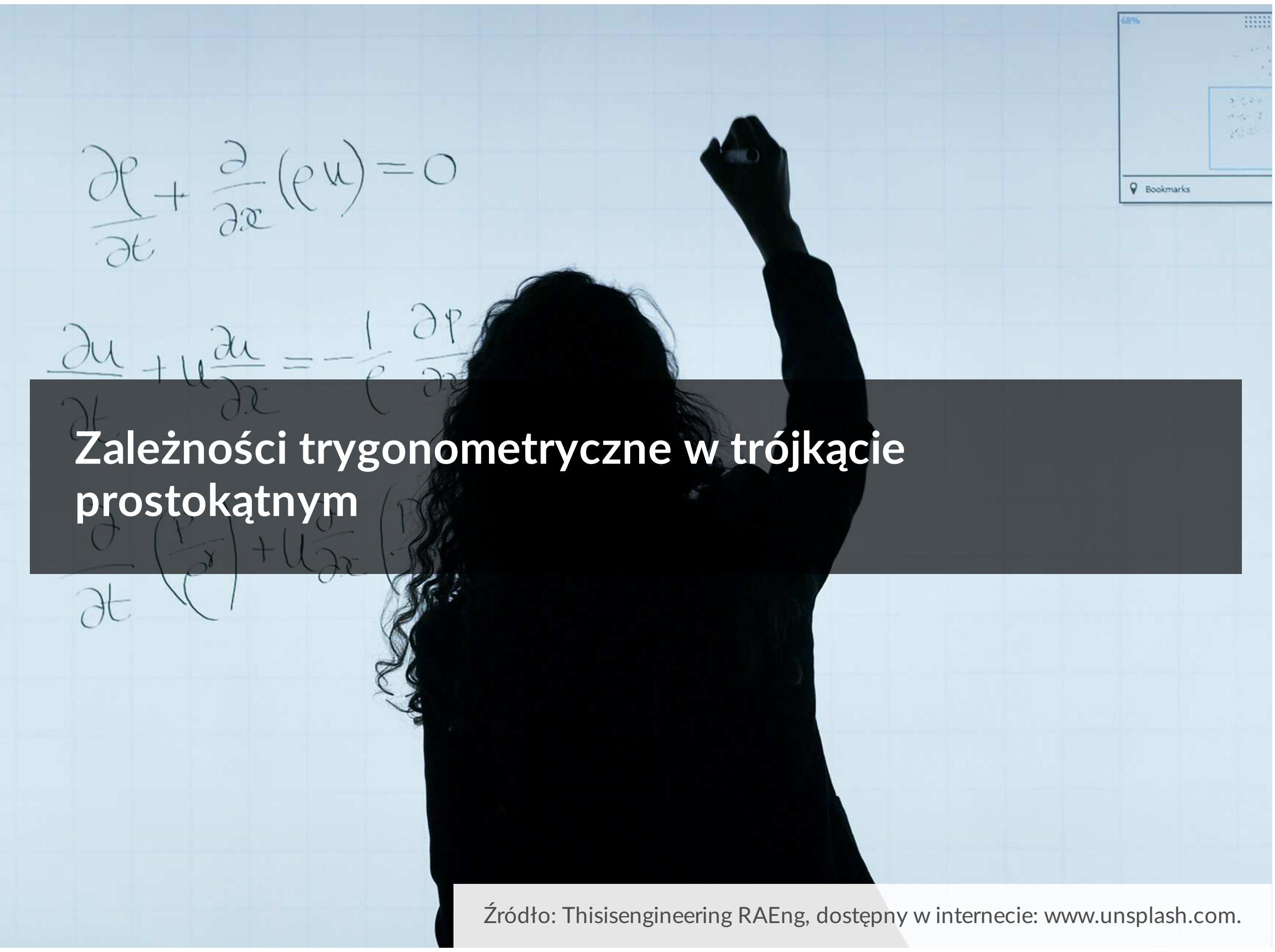
Zależności trygonometryczne w trójkącie prostokątnym

Zależności trygonometryczne w trójkącie prostokątnym



Źródło: Thisisengineering RAEng, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Trygonometria, to dział matematyki zajmujący się badaniem związków między długościami boków a miarami kątów wewnętrznych w trójkątach. Rozszerzeniem podstawowej trygonometrii są tzw. funkcje trygonometryczne. Do funkcji trygonometrycznych współcześnie zalicza się m.in. sinus, cosinus i tangens.

Czy wiesz, skąd pochodzą nazwy tych funkcji? Przyjrzyjmy się historii nazwy funkcji sinus. Pojęcie to powstało w Indiach i zostało przyswojone przez arabskich uczonych. Jego hinduska nazwa zapisywana jest bez samogłosek, jako „jb" i pod taką nazwą funkcjonowała również w krajach arabskich. Tłumacz, który przekładał księgi na łacinę nie zdawał sobie sprawy, że słowa jiba i jaib sa pisane tak samo po arabsku (wiele samogłosek jest usuwanych z wyrazów pisanych w alfabecie arabskim). Sprawdził tylko, że słowo to oznacza zatokę. Po łacinie zatoka to sinus i tak też przetłumaczył słowo „jb".

W tym materiale przypomnisz sobie jak definiujemy funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym i jak można wykorzystać ich zależności do rozwiązywania zadań.

Twoje cele

- przekształcisz wyrażenia zawierające sinus, cosinus lub tangens kąta,
- wykorzystasz definicję i wyznaczysz wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kąta ostrego,

- sprawdzisz, czy podane równości są tożsamościami trygonometrycznymi.

Przeczytaj

Poniższe twierdzenie, zwane **jedynką trygonometryczną**, pokazuje związek między sinusem i cosinusem kąta ostrego. Jest to inne wysłowienie twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenie: Jedynka trygonometryczna

Dla każdego kąta ostrego α prawdziwa jest zależność:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

Dowód

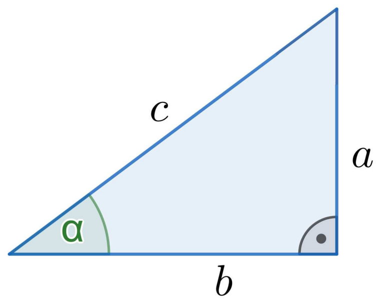
Przy oznaczeniach z rysunku obok mamy:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1,$

bowiem

$a^2 + b^2 = c^2$

na mocy twierdzenia Pitagorasa.



Przykład 1

Sinus kąta α w trójkącie prostokątnym jest równy $\frac{5}{13}$. Wyznaczymy wartość cosinusa tego kąta.

Rozwiązanie

Wiemy, że: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, więc:
$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \left(\frac{25}{169}\right) = \left(\frac{144}{169}\right) = \left(\frac{12}{13}\right)^2.$

Cosinus kąta ostrego jest dodatni, zatem $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.

Twierdzenie: Zależność między funkcjami $\sin$, $\cos$ **i** tg **tego samego kąta**

Dla każdego kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym zachodzi zależność:

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha$

Dowód. Przy oznaczeniach z poprzedniego rysunku mamy:

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}\right) = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$

Przykład 2

Wiemy, że sinus kąta α w trójkącie prostokątnym jest równy $\frac{3}{5}$. Wyznaczymy wartość tangensa tego kąta.

Rozwiązanie

Korzystając z jedynki trygonometrycznej, obliczamy:
$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2.$

Cosinus kąta ostrego jest dodatni, zatem $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Wobec tego:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}.$

Bezpośrednio z definicji sinusa, cosinusa i tangensa skorzystamy w dowodzie następnego twierdzenia.

Twierdzenie: Wzory redukcyjne

Dla każdego kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym zachodzą równości:
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ oraz $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$. Ponadto: $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

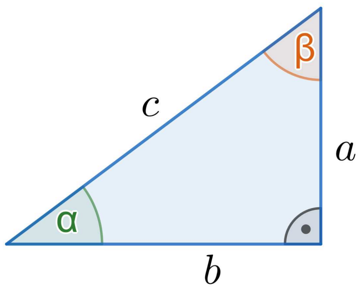
Dowód

Wprowadźmy oznaczenie: $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Wtedy przy oznaczeniach z rysunku obok, otrzymujemy:

$\sin\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha, \quad \cos\beta = \frac{a}{c} = \sin\alpha$ oraz

$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$



Przykład 3

Obliczymy wartość wyrażenia:
$(\cos 53^\circ + \cos 37^\circ)^2 - 2 \cdot \sin 53^\circ \cdot \sin 37^\circ + 3 \cdot \operatorname{tg} 53^\circ \cdot \operatorname{tg} 37^\circ.$

Rozwiązanie

Ponieważ $53^\circ + 37^\circ = 90^\circ$, więc zachodzą równości:

$\cos 53^\circ = \sin 37^\circ$, $\sin 53^\circ = \cos 37^\circ$ oraz $\operatorname{tg} 53^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 37^\circ}$.

Zatem:

$(\cos 53^\circ + \cos 37^\circ)^2 - 2 \cdot \sin 53^\circ \cdot \sin 37^\circ + 3 \cdot \operatorname{tg} 53^\circ \cdot \operatorname{tg} 37^\circ =$

$= (\sin 37^\circ + \cos 37^\circ)^2 - 2 \cdot \cos 37^\circ \cdot \sin 37^\circ + 3 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 37^\circ} \cdot \operatorname{tg} 37^\circ =$

$= \sin^2 37^\circ + 2 \cdot \sin 37^\circ \cdot \cos 37^\circ + \cos^2 37^\circ - 2 \cdot \sin 37^\circ \cdot \cos 37^\circ + 3 \cdot 1 =$

$= 1 + 3 = 4$

Przykład 4

Obliczymy wartość iloczynu $\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$.

Rozwiązanie

Ponieważ $80^\circ = 90^\circ - 10^\circ$ i $50^\circ = 90^\circ - 40^\circ$, więc:

$\operatorname{tg} 80^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 10^\circ}$ i $\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 40^\circ}$.

A zatem:

$\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 40^\circ} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 10^\circ} = 1.$

Przykład 5

Wiedząc, że α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg} \alpha = 5$, obliczymy wartość wyrażenia:

$\frac{2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}{4 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$.

Rozwiązanie

Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 5$, więc $\sin \alpha = 5 \cos \alpha$.

Zatem otrzymujemy:

$\frac{2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha}{4 \sin \alpha - 5 \cos \alpha} = \frac{2 \cdot 5 \cos \alpha + 3 \cos \alpha}{4 \cdot 5 \cos \alpha - 5 \cos \alpha} = \frac{13 \cos \alpha}{15 \cos \alpha} = \frac{13}{15}$.

Ważne!

Tożsamość trygonometryczna to równość, w której zmienne występują wyłącznie w argumentach funkcji trygonometrycznych, prawdziwa dla wszystkich wartości tych zmiennych, dla których funkcje mają sens.

Przykład 6

Wykażemy, że dla dowolnego kąta ostrego α zachodzi tożsamość:
$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$.

Rozwiązanie

Zapisaną w postaci złożonego wyrażenia lewą stronę równości (L) przekształcamy równoważnie tak, aby dojść do strony prawej (P).

Przyjmujemy:

$L = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 \ + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$ i $P = 2$.

Mamy: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + \ 2\sin\alpha\cos\alpha$, podobnie:

$(\sin\alpha - \ \cos\alpha)^2 = 1 - \ 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Stąd: $L = 1 - \ 2\sin\alpha\cos\alpha + \ 1 + 2\sin\alpha \ \cos\alpha = \ 2$,

czyli $L = P$.

Słownik

sinus kąta ostrego

stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta do długości przeciwprostokątnej

cosinus kąta ostrego

stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej

tangens kąta ostrego

stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie

twierdzenie Pitagorasa

jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów dwóch długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z zamieszczonymi w filmie rozwiązaniami zadań. Na ich podstawie wykonaj Polecenia 2, 3 i 4.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D18agqrKj

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej zależności trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym.

Polecenie 2

Wyznacz sinus kąta ostrego α, wiedząc, że $\cos\alpha = \frac{1}{10}$.

Polecenie 3

Wykaż, że jeżeli kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = 7$, to $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{7}{50}$.

Polecenie 4

Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwa jest równość:
$\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 1 - \cos^2\alpha$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Dany jest kąt ostry α. Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, oblicz $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$.

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski, Witold Sadowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zależności trygonometryczne w trójkącie prostokątnym

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° ,
w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°;
4) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przekształca wyrażenia zawierające sinus, cosinus lub tangens kąta,
- wykorzystuje definicję i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kąta ostrego,
- sprawdza, czy podane równości są tożsamościami trygonometrycznymi.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- stoliki eksperckie
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

Nauczyciel przedstawia temat i cele lekcji. Następnie wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 6-osobowe grupy. W kazdej grupie uczniowie dzielą się na ekspertów oznaczonych numerami od 1 do 6.
2. Każdy ekspert otrzymuje do rozwiązania jeden przykład z sekcji „Przeczytaj". Eksperci zgodnie z przydzielonymi przykładami zbierają się przy oddzielnych stolikach i przystępują do opracowania zagadnienia.
3. Po zakończeniu pracy w grupach eksperckich uczniowie wracają do grup macierzystych i przedstawiają swoje rozwiązania pozostałym członkom grupy.
4. Uczniowie analizują przykłady pokazane w filmie samouczku. Zgłaszają niezrozumiałe aspekty, które nauczyciel tłumaczy.
5. Uczniowie w tych samych grupach rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się". Grupa, która ukończy ćwiczenia z jak najmniejszą liczbą błędów, w jak najkrótszym czasie otrzymuje ocenę za aktywność.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują polecenia w sekcji „Prezentacja multimedialna".

Materiały pomocnicze:

- Jedynka trygonometryczna
- Tożsamości trygonometryczne

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek można wykorzystać na lekcji poświęconej tożsamościom trygonometrycznym.