podstawy logarytmu	$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Analizując przykłady zamieszczone w tym materiale, staraj się znaleźć jeszcze inne, prostsze sposoby rozwiązywania postawionych problemów, niż podane poniżej.

Przekształcając wyrażenia logarytmiczne, w Przykładzie 1 pokażemy zastosowanie wzoru na logarytm potęgi, zmianę podstawy logarytmu i logarytm iloczynu.

Przykład 1

Wiedząc, że $\log_{12} 2 = k$, obliczymy $\log_6 16$. Zauważmy, że logarytmy zapisane w treści zadania mają różne podstawy. Możemy więc spróbować oba logarytmy sprowadzić do tej samej podstawy, przekształcać oba logarytmy lub jeden z nich.

Wybraliśmy jeden z klasycznych sposobów, przekształcania obu logarytmów, może nie najefektywniejszy, ale często wykorzystywany.

Krok 1

Zapisujemy $\log_6 16$ w takiej postaci, aby liczba logarytmowana była jak najmniejsza:

$$\log_6 16 = \log_6 2^4 = 4 \log_6 2.$$

Krok 2

Teraz zapiszemy $\log_{12} 2$ za pomocą $\log_6 2$:

$$\log_{12} 2 = \frac{\log_6 2}{\log_6 12} = \frac{\log_6 2}{\log_6 6 + \log_6 2} = \frac{\log_6 2}{1 + \log_6 2}.$$

Ponieważ $\log_{12} 2 = k$, zatem

$$\frac{\log_6 2}{1 + \log_6 2} = k.$$

Krok 3

Z otrzymanej równości wyznaczamy $\log_6 2$:

$$\log_6 2 = k(1 + \log_6 2)$$

$$\log_6 2(1 - k) = k.$$

Krok 4

Zapisujemy $\log_6 16$ za pomocą liczby k :

$$\log_6 16 = 4 \log_6 2 = \frac{4k}{1-k}.$$

Odpowiedź:

$$\log_6 16 = \frac{4k}{1-k}.$$

Wzory na logarytm iloczynu lub logarytm ilorazu często stosowane są w związku z zagadnieniami dotyczącymi ciągów liczbowych. Oto przykład prostego zadania tego typu.

Przykład 2

Liczby $\log 2$, $\log 2^x$, $\log 4$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Znajdziemy liczbę x . Wiemy, że w ciągu arytmetycznym wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów skrajnych.

Stąd:

$$\log 2^x = \frac{\log 2 + \log 4}{2}.$$

Ze wzoru na logarytm iloczynu oraz ze wzoru na logarytm potęgi otrzymujemy:

$$2 \log 2^x = \log 8$$

$$\log 2^{2x} = \log 8.$$

Czyli:

$$2^{2x} = 2^3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Odpowiedź:

Szukana liczba jest równa $x = \frac{3}{2}$.

Przed nami trzy zadania „na dowodzenie”, bazujące na przekształceniach logarytmicznych.

Przykład 3

Wykażemy, że istnieją dokładnie dwie liczby spełniające warunek $x^{1-\log x} = 10^{-2}$.

Z równości zapisanej w zadaniu wynika, że poszukujemy dwóch liczb dodatnich ($x > 0$).

Logarytmujemy obie strony rozważanej równości przy podstawie 10:

$$\log(x^{1-\log x}) = \log 10^{-2}.$$

Korzystamy ze wzoru na logarytm potęgi:

$$(1 - \log x) \log x = -2 \log 10$$

Wykonujemy wskazane działania, porządkujemy wyrazy, otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$\log x - \log^2 x = -2$$

$$\log^2 x - \log x - 2 = 0.$$

Podstawiamy $t = \log x$.

Stąd:

$$t^2 - t - 2 = 0.$$

Wyznaczamy Δ :

$$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0.$$

Równanie ma dwa pierwiastki, które wyznaczamy:

$$t_1 = -1 \text{ i } t_2 = 2.$$

Zatem:

$$\log x_1 = -1, \text{ czyli } x_1 = \frac{1}{10} > 0$$

$$\log x_2 = 2, \text{ czyli } x_2 = 100 > 0.$$

Obie znalezione liczby są dodatnie, zatem spełniają warunki zadania.

Wykazaliśmy więc, że istnieją dwie liczby spełniające warunek $x^{1-\log x} = 10^{-2}$, co kończy dowód.

Przykład 4

Wykażemy, że iloczyn pierwiastków równania $\log_2 x \cdot \log_4 x = 3 \log_8 x + 4$ jest liczbą naturalną.

Z definicji logarytmu wynika, że liczba logarytmowana musi być dodatnia, zatem musi być spełniony warunek $x > 0$.

Logarytmy zapisane w równaniu mają różne podstawy. Zatem dla ułatwienia obliczeń, zapiszemy każdy z logarytmów za pomocą logarytmu o podstawie 2 – skorzystamy ze [wzoru na zmianę podstawy logarytmu](#):

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \log_2 x$$

$$\log_8 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = \frac{1}{3} \log_2 x.$$

Rozważane równanie ma teraz postać:

$$\frac{1}{2} (\log_2 x)^2 = \log_2 x + 4.$$

Zapisujemy równanie tak, aby po prawej stronie znaku równości znalazła się liczba 0:

$$\frac{1}{2}(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 4 = 0$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe. Aby je rozwiązać, oznaczamy: $\log_2 x = t$.

$$\frac{1}{2}t^2 - t - 4 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$\Delta = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 9 > 0$$

$$t_1 = -2, t_2 = 4.$$

Stąd

$$\log_2 x_1 = -2, \text{ czyli } x_1 = \frac{1}{4} > 0$$

$$\log_2 x_2 = 4, \text{ czyli } x_2 = 16 > 0$$

Obie znalezione liczby są dodatnie, zatem spełniają warunki zadania. Znajdujemy iloczyn pierwiastków równania: $\frac{1}{4} \cdot 16 = 4 \in \mathbb{N}$, co należało wykazać.

Przykład 5

Wykażemy, że jeśli $a > 0, b > 0, x > 0, a \neq 1, b \neq 1, ab \neq 1$ to $\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_a x + \log_b x} = \log_{ab} \left(\frac{b}{a} \right)$.

Przekształcamy lewą stronę rozważanego wyrażenia, zapisując każdy z logarytmów za

$$\text{pomocą logarytmu dziesiętnego: } L = \frac{\log_a x - \log_b x}{\log_a x + \log_b x} = \frac{\frac{\log x}{\log a} - \frac{\log x}{\log b}}{\frac{\log x}{\log a} + \frac{\log x}{\log b}}.$$

Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika:

$$L = \frac{\frac{\log x \cdot \log b - \log x \cdot \log a}{\log a \cdot \log b}}{\frac{\log x \cdot \log b + \log x \cdot \log a}{\log a \cdot \log b}}.$$

Dzielimy i skracamy:

$$L = \frac{\log x \cdot \log b - \log x \cdot \log a}{\log x \cdot \log b + \log x \cdot \log a}.$$

W liczniku i mianowniku wyłączamy wspólny czynnik przed nawias i skracamy:

$$L = \frac{\log x (\log b - \log a)}{\log x (\log b + \log a)} = \frac{\log b - \log a}{\log b + \log a}.$$

Zapisujemy licznik i mianownik ułamka w postaci logarytmu jednomianu (ze wzoru odpowiednio na logarytm ilorazu i logarytm iloczynu):

$$L = \frac{\log \left(\frac{b}{a} \right)}{\log(ab)}.$$

Każdy z logarytmów zapisujemy za pomocą logarytmu o podstawie ab , dzielimy i skracamy:

$$L = \frac{\frac{\log_{ab} \left(\frac{b}{a} \right)}{\log_{ab} 10}}{\frac{\log_{ab} ab}{\log_{ab} 10}} = \frac{\log_{ab} \left(\frac{b}{a} \right)}{\log_{ab} 10} \cdot \frac{\log_{ab} 10}{\log_{ab} ab} = \frac{\log_{ab} \left(\frac{b}{a} \right)}{1} \cdot \frac{1}{1}$$

$$L = \log_{ab} \left(\frac{b}{a} \right) = P.$$

Lewa strona równości równa się prawej stronie, co należało wykazać.

Uwaga

Rozwiąż zadanie przedstawione w Przykładzie 5, sprowadzając od razu lewą stronę równości do logarytmów o podstawie ab . Porównaj oba rozwiązania.

Słownik

wzór na zmianę podstawy logarytmu

jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ i $c > 0$, to $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

Film samouczek

Polecenie 1

Obejrzyj film samouczek. Staraj się najpierw samodzielnie wykonać zadania, a dopiero następnie porównaj z prezentowanym rozwiązaniem.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DCJJELeUG>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego przekształcania wyrażeń zawierających logarytmy.

Polecenie 2

Wykaż, że liczba $\log_2 24$ jest niewymierna.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wiadomo, że $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$. Liczba $M = \log_{\frac{1}{a}} x \cdot \frac{1}{\log_a x}$ jest równa:

☐ 0

☐ 1

☐ a

☐ -1

Ćwiczenie 2



Zaznacz, ile istnieje takich liczb x , że $13^{x-3} = 15^{x-3}$.

☐ 2

☐ Nieskończenie wiele.

☐ 0

☐ 1

Ćwiczenie 3



Wiedząc, że $3^x = 8$, wskaż każdą równość prawdziwą.

☐ $x \log_2 3 = 1 + \log_2 4$

☐ $3 - \log_2 3^x = 0$

☐ $\log_2 24 - (x + 1) \log_2 3 = 0$

☐ $x \log_2 3 = 2 \log_2 4$

Ćwiczenie 4



Porównaj liczby, przeciągając odpowiedni znak.

$2 \log_{\pi} 2 \quad \boxed{} \quad \log_{\pi} 4$

$\log_{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi} \right) \quad \boxed{} \quad \log_{2\pi} \pi$

$\log_{3\pi} 3 + \log_{3\pi} \pi \quad \boxed{} \quad \log_{2\pi} \pi + \log_{2\pi} 2$

$\log_{\frac{1}{2}} \pi^2 \quad \boxed{} \quad 4 \log_{\frac{1}{2}} \pi$



Ćwiczenie 5



Połącz w pary równe liczby, wiedząc, że $\log_a x = m$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$.

$\log_{\sqrt{a}} x + \log_a \sqrt[3]{x^4}$

$\frac{m}{2}$

$\log_{\sqrt{a}} x^2 - \log_a x^4$

$\frac{10m}{3}$

$\log_{a^2} \sqrt{x} + \log_a \sqrt[4]{x}$

0

Ćwiczenie 6



Uzupełnij zdania, wpisując odpowiednie liczby.

Jeśli $\log 10 = \log_x \left(\frac{x+2}{x} \right)$, to $x =$.

Jeśli $\log_{x^2}(x+2) = 2 \log_{x^2} x$, to $x =$.

Jeśli $\log \frac{x+1}{2} = \log \frac{3}{x}$, to $x =$.

Jeśli $\log_7(x^2 + 2) = \log_7(4x - 2)$, to $x =$.

Ćwiczenie 7



Wykaż, że jeśli $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ to $a^{\sqrt{\log_a b}} + \sqrt{\log_a b} \cdot \sqrt{\log_b a} - b^{\sqrt{\log_b a}} = 1$.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że istnieją dwie liczby rzeczywiste x spełniające warunek $\log_5 x \cdot \log_2 x = \log_5 2$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przekształcanie wyrażeń zawierających logarytmy

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

I. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przekształca wyrażenia arytmetyczne zawierające logarytmy;
- zapisuje w prostszej postaci wyrażenia algebraiczne, korzystając z poznanych wzorów logarytmicznych;
- przeprowadza rozumowania, podaje argumenty uzasadniające poprawność tych rozumowań;
- buduje model matematyczny problemu, uwzględniając konieczne założenia i zastrzeżenia.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- puzzle eksperckie;
- kot i mysz.

Formy pracy:

- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

Uczniowie w domu mieli za zadanie wymyślenie i udowodnienie prostego twierdzenia dotyczącego przekształceń logarytmicznych. Zajęcia rozpoczynają się od prezentacji najciekawszych twierdzeń i ich dowodów. Jest to też okazja do wspólnego przypomnienia poznanych wzorów i sposobów wykonywania działań na logarytmach. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

- Praca w grupach metodą puzzli eksperckich. Poproszeni o to kilka dni wcześniej uczniowie, zapoznali się z materiałem zawartym w sekcji Przeczytaj i filmem. Ich zadaniem jest przekazanie zdobytych informacji grupom, tak aby każdy uczeń potrafił rozwiązać analogiczne zadanie.
- Uczniowie w parach, metodą kot i mysz, rozwiązują proponowane w materiale ćwiczenia interaktywne. Przy czym mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot, sprawdza ich poprawność – po 2 nieudanych próbach – kot „łapie mysz”, która wypada z gry. Aby gra toczyła się dalej – teraz mysz staje się kotem i procedura się powtarza. Pracę uczniów nadzorują nadal eksperci. W razie wątpliwości prosząc o pomoc nauczyciela.

Faza podsumowująca:

- Podsumowaniem zajęć jest dyskusja – jakie umiejętności potrzebne są do sprawnego rozwiązywania zadań z logarytmami, jakie strategie są najbardziej przydatne.
- Uczniowie – eksperci opowiadają o pracy grup, dzielą się swoimi spostrzeżeniami, zwracają uwagę na mocne i słabe strony pracy.
- Uczniowie dokonują oceny koleżeńskej partnerów/ partnerki z zabawy – kot i mysz.

- Nauczyciel dzieli się swoimi obserwacjami, zwracając szczególną uwagę na wiodącą rolę ekspertów i ich merytoryczne przygotowanie.

Praca domowa:

- Zadaniem uczniów jest poszukanie w domu zastosowań logarytmów w innych dziedzinach wiedzy. Te zastosowania będą stanowiły tematykę następnych lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Działania na logarytmach. Przykłady](#)

Wskazówki metodyczne:

Z filmem samouczkiem każdy uczeń może zapoznać się w domu i na jego podstawie przygotować jedno zadanie, które na lekcji da do rozwiązania koleżance lub koledze z ławki.