



Kąty między odcinkami w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Kąty między odcinkami w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym

Źródło: Richard Ciraulo, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Rozejrzyj się po pokoju, w którym się znajdujesz. Czy jest w kształcie graniastosłupa czworokątnego? Jeżeli tak, to wyobraź sobie przekątną jednej ściany i spójrz na krawędź sufitu leżącą na sąsiedniej ścianie, z którą ta przekątna ma wspólny róg. Jaki kąt jest pomiędzy tymi dwoma odcinkami? Prosty? Ostry? A może rozwarty? Przyjrzyj się też przekątnym dwóch sąsiednich ścian, które schodzą się we wspólnym rogu. Jaki jest kąt między tymi przekątnymi? Zapewne widzisz już wiele różnych kątów między odcinkami, które otaczają cię w pokoju. W tym materiale będziemy je szczegółowo badać.

Twoje cele

- Wskażesz kąty między odcinkami w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym.
- Wyznaczysz miarę kąta między wskazanymi odcinkami w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym.
- Wykorzystasz wiedzę z trygonometrii i planimetrii do rozwiązywania zadań ze stereometrii.

Przeczytaj

Na początku przypomnijmy wiadomości dotyczące graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.

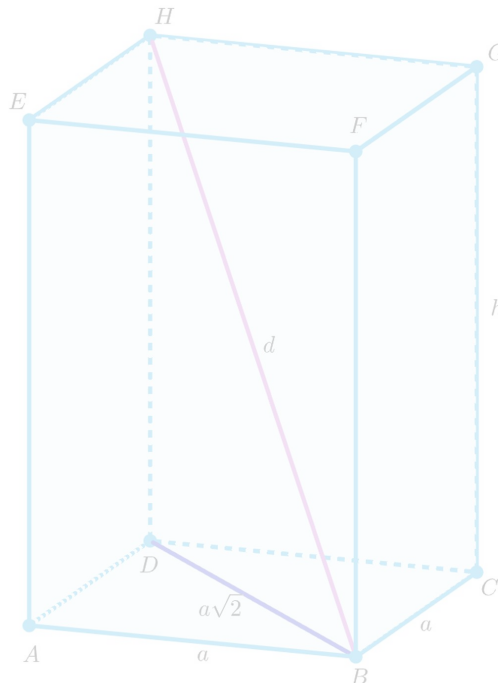
Definicja: graniastosłupa prawidłowego czworokątnego

Graniastosłup prawidłowy czworokątny to taki **graniastosłup prosty**, który ma w podstawie czworokąt foremny, czyli kwadrat.

Wzory

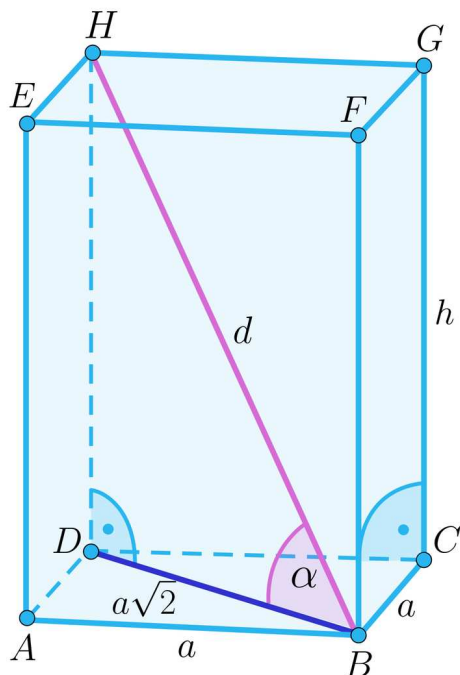
Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny o długości krawędzi podstawy a i krawędzi bocznej h . Wtedy:

- długość przekątnej podstawy $p = a\sqrt{2}$,
- długość przekątnej graniastosłupa $d = \sqrt{a^2 + a^2 + h^2} = \sqrt{2a^2 + h^2}$,
- suma długości wszystkich krawędzi w graniastosłupie $S = 8a + 4h$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DCZXm8WwG>

Kąt pomiędzy przekątną graniastosłupa a przekątną podstawy



Kąt ten można znaleźć w trójkącie prostokątnym $BH D$ i wyznaczyć z wartości jednej z funkcji trygonometrycznych:

$$\sin \alpha = \frac{h}{d}$$

$$\cos \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{d}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{a\sqrt{2}}$$

Przykład 1

Wyznamy miarę kąta pomiędzy przekątną graniastostupa prawidłowego czworokątnego a przekątną podstawy wiedząc, że długość krawędzi podstawy wynosi 5, a długość krawędzi bocznej jest równa $5\sqrt{6}$.

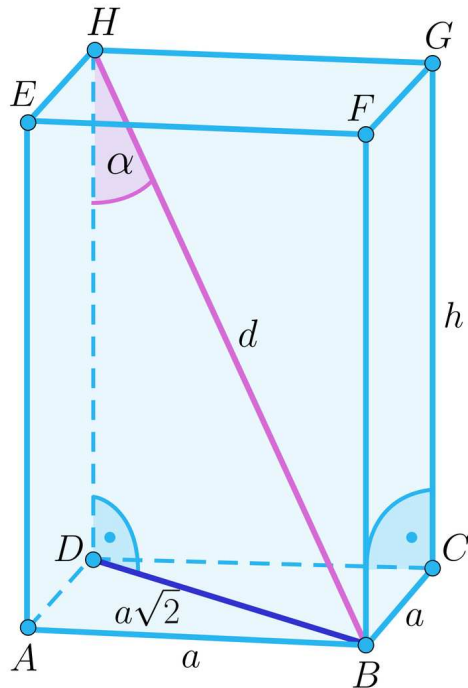
Rozwiązanie

Przekątna podstawy ma długość $5\sqrt{2}$, zatem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5\sqrt{6}}{5\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, więc $\alpha = 60^\circ$.

Kąt pomiędzy przekątną graniastostupa a krawędzią boczną



Kąt ten również można znaleźć w trójkącie prostokątnym $BH D$ i wyznaczyć wartości funkcji trygonometrycznych:

$$\sin \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{d}$$

$$\cos \alpha = \frac{h}{d}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{h}$$

Przykład 2

Wiedząc, że kąt pomiędzy przekątną graniastosłupa prawidłowego czworokątnego a krawędzią boczną jest równy 30° , a iloczyn długości krawędzi podstawy i krawędzi bocznej wynosi $6\sqrt{6}$, wyznaczmy długość krawędzi bocznej tego graniastosłupa.

Rozwiązanie

Przez a oznaczamy długość krawędzi podstawy graniastosłupa, natomiast przez h długość krawędzi bocznej. Wtedy, korzystając z trygonometrii w trójkącie prostokątnym $BH D$, otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{h}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{h}$$

$$h = \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = a\sqrt{6}$$

Zapisując informację dotyczącą iloczynu, mamy:

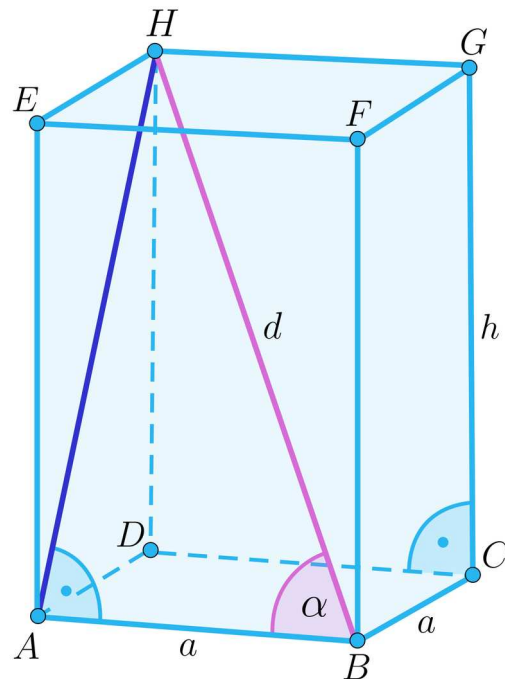
$$6\sqrt{6} = a \cdot a\sqrt{6}$$

$$a^2 = 6$$

$$a = \sqrt{6}$$

Długość krawędzi bocznej tego graniastostupa to $h = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 6$.

Kąt pomiędzy przekątną graniastostupa a krawędzią podstawy



Kąt ten można znaleźć w trójkącie prostokątnym ABH i wyznaczyć z wartości jednej z funkcji trygonometrycznych:

$$\sin \alpha = \frac{|AH|}{d}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{d}$$

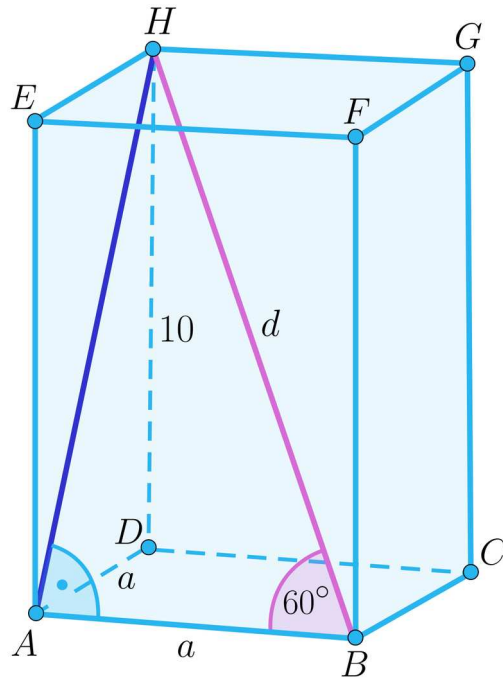
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AH|}{a}$$

Przykład 3

Obliczymy długość krawędzi podstawy graniastostupa prawidłowego czworokątnego wiedząc, że jego krawędź boczna ma długość 10, a kąt pomiędzy przekątną graniastostupa a krawędzią podstawy jest równy 60° .

Rozwiązanie

Z tw. Pitagorasa w trójkącie ADH wynika, że $a^2 + 10^2 = |AH|^2$, zatem $|AH| = \sqrt{a^2 + 100}$.



Korzystając z funkcji trygonometrycznej w trójkącie ABH otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{|AH|}{|AB|}$$

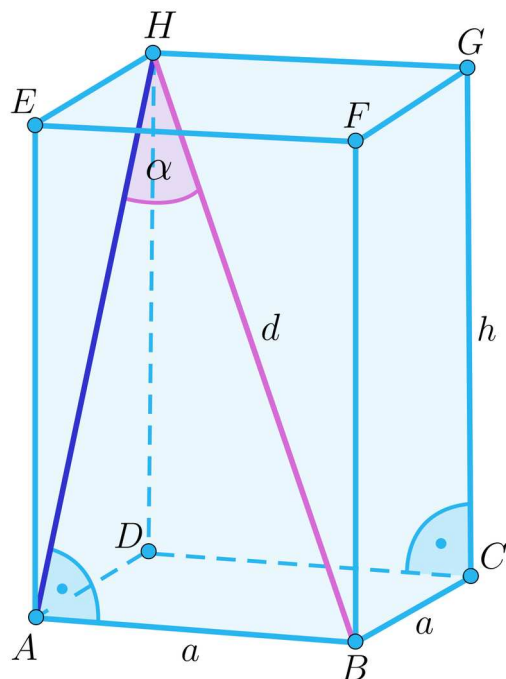
$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{a^2+100}}{a}$$

$$\sqrt{3}a = \sqrt{a^2 + 100}$$

$$3a^2 = a^2 + 100$$

$$a = 5\sqrt{2}$$

Kąt pomiędzy przekątną graniastostupa a przekątną ściany bocznej



Kąt ten można znaleźć w trójkącie prostokątnym ABH i wyznaczyć z wartości jednej z funkcji trygonometrycznych:

$$\sin \alpha = \frac{a}{d}$$

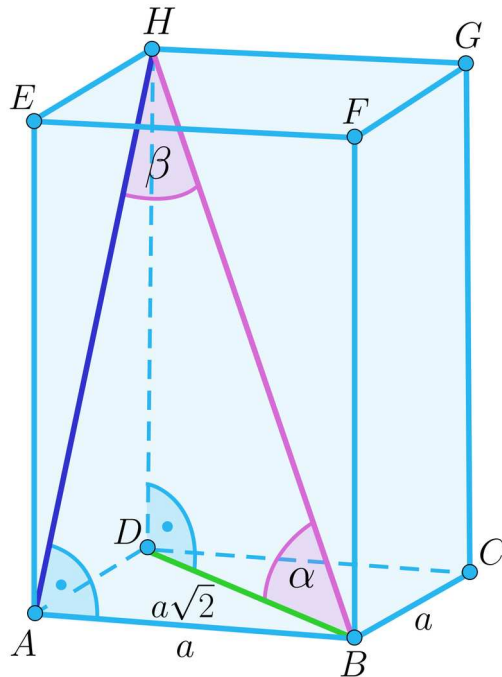
$$\cos \alpha = \frac{|AH|}{d}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{|AH|}$$

Przykład 4

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym dany jest kąt α pomiędzy przekątną graniastosłupa a przekątną podstawy. Wyznamy tangens kąta pomiędzy przekątną graniastosłupa a przekątną ściany bocznej w zależności od kąta α .

Rozwiązanie



Przez a oznaczamy długość krawędzi podstawy tego graniastoslupa. Wtedy przekatna podstawy ma długość $a\sqrt{2}$. Korzystając z funkcji trygonometrycznych w trójkącie BH otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|DH|}{a\sqrt{2}}$$

i przekształcając uzależniamy długość krawędzi bocznej graniastoslupa od a i α :

$$|DH| = \operatorname{tg} \alpha \cdot a\sqrt{2}$$

Korzystając z tw. Pitagorasa w trójkącie ADH wyznaczamy długość przekątnej AH :

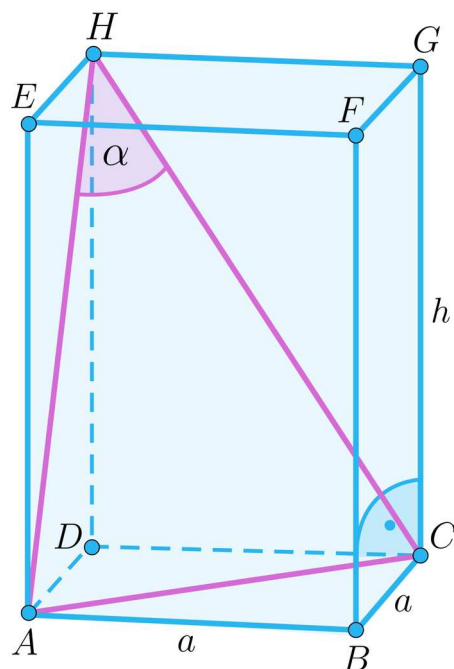
$$a^2 + (\operatorname{tg} \alpha \cdot a\sqrt{2})^2 = |AH|^2$$

$$|AH| = \sqrt{a^2 + 2a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = a\sqrt{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Korzystając z funkcji trygonometrycznych w trójkącie ABH wyznaczamy szukaną wartość:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|AB|}{|AH|} = \frac{a}{a\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Kąt pomiędzy przekątnymi sąsiednich ścian bocznych wychodzących z jednego wierzchołka



W przeciwieństwie do wyżej opisanych kątów, kąta pomiędzy przekątnymi sąsiednich ścian bocznych w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym nie umieścimy w trójkącie prostokątnym, którego bokami byłyby odcinki leżące na ścianach graniastosłupa. Znajdziemy go natomiast w trójkącie równoramiennym ACH . Trygonometrię w trójkącie dowolnym możemy stosować przy użyciu [twierdzenia cosinusów](#).

$$|AC|^2 = |AH|^2 + |CH|^2 - 2|AH||CH| \cos \alpha$$

Oznaczając przez a długość krawędzi podstawy, natomiast przez h długość krawędzi bocznej, otrzymujemy z tw. Pitagorasa $|AH| = |CH| = \sqrt{a^2 + h^2}$. Podstawiając do tw. cosinusów mamy:

$$(a\sqrt{2})^2 = \sqrt{a^2 + h^2}^2 + \sqrt{a^2 + h^2}^2 - 2\sqrt{a^2 + h^2}\sqrt{a^2 + h^2} \cos \alpha$$

$$2a^2 = a^2 + h^2 + a^2 + h^2 - 2(a^2 + h^2) \cos \alpha$$

$$2(a^2 + h^2) \cos \alpha = 2h^2$$

$$\cos \alpha = \frac{h^2}{a^2 + h^2}$$

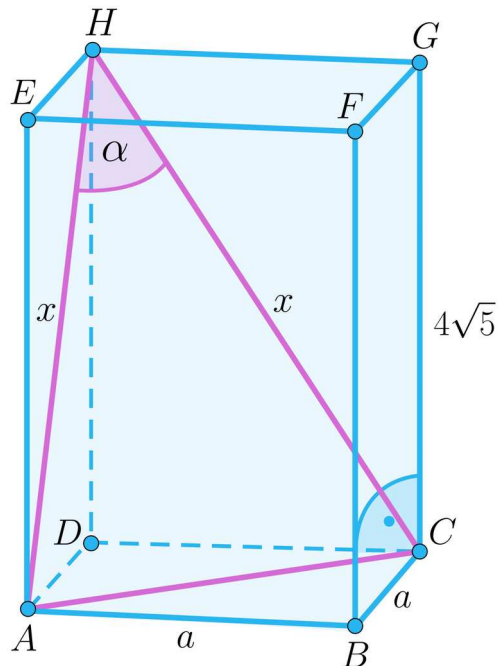
Zauważmy, że $\cos \alpha > 0$, a więc bez względu na wymiary graniastosłupa, kąt α będzie zawsze kątem ostrym.

Przykład 5

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym dany jest kąt α pomiędzy przekątnymi sąsiednich ścian bocznych taki, że $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Wiedząc, że krawędź boczna

graniastosłupa ma długość $4\sqrt{5}$, obliczymy długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

Rozwiązanie



Najpierw, znając $\sin \alpha$, przy pomocy [jedynek trygonometrycznej](#) wyznaczamy $\cos \alpha$:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

Korzystając z tw. cosinusów w trójkącie ACH otrzymujemy:

$$|AC|^2 = |AH|^2 + |CH|^2 - 2|AH||CH| \cos \alpha$$

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cdot \frac{4}{5}$$

$$2a^2 = \frac{2}{5}x^2$$

$$x = \sqrt{5}a$$

Korzystając z tw. Pitagorasa w trójkącie CGH otrzymujemy:

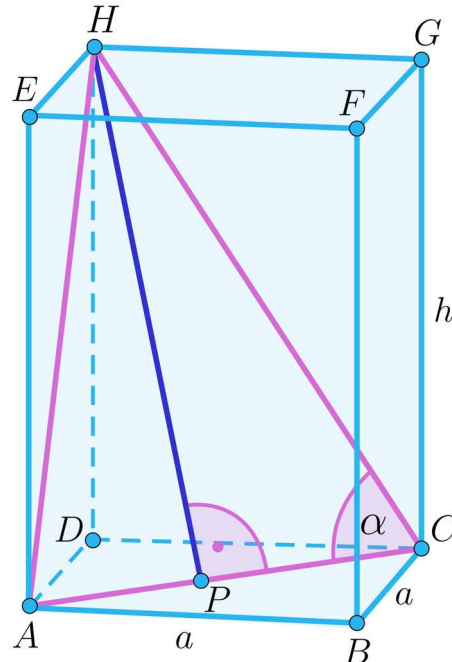
$$\left(4\sqrt{5}\right)^2 + a^2 = \left(\sqrt{5}a\right)^2$$

$$80 + a^2 = 5a^2$$

$$a^2 = 20$$

$$a = 2\sqrt{5}$$

Kąt pomiędzy przekątną podstawy a przekątną ściany bocznej wychodzącymi z jednego wierzchołka



Kąt α pomiędzy przekątną podstawy a przekątną ściany bocznej występuje w trójkącie równoramiennym ACH . Możemy więc, podobnie jak przy kącie między przekątnymi sąsiednich boków, korzystać z tw. cosinusów. Jednocześnie kąt α występuje w trójkącie prostokątnym CHP , gdzie P jest punktem przecięcia przekątnych podstawy, który jednocześnie je połowi. Mamy więc do dyspozycji funkcje trygonometryczne:

$$\sin \alpha = \frac{|HP|}{|HC|}$$

$$\cos \alpha = \frac{|PC|}{|HC|}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|HP|}{|PC|}$$

Słownik

graniastosłup prosty

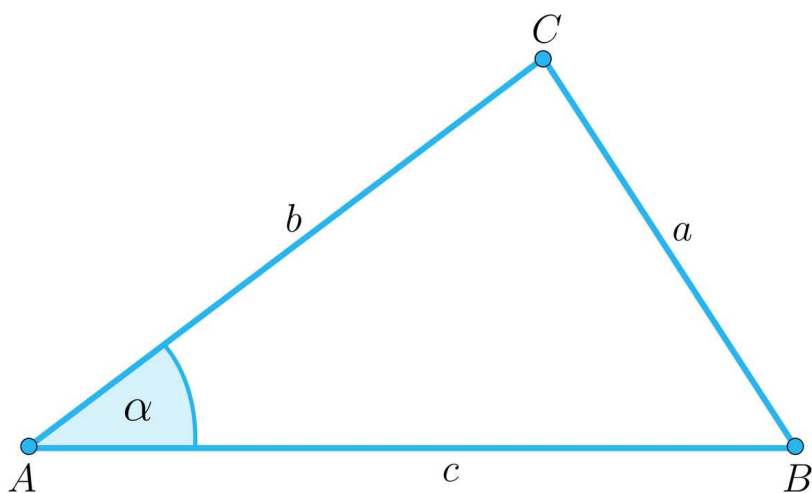
to graniastosłup, w którym wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, a więc wszystkie ściany boczne są prostokątami

twierdzenie Pitagorasa

jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej

twierdzenie cosinusów

w dowolnym trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

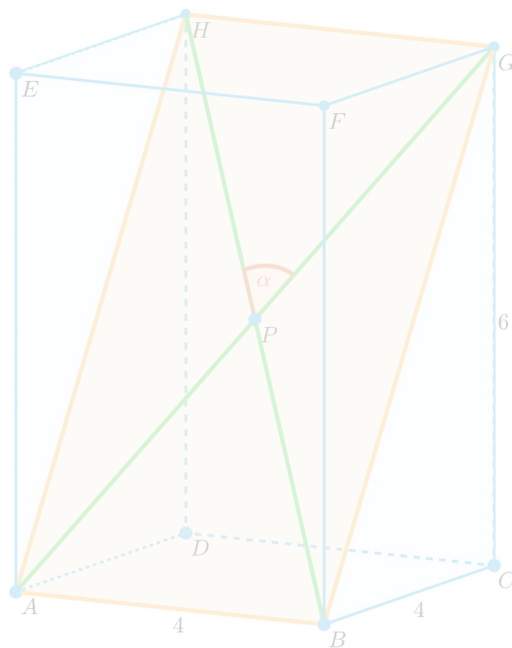
jedynka trygonometryczna

to tożsamość trygonometryczna mówiąca, że suma kwadratów sinusa i cosinusa tego samego kąta jest zawsze równa 1; dla dowolnego kąta α zachodzi: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Aplet

Polecenie 1

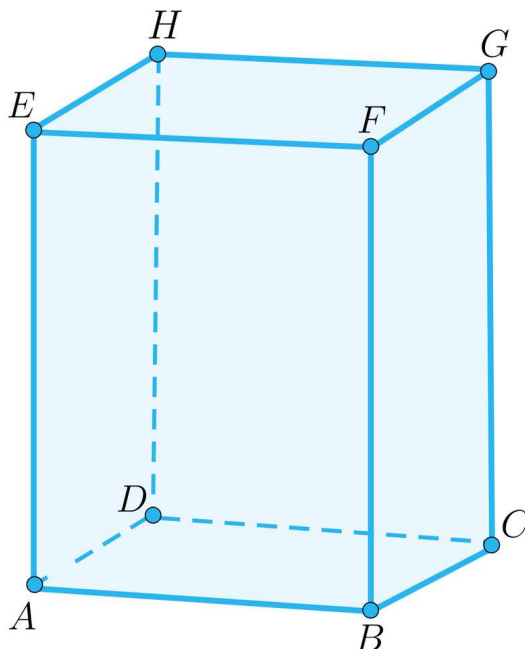
Zapoznaj się z apletem, a następnie rozwiąż polecenia 2 i 3.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DqqZOOOrTw>

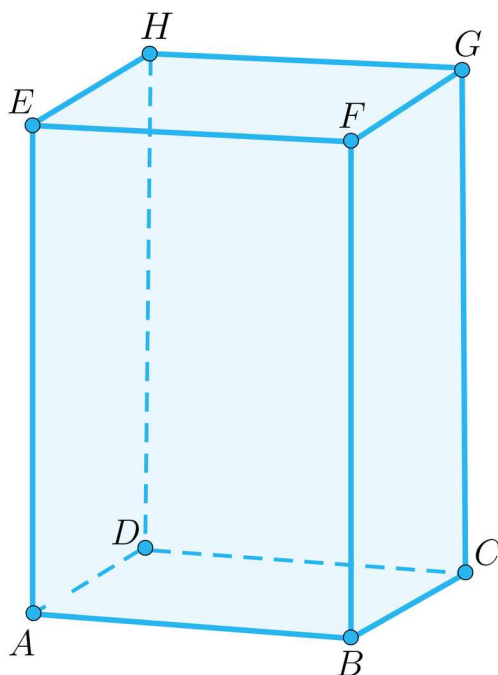
Polecenie 2

Oblicz cosinus kąta pomiędzy przekątnymi AG i BH graniastostupa prawidłowego czworokątnego wiedząc, że w podstawie jest kwadrat o polu 36, a suma długości wszystkich krawędzi wynosi 80.



Polecenie 3

W graniastostupie prawidłowym czworokątnym przekątne AG i CE przecinają się pod kątem β takim, że $\cos \beta = \frac{1}{3}$. Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastostupa wynosi 48. Oblicz długość krawędzi podstawy.



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o długości 15 tworzy z krawędzią podstawy kąt α taki, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz długość krawędzi bocznej tego graniastosłupa.

Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy jest dwa razy dłuższa od krawędzi bocznej. Oblicz sinus kąta pomiędzy przekątną ściany bocznej a przekątną podstawy wychodzącymi z jednego wierzchołka.

Ćwiczenie 8



W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna ściany bocznej tworzy z krawędzią podstawy kąt 60° . Oblicz cosinus kąta pomiędzy przekątnymi sąsiednich ścian bocznych wychodzących z jednego wierzchołka.

Dla nauczyciela

Autor: Bartłomiej Cymbalista

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąt między odcinkami w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum - poziom rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wskazuje kąty między odcinkami w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym,
- wyznacza miarę kąta między wskazanymi odcinkami w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym,
- wykorzystuje wiedzę z trygonometrii i planimetrii do rozwiązywania zadań ze stereometrii.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa nauczająca w oparciu o zagadnienia z sekcji „przeczytaj”,
- dyskusja,
- praca z medium bazowym,
- pokaz.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w parach,
- praca całą klasą.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda,
- model szkieletowy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, włóczka.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Kąty między odcinkami w graniastosłupie prawidłowym”, wskazuje cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel omawia kąty między różnymi odcinkami w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym w oparciu o sekcję „przeczytaj”, wraz z przykładami. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie omawianych kątów przy pomocy modelu szkieletowego i włóczki. Uczniowie wskazują przykład omawianego kąta wskazując odpowiednie odcinki w sali lekcyjnej (krawędzie sufitu, przekątne ściany itp.).
2. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia 1-4 z sekcji „sprawdź się”. Nauczyciel moderuje dyskusję nad poprawnymi odpowiedziami. W razie wątpliwości, uczniowie przedstawiają na tablicy poprawne rozwiązanie.
3. Uczniowie, w parach, rozwiązują ćwiczenia 7-8 z sekcji „sprawdź się”, a następnie wybrane osoby omawiają rozwiązanie na tablicy. Nauczyciel może nagrodzić poprawne rozwiązanie oceną.
4. Uczniowie w parach zapoznają się z apletem oraz rozwiązują polecenia 2-3 znajdujące się w tej sekcji. Wybrani uczniowie przedstawiają poprawne rozwiązania na tablicy.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się” oraz „Aplet”.

Zadanie domowe

Ćwiczenia 5-6 z sekcji „sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Graniastosłupy proste – własności](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może przedstawić aplet na dużym ekranie dla całej klasy, a następnie dać czas uczniom na indywidualne rozwiązanie zadań z tej sekcji. Może także ocenić rozwiązania tych zadań. Aplet można również wykorzystać w lekcji „Przekroje graniastosłupa prawidłowego czworokątnego”.