



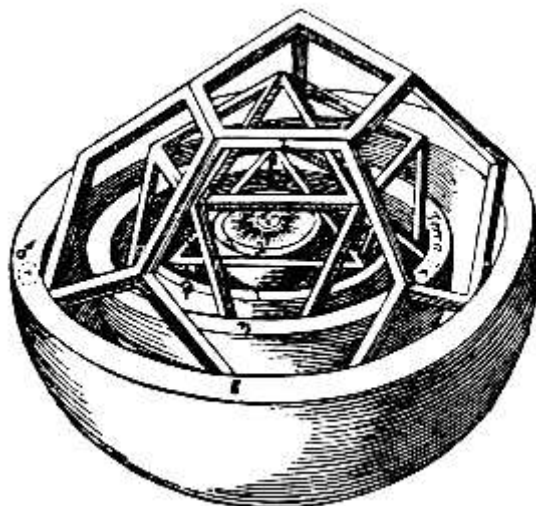
Objętość czworościanu foremnego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Objętość czworościanu foremnego

Źródło: Michael Dziedzic, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Czworościan foremny pojawia się w pracy Jana Keplera z 1596 r. *Mysterium Cosmographicum*. Opisuje on w niej model Układu Słonecznego opartego na pięciu bryłach platońskich. Czworościan jest jedną z nich – opisany na sferze Marsa i wpisany w sferę Jowisza. Tutaj poznasz relacje tej prostej bryły z kulą opisaną na niej i wpisaną w nią, a także relacje z innymi ciekawymi bryłami, jak na przykład stella octangula.



Powiększenie środkowej części *Mysterium Cosmographicum*

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Twoje cele

- Wyznaczysz objętość czworościanu foremnego.

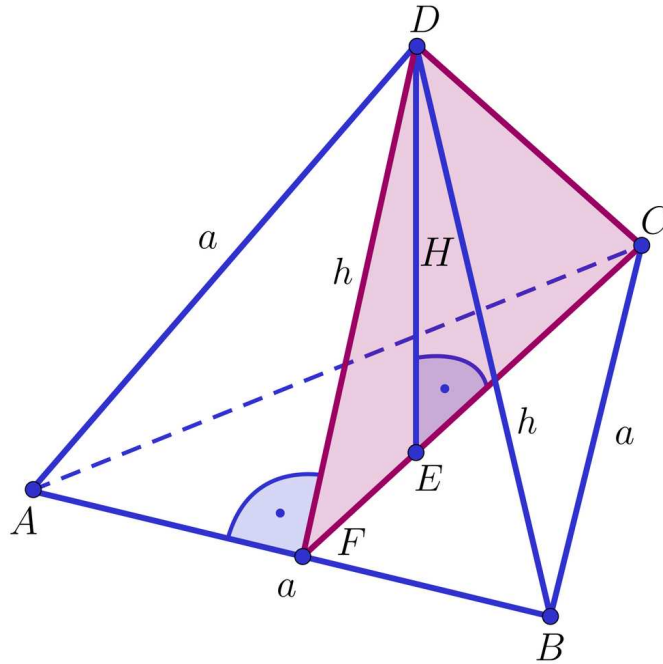
- Znajdziesz relację między objętością sześcianu, a objętością czworościanu wpisanego w ten sześcián.
- Znajdziesz relację między objętością czworościanu, a objętością stelli octanguli.
- Znajdziesz relację między objętością czworościanu foremnego, a objętością czworościanu dualnego do niego.
- Znajdziesz relację między objętością kuli opisanej na czworościanie foremnym, a objętością czworościanu.
- Znajdziesz relację między objętością kuli wpisanej w czworościan foremny, a objętością czworościanu.

Przeczytaj

Przykład 1

Wyprowadzimy wzór na objętość czworościanu foremnego o krawędzi długości a .

Rozwiązanie:



Czworościan foremny jest ostrosłupem, zatem jego objętość obliczamy ze wzoru $V = \frac{1}{3}P_p H$.

Podstawa jest trójkątem równobocznym, czyli $V = \frac{1}{3}P_p H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot H$.

Punkt E jest środkiem ciężkości trójkąta ABC , stąd długość odcinka EF jest równa $\frac{1}{3}h$, gdzie h to wysokość trójkąta ABC .

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy równość $(\frac{1}{3}h)^2 + H^2 = h^2$. Stąd $H^2 = \frac{8}{9}h^2$, czyli $H = \frac{2\sqrt{2}}{3}h = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

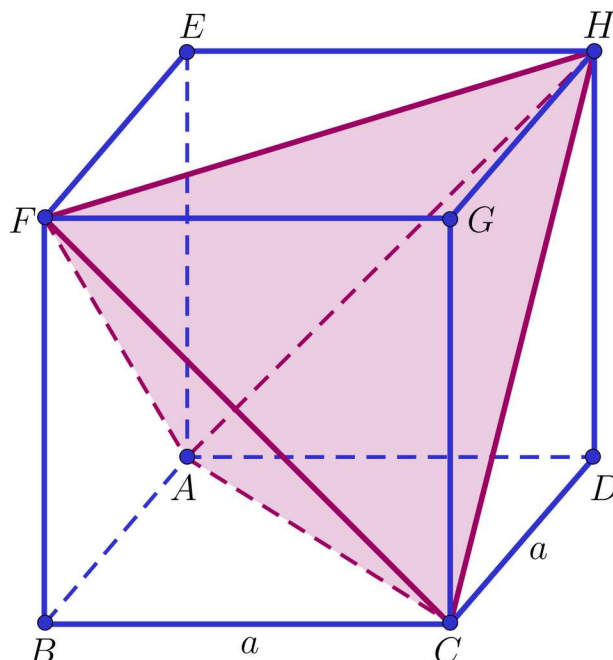
Wstawiając do wzoru otrzymujemy:

$$V = \frac{1}{3}P_p H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Przykład 2

Czworościan foremny wpisano w sześcian o krawędzi długości a tak, że każda krawędź czworościanu jest przekątną tego sześcianu. Wyznamy stosunek objętości sześcianu do objętości czworościanu.

Rozwiązanie:



Objętość sześcianu wynosi $V_{sz} = a^3$. Długość d krawędzi utworzonego czworościanu jest przekątną ściany sześcianu, czyli $d = a\sqrt{2}$. Korzystając ze wzoru na objętość czworościanu $V_{cz} = \frac{d^3\sqrt{2}}{12}$, stosunek objętości sześcianu do objętości czworościanu wynosi $\frac{V_{sz}}{V_{cz}} = \frac{a^3}{\frac{d^3\sqrt{2}}{12}} = \frac{a^3}{\frac{(a\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{12}} = \frac{3}{1}$.

Przykład 3

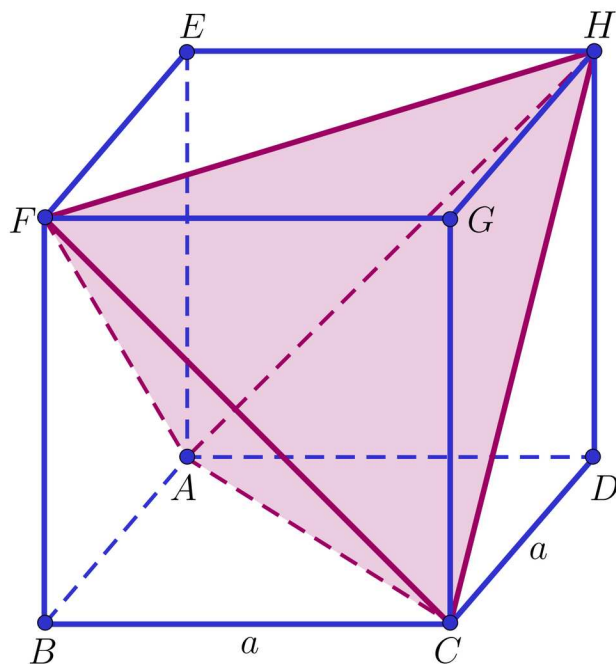
Czworościan foremny wpisano w sześcian o krawędzi długości 6 cm tak, że każda krawędź czworościanu jest przekątną tego sześcianu. Wyznamy objętość czworościanu.

Rozwiązanie:

Rozwiązując to zadanie spojrzmy na tę sytuację nieco inaczej, niż w przykładzie powyżej.

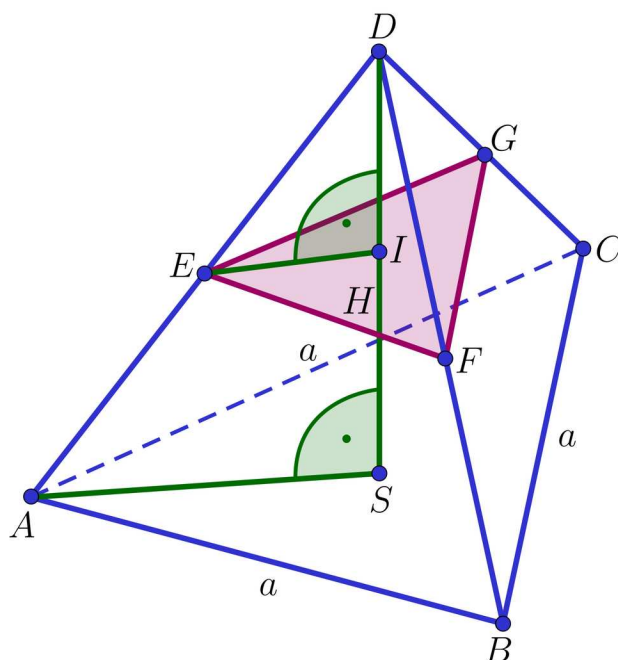
Zauważmy, że aby obliczyć objętość czworościanu wystarczy od objętości sześcianu odjąć cztery objętości ostrosłupów o podstawie trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 6 i wysokości długości 6.

Zatem $V = 6^3 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot 6 = 72 \text{ cm}^3$.



Przykład 4

Objętość czworościanu foremnego wynosi V . Ścięto go w połowie wysokości płaszczyzną równoległą do podstawy. Objętość tej części czworościanu, która została, wynosi 77 cm^3 . Obliczmy objętość V czworościanu przed ścięciem.



Rozwiązanie:

Trójkąty $\triangle DEI$ i $\triangle DAS$ są podobne ponieważ są prostokątne i mają wspólny kąt $\angle EDI$.

Z założenia $|DI| = \frac{1}{2}|DS|$, czyli skala podobieństwa $k = \frac{1}{2}$.

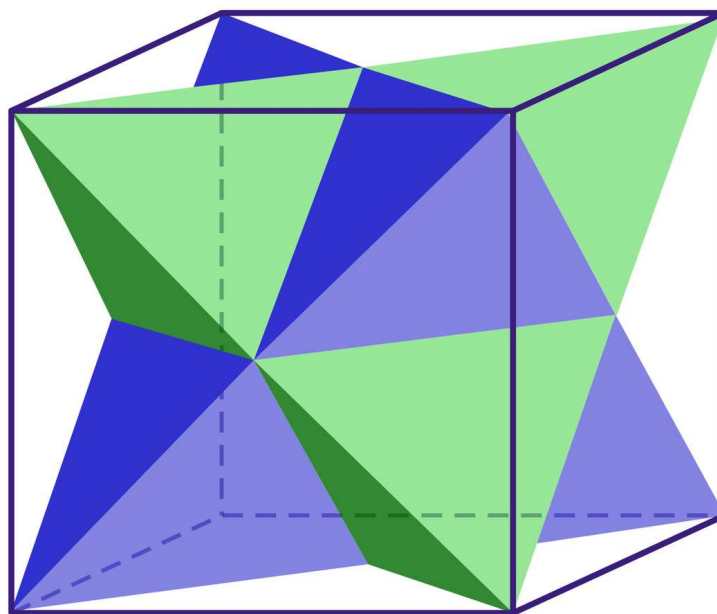
Oznaczmy objętość części ściętej czworościanu przez V_s , a objętość bryły, która pozostała po ścięciu przez V_p .

Mamy zależność $\frac{V_s}{V} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Stąd $V_s = \frac{1}{8}V$, czyli $V_p = \frac{7}{8}V$, a stąd $V = \frac{8}{7}V_p = \frac{8}{7} \cdot 77 = 88 \text{ cm}^3$.

Przykład 5

Stella octangula wpisana jest w sześcian o objętości V . Wyznamy stosunek objętości sześcianu do objętości V_s stelli octanguli.

Rozwiązanie:



Objętość stelli octanguli znajdziemy dodając do objętości czworościanu V_1 wpisanego w sześcian, którego krawędź jest przekątną sześcianu, objętość czterech mniejszych czworościanów foremnych o objętości V_2 :

$V_s = V_1 + 4V_2$, których krawędź jest połową krawędzi czworościanu większego jako połowa długości przekątnej kwadratu.

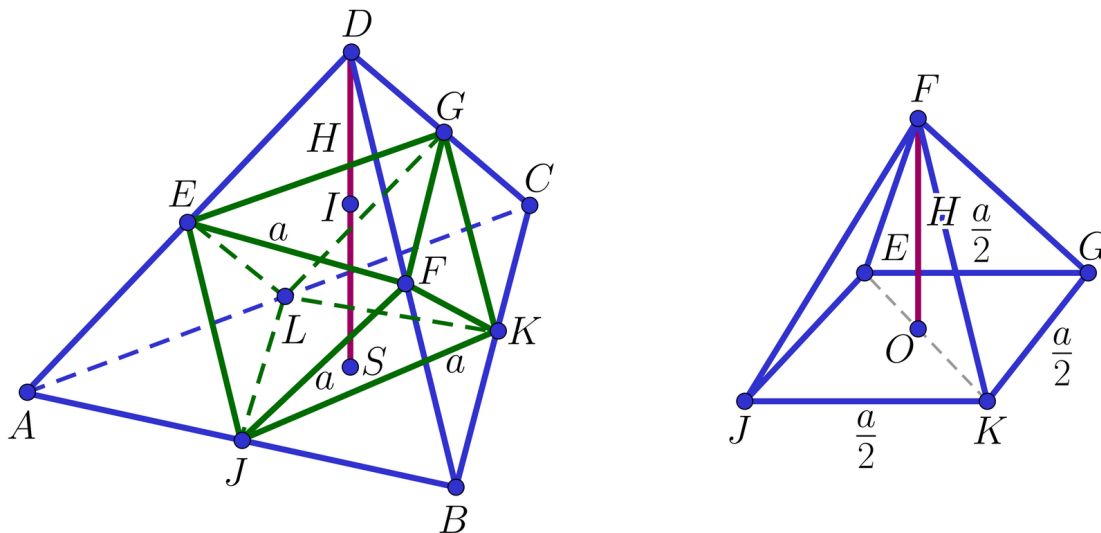
Z Przykładu 4. wynika, że $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{8}$. Podstawiając otrzymujemy

$V_s = V_1 + 4V_2 = V_1 + 4\frac{1}{8}V_1 = \frac{5}{2}V_1$. Następnie korzystając z Przykładu 2. stosunek objętości sześcianu do objętości dużego czworościanu wynosi $\frac{V}{V_1} = \frac{3}{1}$. W konsekwencji $\frac{V}{V_s} = \frac{3V_1}{\frac{5}{2}V_1} = \frac{2}{5}$.

Przykład 6

Łącząc odpowiednio środki krawędzi o długości a czworościanu foremnego otrzymamy **ośmiościan foremny**. Wyznamy stosunek objętości tego czworościanu do objętości ośmiościanu.

Rozwiązanie:



Zauważmy, że ośmiościan tworzą dwa przystające ostrosłupy o podstawie kwadratu, którego bok wynosi $\frac{a}{2}$, połączone podstawami.

Krawędzie ostrosłupów mają również długość $\frac{a}{2}$.

Zatem objętość ośmiościanu $V = 2V_o = 2 \cdot \frac{1}{3} P_p H$, gdzie P_p to pole podstawy ostrosłupa, a H jego wysokość.

Pole podstawy $P_p = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$.

Wyznamy długość odcinka OK :

$|OK| = \frac{a}{2} \sqrt{2} = \frac{a}{4} \sqrt{2}$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego FOK otrzymujemy $\frac{a^2}{4} = H^2 + \left(\frac{a}{4} \sqrt{2}\right)^2$.

Stąd $H^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{2a^2}{16} = \frac{2a^2}{16} = \frac{a^2}{8}$, więc $H = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Podstawiając do wzoru otrzymujemy $V = 2V_o = 2 \cdot \frac{1}{3} P_p H = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a^3}{12\sqrt{2}}$.

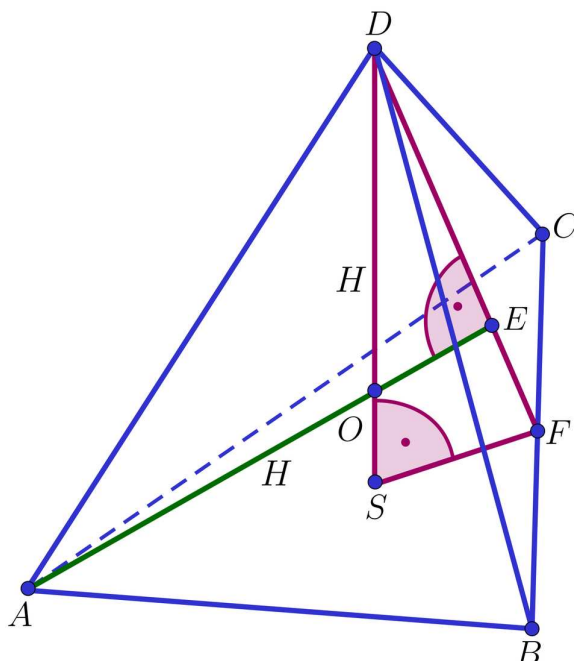
Korzystając z Przykładu 1. objętość czworościanu wyraża się wzorem $V_{cz} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$, zatem

$$\frac{V_{cz}}{V} = \frac{\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}}{\frac{a^3}{12\sqrt{2}}} = \frac{2}{1}.$$

Przykład 7

Na czworościanie foremnym opisano kulę. Wyznamy stosunek objętości tej kuli do objętości czworościanu.

Rozwiązanie:



Niech a oznacza długość krawędzi czworościanu, a $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ wysokość jego ściany.

Korzystając z Przykładu 1. wysokość czworościanu wynosi $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Punkt O jest punktem przecięcia się wysokości i zarazem środkiem kuli opisanej na tym czworościanie.

Niech R oznacza długość odcinka DO .

Trójkąty DSF i DEO są trójkątami prostokątnymi (kąt prosty trójkąta DEO to kąt DEO , a trójkąta DSF kąt DSF) posiadającymi wspólny kąt ODE .

Stąd wynika, że są podobne. Zachodzi więc $\frac{R}{\frac{2}{3}h} = \frac{h}{H}$, czyli

$$R = \frac{2}{3} h \frac{h}{H} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{a\sqrt{6}} = \frac{3a}{2\sqrt{6}} = \frac{3a\sqrt{6}}{2 \cdot 6} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Stosunek objętości kuli opisanej na czworościanie foremnym do objętości tego

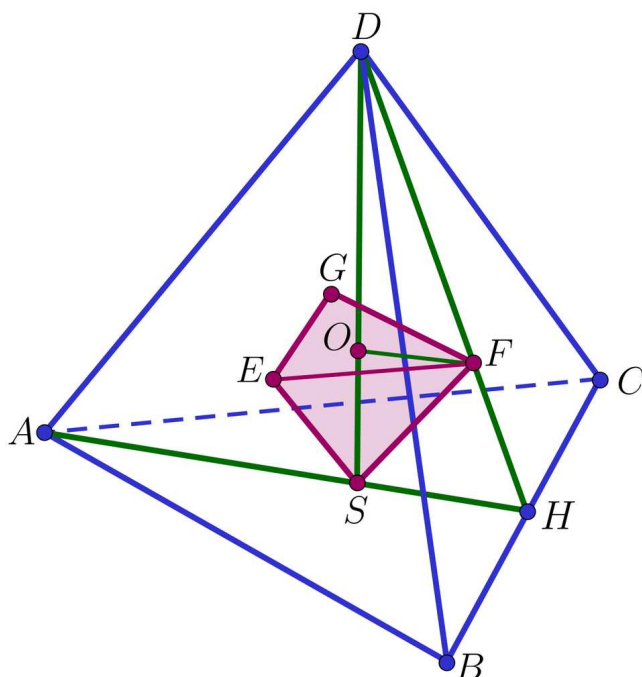
$$\text{czworościanu to } \frac{V_k}{V_{cz}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{a^3\sqrt{2}}{12}} = \frac{4 \cdot 12}{3} \cdot \frac{\pi}{a^3\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi.$$

Dwa ostatnie przykłady dotyczą pojęcia **wieloscianu dualnego**.

Przykład 8

Wyznamy stosunek objętości czworościanu dualnego (wewnętrznego) do objętości czworościanu foremnego pierwotnego (zewnętrznego).

Rozwiązanie:



Wyznamy skalę podobieństwa między ścianą boczną czworościanu foremnego zewnętrznego, a ścianą boczną czworościanu foremnego wewnętrznego.

Trójkąty prostokątne DSH i DOF są podobne, ponieważ mają wspólny kąt ODF .

$$\text{Stąd } \frac{|OF|}{|FD|} = \frac{|SH|}{|HD|}.$$

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy $\frac{|OF|}{|FD|} = \frac{\frac{1}{3}h}{h} = \frac{1}{3}$, gdzie h oznacza wysokość trójkąta równobocznego – ściany zewnętrznego czworościanu foremnego.

Skala podobieństwa jest $k = \frac{1}{3}$, zatem stosunek objętości tych czworościanów wyraża się zależnością:

$$\frac{V_d}{V} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}, \text{ gdzie } V_d \text{ oznacza objętość czworościanu dualnego (wewnętrznego).}$$

Przykład 9

W czworościanie dualnym wpisano następny czworościan foremny dualny do niego. Jaki jest stosunek objętości tego „podwójnie dualnego” czworościanu foremnego do pierwotnego czworościanu?

Rozwiązanie:

$$\frac{V_d}{V} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \text{ i } \frac{V_{dd}}{V_d} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^3}, \text{ stąd } \frac{V_{dd}}{V} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^6}.$$

Słownik

czworościan foremny

czworościan, którego ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi

ośmiościan foremny

wielościan foremny o 8 ścianach będącymi przystającymi trójkątami równobocznymi

stella octangula

wielościan gwiaździsty skonstruowany poprzez nałożenie na siebie dwóch przystających czworościanów foremnych

wielościan dualny

wielościan zbudowany w ten sposób, że wierzchołek wielościanu dualnego leży w środku ciężkości ściany wielościanu pierwotnego, a jego krawędzie powstają przez połączenie środków ciężkości dwóch sąsiednich ścian

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z poniższą animacją 3D, a następnie rozwiąż polecenie kontrolne.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D8UODRrOV>

Film przybliżający zagadnienie objętości czworościanu foremnego.

Polecenie 2

Oblicz objętość czworościanu foremnego, którego wysokość ma długość 1.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe. Jeśli krawędź czworościanu foremnego jest równa $\sqrt{2}$, to

☐ pole powierzchni całkowitej wynosi $2\sqrt{3}$

☐ wysokość ściany bocznej czworościanu foremnego jest równa $\frac{\sqrt{6}}{2}$

☐ objętość czworościanu jest równa $\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 2



Dany jest czworościan foremny o krawędzi długości a . Jak zmieni się jego objętość, jeżeli długość krawędzi zwiększymy trzykrotnie? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 27—krotnie się zwiększy.

☐ Pozostanie taka sama.

☐ Zwiększy się o 3 jednostki.

☐ 3—krotnie się zwiększy.

Ćwiczenie 3



W sześciennym akwariu o krawędzi 20 cm włożono drewniany klocek w kształcie czworościanu foremnego, którego cztery wierzchołki dotykają wierzchołków akwarium. Wskaż zdania prawdziwe.

☐ Objętość drewnianego klocka to $\frac{250\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$.

☐ Do akwarium można wlać jeszcze $\frac{16}{3}$ l wody.

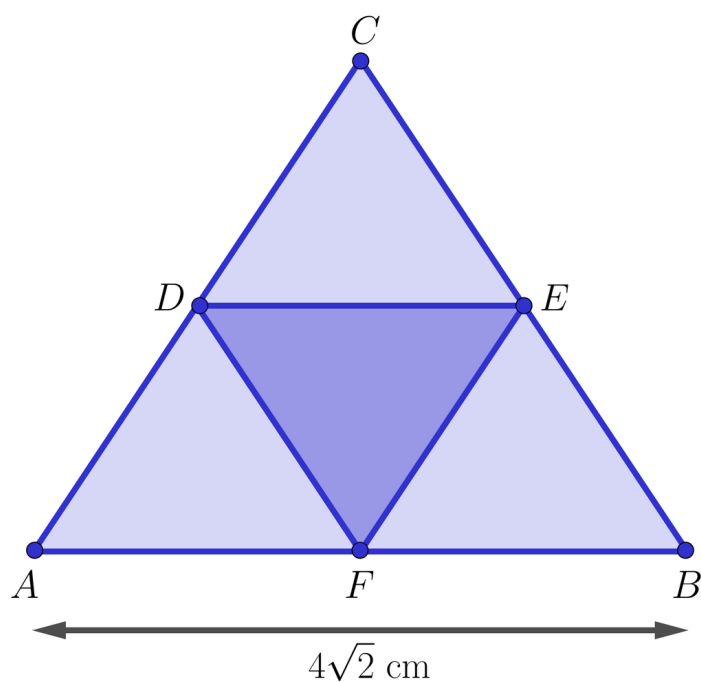
☐ Objętość drewnianego klocka to $\frac{8000}{3} \text{ cm}^3$.

☐ Objętość akwarium to $\frac{250\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$.

Ćwiczenie 4



Trójkąt równoboczny o boku $4\sqrt{2}$ cm jest siatką czworościanu foremnego.



Zaznacz poprawną odpowiedź. Objętość tego czworościanu to

☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{8}{3}$

☐ $\frac{64}{3}$

☐ $\frac{3}{8}$

Ćwiczenie 5



Połącz parami wysokość z objętością czworościanu foremnego.

$$H = 4$$

$$V = 9\sqrt{8}$$

$$H = 2\sqrt{6}$$

$$V = \sqrt{3}$$

$$H = 2$$

$$V = 4\sqrt{12}$$

$$H = 2\sqrt{3}$$

$$V = 9$$

Ćwiczenie 6



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Krawędź czworościanu foremnego, którego objętość jest równa 9 cm^3 , wynosi

☐ $3\sqrt{2}$

☐ $2\sqrt{6}$

☐ $\frac{6}{\sqrt{2}}$

☐ $6\sqrt{2}$

Ćwiczenie 7



Czworościan foremny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź boczną i wysokość podstawy. Jako przekrój otrzymano trójkąt o polu równym $9\sqrt{2} \text{ cm}^2$. Oblicz objętość tego czworościanu.

Ćwiczenie 8



Zaznacz poprawną odpowiedź. Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego wynosi $36\sqrt{3}$. Objętość czworościanu wynosi

☐ $9\sqrt{2}$

☐ $18\sqrt{2}$

☐ $16\sqrt{3}$

☐ $\frac{16}{3}\sqrt{3}$

Dla nauczyciela

Autor: Beata Kuna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Objętość czworościanu foremnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje obywatelskie.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wylicza wysokość czworościanu foremnego;
- wylicza objętość czworościanu foremnego, objętość kuli opisanej na czworościanie i objętość kuli wpisanej w czworościan;
- poznaje relacje z innymi bryłami związanymi z czworościanem foremnym.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa kierowana;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel może przygotować wcześniej niektóre z brył związanych z tematem – czworościan foremny, sześcián, ósmiościan, stęllę octangulę. Może też wyświetlić albo narysować trudny rysunek – sferę opisaną na czworościanie i sferę wpisaną w czworościan i wspomnieć o modelu Keplera.
2. Następnie wraz z uczniami określa cele i kryteria sukcesu.
3. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel z pomocą uczniów wyznacza wzór na wysokość i objętość czworościanu foremnego.
2. Nauczyciel prosi uczniów o obejrzenie animacji 3D, następnie wraz z uczniami omawia rozwiązania zadań, które są zawarte w animacji.
3. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Uczniowie w grupach analizują poszczególne przykłady obliczania objętości czworościanu foremnego. Wspólnie wyjaśniają sposób rozwiązania opisany w przykładach.
4. Nauczyciel prosi uczniów o samodzielne rozwiązanie ćwiczeń 1-4 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem przykładów i ćwiczeń, które pojawiły się na lekcji.

Praca domowa:

- Uczniowie wykonują polecenie z sekcji „Animacja 3D” i ćwiczenia 5-8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Czworościan foremny](#)

Wskazówki metodyczne:

- Polecenia związane z Animacją 3D można wykorzystać jako materiał, służący powtórzeniu materiału w temacie „Objętość czworoscianu foremnego” lub przygotowania do matury.