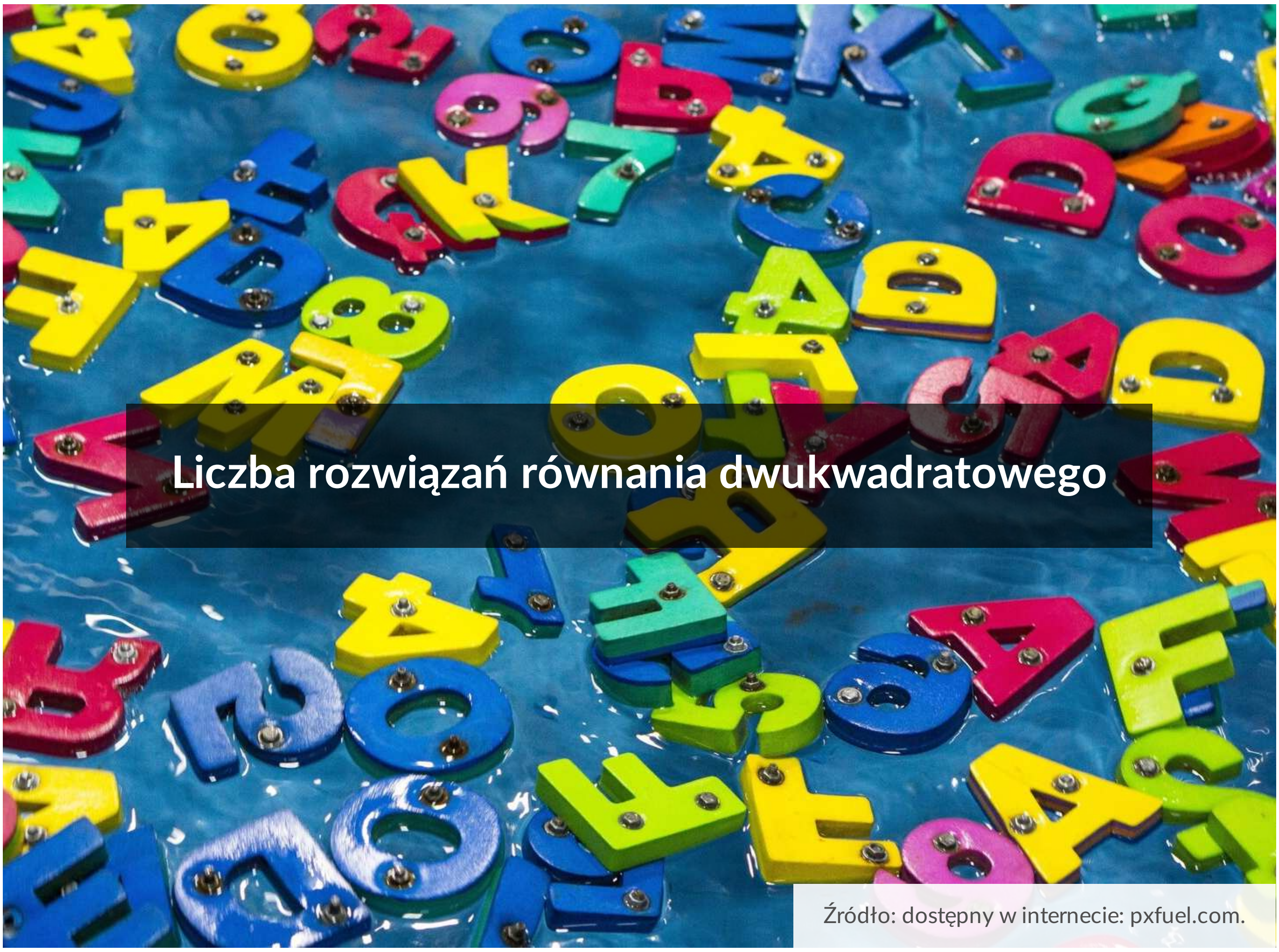
Liczba rozwiązań równania dwukwadratowego

Liczba rozwiązań równania dwukwadratowego



Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com.

W tym materiale sprawdzisz, czy dana liczba jest pierwiastkiem równania, dowiesz się, ile rozwiązań może mieć równanie dwukwadratowe i od czego zależy liczba rozwiązań równania dwukwadratowego.

Twoje cele

- Sprawdzisz, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania dwukwadratowego.
- Określisz liczbę rozwiązań równania dwukwadratowego.
- Rozpoznasz równanie posiadające cztery rozwiązania, trzy rozwiązania, dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie lub równanie nieposiadające rozwiązań.
- Rozwiążesz równania dwukwadratowe.

Przeczytaj

Przykład 1

Podstawmy do lewej strony równania dwukwadratowego $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ w miejsce niewiadomej x liczbę 3, a następnie odpowiemy na pytanie, czy otrzymaliśmy równość prawdziwą czy fałszywą. Po podstawieniu liczby 3 w miejsce niewiadomej x do lewej strony równania otrzymujemy wyrażenie:

$$L = 3^4 - 5 \cdot 3^2 + 4 = 81 - 5 \cdot 9 + 4 = 81 - 45 + 4 = 40.$$

Prawa strona równania jest równa 0.

Lewa i prawa strona równania przyjmują dla x równego 3 różną wartość. Wynika stąd, że $L \neq P$. Zatem po podstawieniu liczby 3 do obu stron równania otrzymaliśmy równość fałszywą. Liczba 3 nie spełnia tego równania.

Przykład 2

Podstawmy do lewej strony równania $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ w miejsce niewiadomej x liczbę 2, a następnie odpowiemy na pytanie, czy otrzymaliśmy równość prawdziwą czy fałszywą. Po podstawieniu liczby 2 w miejsce niewiadomej x do lewej strony równania otrzymujemy wyrażenie:

$$L = 2^4 - 5 \cdot 2^2 + 4 = 16 - 5 \cdot 4 + 4 = 0.$$

Prawa strona równania jest równa 0.

Lewa i prawa strona równania przyjmują dla x równego 2 tą samą wartość. Wynika stąd, że $L = P$. Zatem po podstawieniu liczby 2 do obu stron równania otrzymaliśmy równość prawdziwą. Liczba 2 spełnia to równanie.

Pamiętasz?

Liczba spełnia dane równanie, jeżeli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej i wykonaniu działań po obu stronach równania, otrzymamy równość prawdziwą.

Definicja: Rozwiązanie równania

Liczbę, która spełnia dane równanie nazywamy rozwiązaniem równania lub pierwiastkiem równania.

Zbiór wszystkich liczb spełniających dane równanie nazywamy zbiorem rozwiązań równania.

Przykład 3

Sprawdzimy, czy liczby $-3, \ -1, \ 1, \ 3$ są pierwiastkami równania $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Podstawiając do równania w miejsce niewiadomej x liczbę -3 otrzymujemy:

$(-3)^4 - 10 \cdot (-3)^2 + 9 = 81 - 90 + 9 = 0$.

Zatem $L = P$, czyli liczba -3 spełnia równanie.

Podstawiając do równania w miejsce niewiadomej x liczbę -1 otrzymujemy:

$(-1)^4 - 10 \cdot (-1)^2 + 9 = 1 - 10 + 9 = 0$.

Zatem $L = P$, czyli liczba -1 spełnia równanie.

Podstawiając do równania w miejsce niewiadomej x liczbę 1 otrzymujemy:

$1^4 - 10 \cdot 1^2 + 9 = 1 - 10 + 9 = 0$.

Zatem $L = P$, czyli liczba 1 spełnia równanie.

Podstawiając do równania w miejsce niewiadomej x liczbę 3 otrzymujemy:

$3^4 - 10 \cdot 3^2 + 9 = 81 - 90 + 9 = 0$

Zatem $L = P$, czyli liczba 3 spełnia równanie.

Czyli liczby $-3, \ -1, \ 1, \ 3$ są pierwiastkami równania $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Pokazaliśmy, że równanie może mieć nawet cztery rozwiązania. Od czego zatem zależy liczba rozwiązań danego równania? Czy samo obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego wystarczy do podania liczby rozwiązań równania?

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Równanie możemy przedstawić w postaci $\left(x^2\right)^2 - 5x^2 + 4 = 0$.

Zastosujemy podstawienie $x^2 = z$, gdzie $z \geq 0$.

Wówczas otrzymujemy równanie $z^2 - 5z + 4 = 0$.

Obliczymy wyróżnik trójmianu kwadratowego.

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Ponieważ $\Delta > 0$ zatem równanie ma dwa rozwiązania.

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z_1 = \frac{-(-5)-3}{2\cdot 1}$

$z_1 = 1$

$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z_2 = \frac{-(-5)+3}{2\cdot 1}$

$z_2 = 4$

Teraz wrócimy do podstawienia $x^2 = z$.

$z = 1$

$x^2 = 1$

$x = -1$ lub $x = 1$

$z = 4$

$x^2 = 4$

$x = -2$ lub $x = 2$

Ponieważ oba rozwiązania równania kwadratowego $z^2 - 5z + 4 = 0$ są liczbami dodatnimi, więc w wyniku powrotu do podstawienia $x^2 = z$ otrzymaliśmy cztery rozwiązania.

Rozwiązaniem równania są liczby $x = -2,\ x = -1,\ x = 1,\ x = 2$.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

Równanie możemy przedstawić w postaci $\left(x^2\right)^2 + 3x^2 - 4 = 0$.

Zastosujemy podstawienie $x^2 = z$, gdzie $z \geq 0$.

Wówczas otrzymujemy równanie $z^2 + 3z - 4 = 0$.

Obliczymy wyróżnik trójmianu kwadratowego.

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

Ponieważ $\Delta > 0$ zatem równanie ma dwa rozwiązania.

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z_1 = \frac{-3-5}{2 \cdot 1}$

$z_1 = -4$

$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z_2 = \frac{-3+5}{2 \cdot 1}$

$z_2 = 1$

Teraz wrócimy do podstawienia $x^2 = z$.

$z_1 = -4$

$x^2 = -4$

Otrzymaliśmy równanie sprzeczne, bo $z < 0$.

$z_2 = 1$

$x^2 = 1$

$x = -1$ lub $x = 1$

Ponieważ jedno rozwiązanie równania kwadratowego $z^2 + 3z - 4 = 0$ jest liczbą dodatnią, a drugie liczbą ujemną, więc w wyniku powrotu do podstawienia $x^2 = z$ otrzymaliśmy dwa rozwiązania.

Rozwiązaniem równania są liczby $x = -1, \; x = 1$.

Przykład 6

Rozwiążemy równanie $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$.

Równanie możemy przedstawić w postaci $\left(x^2\right)^2 + 5x^2 + 4 = 0$.

Zastosujemy podstawienie $x^2 = z$, gdzie $z \geq 0$.

Wówczas otrzymujemy równanie $z^2 + 5z + 4 = 0$.

Obliczymy wyróżnik trójmianu kwadratowego.

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Ponieważ $\Delta > 0$ zatem równanie ma dwa rozwiązania.

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z_1 = \frac{-5-3}{2\cdot 1}$

$z_1 = -4$

$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$z_2 = \frac{-5+3}{2\cdot 1}$

$z_2 = -1$

Teraz wrócimy do podstawienia $x^2 = z$.

$z_1 = -4$

$x^2 = -4$

Otrzymaliśmy równanie sprzeczne, bo $z < 0$.

$z_2 = -1$

$x^2 = -1$

Otrzymaliśmy równanie sprzeczne, bo $z < 0$.

Oba rozwiązania równania kwadratowego $z^2 + 3z - 4 = 0$ są ujemne, więc w wyniku powrotu do podstawienia $x^2 = z$ otrzymaliśmy równanie sprzeczne. Równanie nie posiada rozwiązania.

Słownik

równanie dwukwadratowe

równanie postaci $ax^4 + bx^2 + c = 0$, gdzie $a \neq 0$

pierwiastki równania

liczby spełniające równanie

zbiór rozwiązań równania

zbiór wszystkich liczb spełniających dane równanie

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Zapoznaj się ze schematem interaktywnym przedstawiającym klasyfikację równań dwukwadratowych ze względu na liczbę rozwiązań.

Wprowadź dowolne zmienne a, b i c. Myszką możesz przesunąć schemat, aby zobaczyć przebieg całego algorytmu, a przyciskami + i - możesz go powiększać i pomniejszać.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1XIcO0Bw

Polecenie 2

W poniższym schemacie przygotuj algorytm klasyfikację równań dwukwadratowych postaci $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ze względu na liczbę rozwiązań.

Polecenie 3

Narysuj mapę myśli prezentującą rodzaje równań dwukwadratowych ze względu na liczbę rozwiązań. Do każdego z rodzajów napisz po minimum trzy przykłady równań.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Połącz równanie dwukwadratowe ze zbiorem rozwiązań.

$x^4 + 5x^2 - 36 = 0$	$x = -4, x = -1, x = 1, x = 4$
$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$	$x = -3, x = -2, x = 2, x = 3$
$x^4 + 13x^2 + 36 = 0$	$x = -2, x = 2$
$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$	brak rozwiązań
$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$	$x = -3, x = 3$

Ćwiczenie 2

Wskaż liczbę rozwiązań równania dwukwadratowego $x^4 - x^2 - 6 = 0$.

- 1
- 4
- 2
- 3

Ćwiczenie 3

Wskaż wszystkie równania sprzeczne.

- [ ] $-\sqrt{3}x^4 + x^2 - 2\sqrt{7} = 0$
- [ ] $x^4 + \left(\sqrt{5} - 1\right)x^2 - \sqrt{5} = 0$
- [ ] $x^4 + x^2 + 4\sqrt{5} = 0$
- [ ] $x^4 + x^2 - 4\sqrt{5} = 0$
- [ ] $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$
- [ ] $x^4 - \sqrt{3}x^2 + 13 = 0$

Ćwiczenie 4

Wstaw takie wyrażenie arytmetyczne, aby równanie:

$-\sqrt{2}\left(x^2 - 3\right)\left(x^2 - \boxed{}\right) = 0$

miało cztery rozwiązania.

$-\sqrt{7}$ | $\sqrt{6}$ | -5 | $1 - \sqrt{2}$

Ćwiczenie 5

Przeciągnij równanie do odpowiedniego okienka.

Jedno rozwiązanie

Dwa rozwiązania

Cztery rozwiązania

$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

$-4x^4 + 1 = 0$

$x^4 - 9 = 0$

$x^4 + \sqrt{3}x^2 = 0$

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

$x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

$x^2\left(-x^2 - 4\right) = 0$

$x^2\left(x^2 + 2\right) = 0$

$\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 2\right) = 0$

Ćwiczenie 6

Uzupełnij równanie odpowiednią liczbą tak, aby nie posiadało rzeczywistych rozwiązań. Wstaw w wyznaczone miejsce.

$x^4 - 3\sqrt{5}x^2 + \square = 0$

3 12 5 1

Ćwiczenie 7

Uszereguj równania w kolejności od najmniejszej liczby rozwiązań.

- $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
- $x^4 - 3x^2 + 11 = 0$
- $2x^4 - 16x^2 = 0$
- $x^4 + 3\sqrt{2}x^2 = 0$
- $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

Ćwiczenie 8

Wybierz prawidłową odpowiedź. Równanie $\left(x^2 - k\right)\left(x^2 - 2k - 5\right) = 0$ nie posiada rzeczywistych rozwiązań dla:

- $k > -2,5$
- $k < 0$
- $k < -2,5$
- $k \leq 0$

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Liczba rozwiązań równania dwukwadratowego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony.

Podstawa programowa:

III.Równania i nierówności.

Zakres podstawowy.

Uczeń:

5) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sprawdza, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania dwukwadratowego,
- określa liczbę rozwiązań równania dwukwadratowego,
- rozpoznaje równanie posiadające cztery rozwiązania, trzy rozwiązania, dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie lub równanie nie posiadające rozwiązań,
- rozwiązuje równania dwukwadratowe.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa,
- burza mózgów,
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu, słuchawki,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają podstawowe pojęcia związane z równaniami dwukwadratowymi (aby w dalszej części lekcji określić rodzaje równań ze względu na liczbę rozwiązań).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą odwróconej klasy. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami dotyczącymi rodzajów równań, które przypomnieli w domu.
2. Każdy uczeń otrzymuje od nauczyciela 10 przykładów różnych równań dwukwadratowych. Następnie stara się podzielić je na grupy, według własnych kryteriów.
3. Uczniowie podzieleni na grupy 4 – 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują dokonane podziały. Tworzą wspólny schemat ilustrujący rodzaje równań dwukwadratowych ze względu na liczbę rozwiązań.

4. Uczniowie oglądają schemat interaktywny i omawiają wraz z nauczycielem oraz porównują ze schematem, który sami stworzyli.

5. Uczniowie w parach lub indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące określania rodzaju równania dwukwadratowego ze względu na liczbę rozwiązań.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

- Zadaniem uczniów jest rozwiązanie przykładu 2.

Materiały pomocnicze:

Równanie kwadratowe

Wskazówki metodyczne:

Schemat interaktywny może być wykorzystane przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania mapy myśli prezentującej rodzaje równań dwukwadratowych z przykładami.