Przekroje stożka

Przekroje stożka

Źródło: Maxim Tolchinskiy, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Zgodnie z I prawem Keplera planety krążą po torach eliptycznych, a Słońce znajduje się w jednym z ognisk. W przyrodzie możemy zaobserwować ciekawe elementy, które przyjmują kształt stożka. W zależności od kąta, jaki tworzy płaszczyzna przecinająca z osią stożka i kąta tworzącej stożka powstają różne rodzaje krzywych stożkowych. Tworzą je zbiory punktów przecięcia płaszczyzny i powierzchni stożkowej.

Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

W materiale przeanalizujemy, jaką figurą geometryczną jest przekrój stożka daną płaszczyzną. Bazując na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

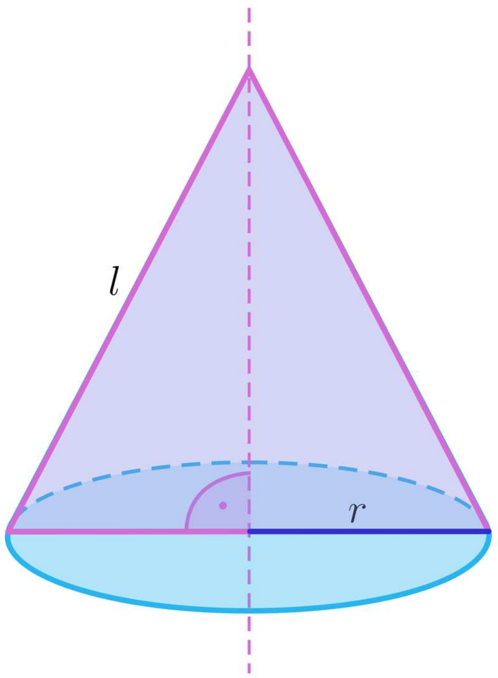
- Zdefiniujesz pojęcie przekroju stożka.
- Określisz przekrój stożka daną płaszczyzną.
- Wyznaczysz pole przekroju stożka daną płaszczyzną.
- Wykorzystasz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przekrojem dowolnej bryły płaszczyzną jest figura płaska, która jest częścią wspólną danej bryły i tej płaszczyzny.

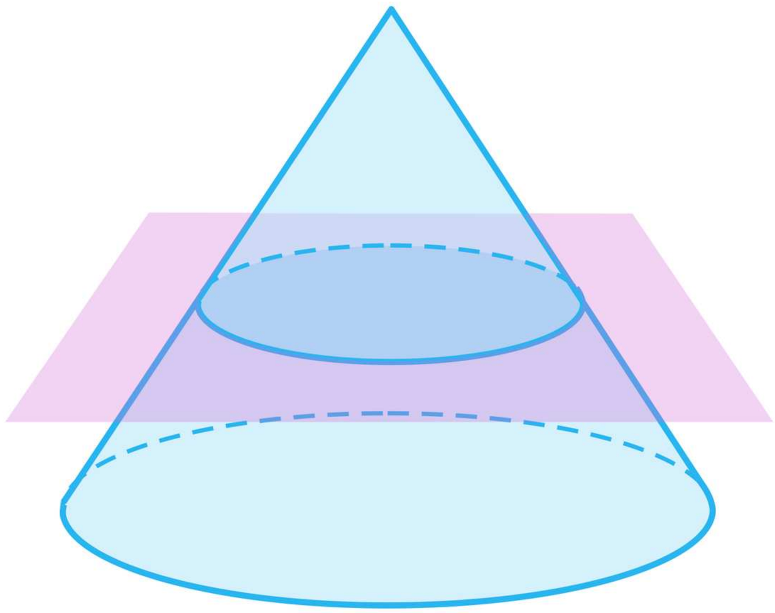
Przekroje stożka

Przekrój osiowy stożka



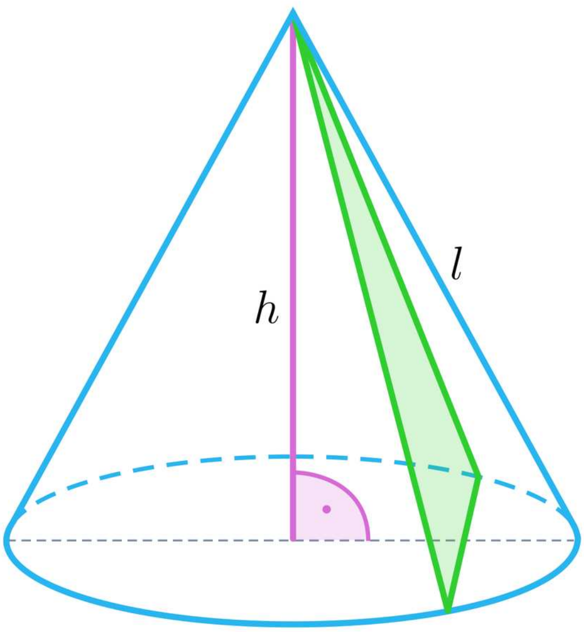
Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoramienny o podstawie długości $2r$ i ramionach długości l.

Przekrój poprzeczny stożka

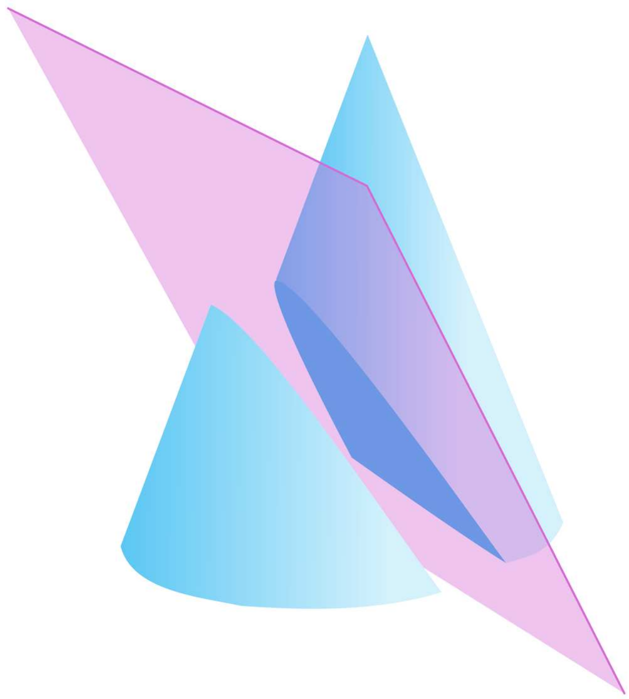


Przekrój poprzeczny stożka będący kołem, otrzymujemy w wyniku przecięcia stożka płaszczyzną równoległą do jego podstawy.

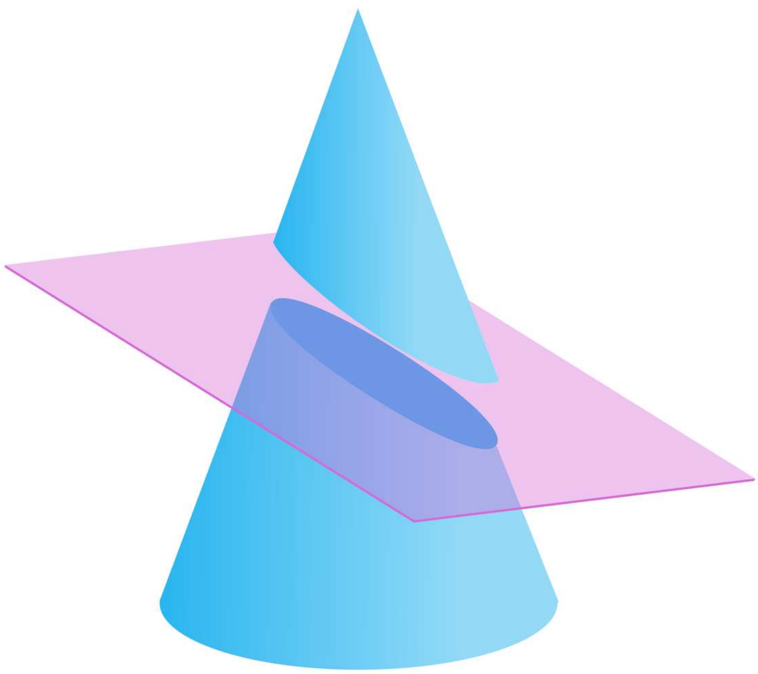
Przekrój stożka będący trójkątem



Inne przekroje stożka



W wyniku przekroju stożka płaszczyzną przechodzącą przez powierzchnię boczną stożka oraz płaszczyznę jego podstawy (jak na rysunku), otrzymujemy przekrój będący figurą ograniczoną przez parabolę i cięciwę podstawy stożka.



W wyniku przekroju stożka płaszczyzną przechodzącą przez powierzchnię boczną stożka (jak na rysunku), otrzymujemy przekrój będący figurą ograniczoną przez elipsę.

Mając dany przekrój stożka pewną płaszczyzną, możemy obliczyć pole otrzymanego przekroju.

Już wiesz

Jeżeli promień podstawy stożka ma długość r, wysokość h, a tworząca l, to:

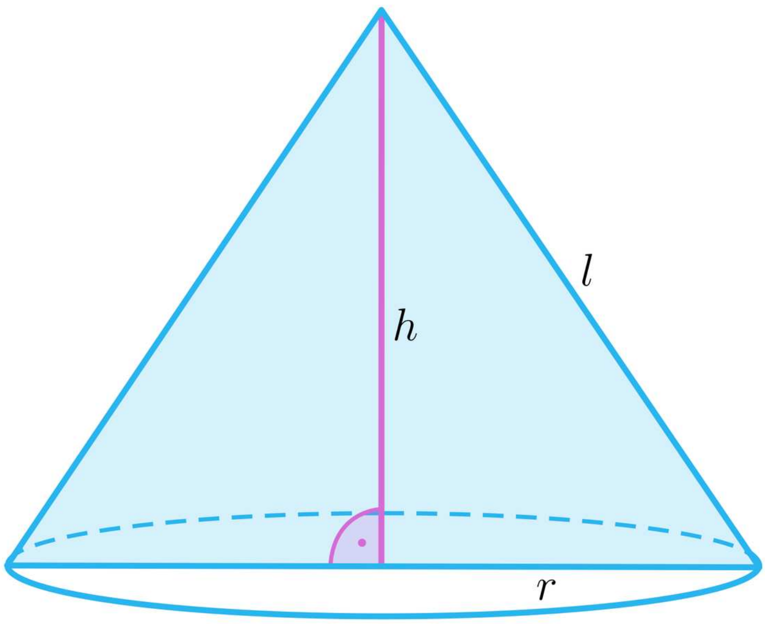
- pole powierzchni całkowitej stożka obliczamy ze wzoru $P = \pi r^2 + \pi r l$,
- objętość stożka obliczamy ze wzoru $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$.

Przykład 1

Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoboczny o obwodzie równym 72. Obliczymy pole powierzchni całkowitej i objętość tego stożka.

Rozwiązanie

Narysujmy stożek wraz z przekrojem osiowym i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Zauważmy, że $l = 2r$ oraz $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Jeżeli obwód trójkąta równobocznego jest równy 72, zatem $3l = 72$, więc $l = 24$.

Wobec tego $r = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ oraz $h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{24\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$.

Zatem pole powierzchni całkowitej stożka jest równe:

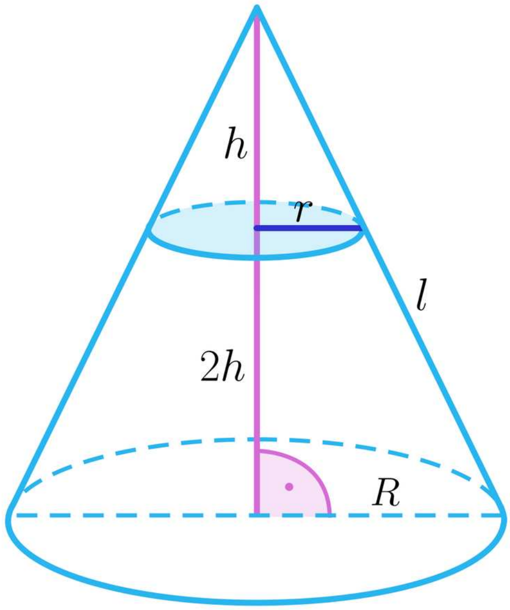
$P_c = \pi \cdot 12^2 + \pi \cdot 12 \cdot 24 = 144\pi + 288\pi = 432\pi$.

Objętość stożka wynosi:

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 12\sqrt{3} = 576\sqrt{3}\pi$.

Przykład 2

Tworząca stożka ma długość 16, a przekrojem poprzecznym stożka jest koło o polu równym 20π. Wiadomo, że płaszczyzna przekroju podzieliła wysokość stożka w stosunku $2 : 1$, jak na rysunku. Obliczymy objętości brył, na jakie płaszczyzna przekroju podzieliła ten stożek.



Rozwiązanie

Z treści zadania mamy $l = 16$.

Ponieważ pole przekroju jest równe 20π, zatem:

$\pi \cdot r^2 = 20\pi$

$r^2 = 20$, czyli $r = 2\sqrt{5}$.

Jeżeli płaszczyzna przekroju podzieliła wysokość stożka w stosunku $2 : 1$, to:

$R = 3 \cdot r = 3 \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$.

Długość wysokości mniejszego stożka obliczymy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$(3h)^2 + R^2 = l^2$

$9h^2 + \left(6\sqrt{5}\right)^2 = 16^2$

$9h^2 + 180 = 256$

$9h^2 = 76$

$h^2 = \frac{76}{9}$, czyli $h = \frac{2\sqrt{19}}{3}$.

Zatem objętość całego stożka wynosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 3h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(6\sqrt{5}\right)^2 \cdot 2\sqrt{19} = 120\sqrt{19}\pi.$$

Niech V_1 będzie objętością stożka o podstawie r i wysokości h. Wówczas:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(2\sqrt{5}\right)^2 \cdot \frac{2\sqrt{19}}{3} = \frac{40\sqrt{19}}{9}\pi.$$

Niech V_2 będzie objętością drugiej bryły powstałej po przecięciu stożka podaną płaszczyzną. Wówczas:

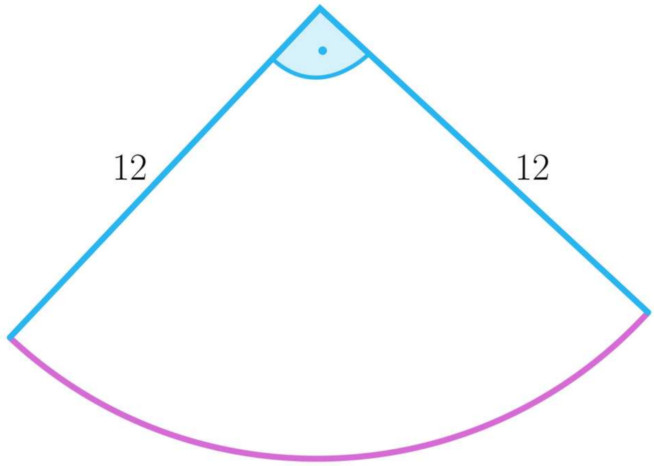
$$V_2 = V - V_1 = 120\sqrt{19}\pi - \frac{40\sqrt{19}}{9}\pi = \frac{1040\sqrt{19}}{9}\pi.$$

Przykład 3

Powierzchnia boczna stożka jest po rozwinięciu ćwiartką koła o promieniu 12. Obliczymy pole przekroju osiowego tego stożka.

Rozwiązanie

Narysujmy wycinek koła o promieniu 12.



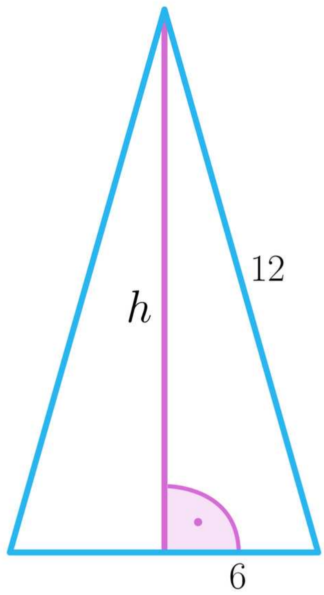
Pole tego wycinka jest równe:

$$P = \frac{1}{2}\pi \cdot 12^2 = 72\pi.$$

Pole tego wycinka jest równe polu powierzchni bocznej stożka, zatem:

$72\pi = \pi \cdot r \cdot 12$, czyli $r = 6$.

Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoramienny o wymiarach, jak na rysunku.



Wysokość tego trójkąta obliczymy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$h^2 + 6^2 = 12^2$

$h^2 + 36 = 144$

$h^2 = 108$

$h = 6\sqrt{3}.$

Zatem pole tego przekroju jest równe:

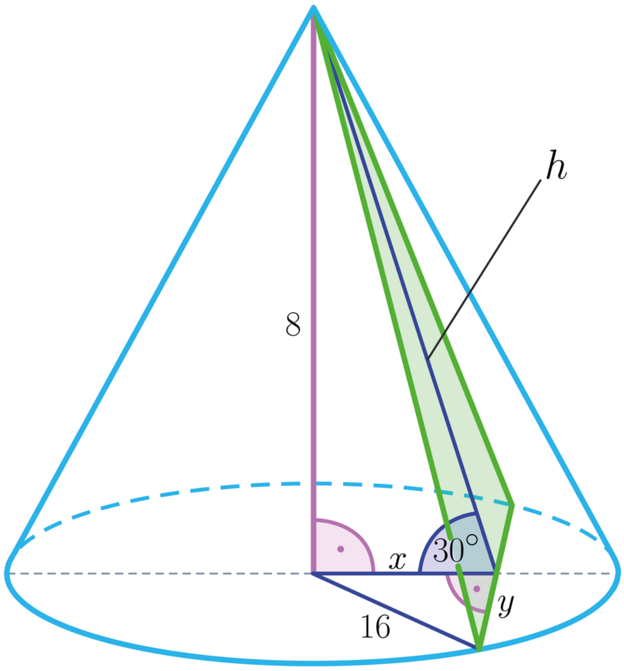
$P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}.$

Przykład 4

Przez wierzchołek stożka o promieniu podstawy 16 i wysokości 8 poprowadzono płaszczyznę nachyloną do płaszczyzny podstawy stożka pod kątem 30°. Obliczymy pole przekroju tego stożka.

Rozwiązanie

Narysujmy stożek oraz opisany przekrój.



Ponieważ $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, zatem:

$\frac{8}{h} = \frac{1}{2}$

Czyli $h = 16$.

Wobec tego $x = 8\sqrt{3}$.

Długość odcinka y obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$y^2 + x^2 = r^2$

$y^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2 = 16^2$

$y^2 + 192 = 256$

$y^2 = 64$

$y = 8$.

Długość podstawy trójkąta, który jest przekrojem tego stożka, wynosi 16.

Zatem pole tego przekroju jest równe:

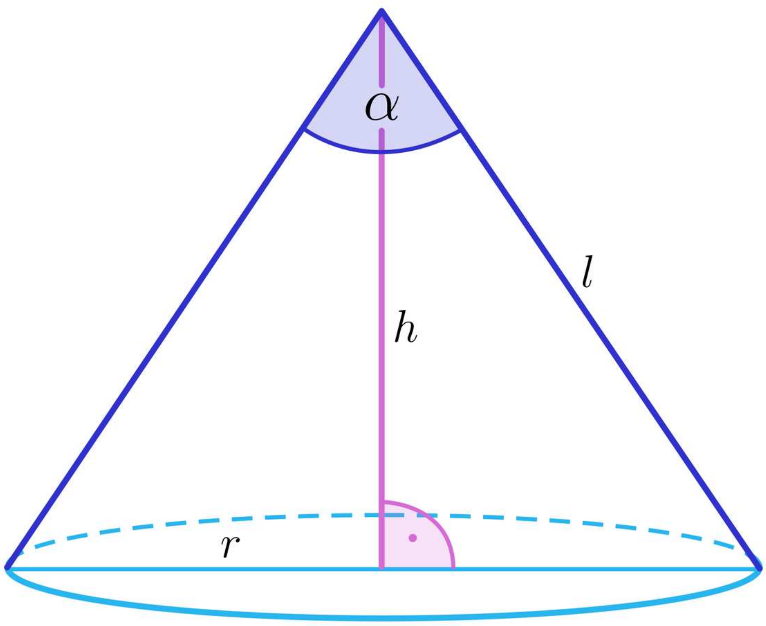
$P = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 = 128$.

Przykład 5

Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoramienny o kącie przy wierzchołku, którego cosinus jest równy $\frac{1}{3}$. Wyznaczymy objętość stożka jeżeli wiadomo, że tworząca stożka ma długość 3.

Rozwiązanie

Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoramienny o bokach l, l, $2r$ oraz kącie przy wierzchołku α, przy czym $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.



Zatem do wyznaczenia wartości r wykorzystamy twierdzenie cosinusów i rozwiązujemy równanie:

$(2r)^2 = l^2 + l^2 - 2 \cdot l \cdot l \cdot \cos\alpha$

$4r^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3}$

$4r^2 = 12$

$r^2 = 3$, czyli $r = \sqrt{3}$.

Wysokość h trójkąta równoramiennego obliczymy z twierdzenia Pitagorasa. Zatem:

$h^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3^2$

$h^2 + 3 = 9$

$h^2 = 6$

$h = \sqrt{6}$.

Wobec tego objętość stożka jest równa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{6} = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{6}\pi = \sqrt{6}\pi.$$

Słownik

stożek

bryła obrotowa, która powstaje przez obrót trójkąta prostokątnego wokół osi zawierającej jedną z przyprostokątnych

kąt rozwarcia stożka

kąt pomiędzy ramionami trójkąta, będącego przekrojem osiowym stożka

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją 3D, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DLDfhLai4

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego przekrojów stożka.

Polecenie 2

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu równym $12\sqrt{3}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

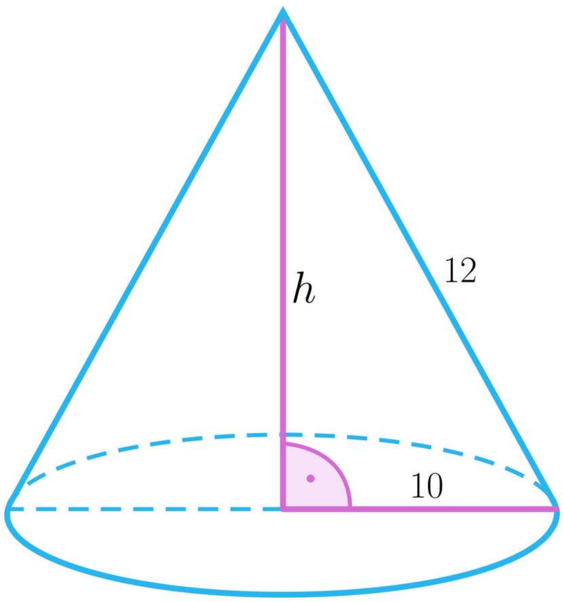
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Dany jest stożek, jak na rysunku.



Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Stożek, w którym wysokość wynosi 2 przecięto płaszczyzną w ten sposób, że utworzony przekrój jest trójkątem równobocznym o polu $4\sqrt{3}$. Oblicz kąt nachylenia tego przekroju do płaszczyzny podstawy stożka.

Ćwiczenie 7

Przekrojem poprzecznym stożka jest koło o polu równym 18π. Wiadomo, że płaszczyzna przekroju podzieliła stożek na bryły o równych wysokościach. Oblicz objętość stożka, jeżeli tworząca stożka ma długość 10.

Ćwiczenie 8

Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoramienny o kącie przy wierzchołku, którego cosinus jest równy $\frac{4}{5}$. Wyznacz pole tego przekroju, jeżeli wiadomo, że promień podstawy stożka ma długość 3.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przekroje stożka

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;
Zakres rozszerzony 2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje pojęcie przekroju stożka;
- określa przekrój stożka daną płaszczyzną;
- wyznacza pole przekroju stożka daną płaszczyzną;
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda krokodyla;

- praca z ekspertem;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj". Wspólnie na forum klasy omawiają pytania i problemy.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj". Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj"). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Animacja 3D". Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się". Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się", a następnie omawiają je na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się" metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki" i „ożywia się" tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam(-łem) się...

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Przekroje stożka”).

Materiały pomocnicze:

- Bryły obrotowe - stożek

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Animacja 3D” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiadomości dotyczących wyznaczania przekrojów brył.