



## Wykres funkcji liniowej

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Wykres funkcji liniowej

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Funkcje opisujemy na kilka różnych sposobów. Jednym ze sposobów opisu funkcji jest jej przedstawienie za pomocą wykresu. Omówimy etapy szkicowania wykresu funkcji liniowej oraz położenie wykresu w prostokątnym układzie współrzędnych.

### Twoje cele

- Poznasz etapy szkicowania wykresu funkcji liniowej.
- Naszkicujesz wykresy funkcji liniowych określonych wzorami  $y = ax + b$  dla różnych wartości współczynników  $a$  i  $b$ .
- Określisz położenie wykresu funkcji liniowej w układzie współrzędnych, w zależności od wartości współczynników  $a$  i  $b$ .

# Przeczytaj

---

Przypomnijmy definicję funkcji liniowej.

## Definicja: funkcja liniowa

Funkcję określoną wzorem  $y = ax + b$  dla  $x \in \mathbb{R}$ , gdzie  $a$  i  $b$  są stałymi, nazywamy funkcją liniową.

Liczbę  $a$  nazywamy współczynnikiem kierunkowym, a liczbę  $b$  wyrazem wolnym.

Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ .

Wykresem funkcji liniowej jest **prosta**.

Do szkicowania wykresu funkcji liniowej wykorzystamy poniższą własność.

## Własność: prosta na płaszczyźnie

Przez dwa różne punkty płaszczyzny można poprowadzić dokładnie jedną prostą.

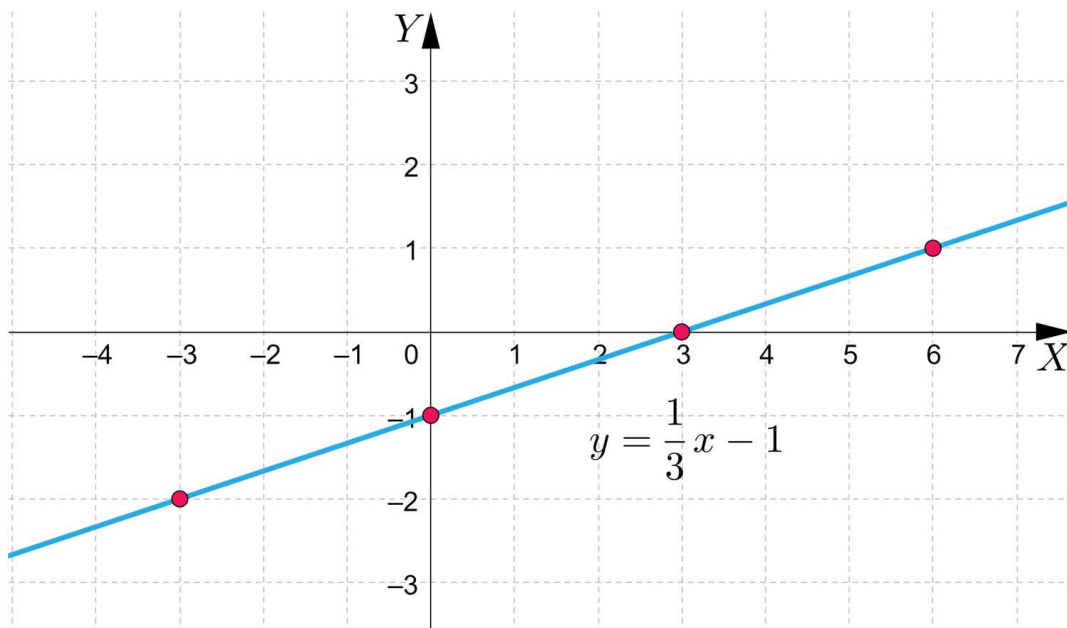
Zatem do naszkicowania wykresu funkcji liniowej określonej wzorem  $y = ax + b$  wystarczy wyznaczyć współrzędne co najmniej dwóch punktów, które należą do tego wykresu.

Naszkuje wykresem funkcji określonej wzorem  $y = \frac{1}{3}x - 1$ .

Przedstawmy w tabeli wartości tej funkcji, które wyznaczymy dla kilku argumentów.

$x$	-3	0	3	6
$y$	-2	-1	0	1

Zatem wykres tej funkcji przedstawia się następująco:

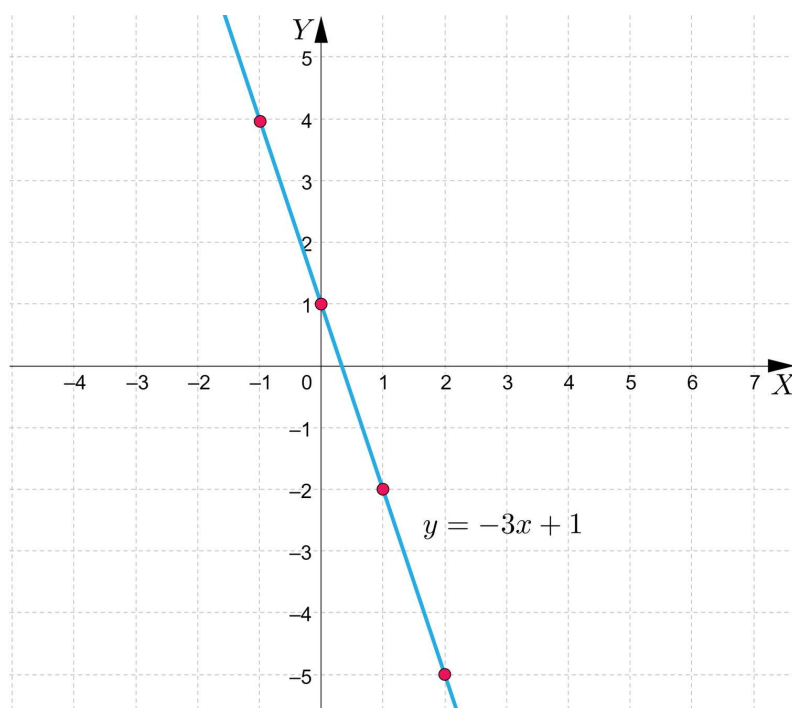


Naszkuje wykres funkcji określonej wzorem  $y = -3x + 1$ .

Przedstawmy w tabeli wartości tej funkcji, które wyznaczymy dla kilku argumentów.

$x$	-1	0	1	2
$y$	4	1	-2	-5

Zatem wykres tej funkcji przedstawia się następująco:



Zauważmy, że jeżeli do naszkicowania prostej wystarczy znać współrzędne dwóch punktów, to tymi współrzędnymi mogą być współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji liniowej z osiami układu współrzędnych (o ile istnieją).

1. Punkt przecięcia wykresu funkcji liniowej określonej wzorem  $y = ax + b$  z osią  $X$  układu współrzędnych ma współrzędne  $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ , gdzie  $a \neq 0$ .
2. Punkt przecięcia wykresu funkcji liniowej określonej wzorem  $y = ax + b$  z osią  $Y$  układu współrzędnych ma współrzędne  $(0, b)$ .

Omówimy położenie w układzie współrzędnych prostej, która jest wykresem funkcji liniowej określonej wzorem  $y = ax + b$ , w zależności od wartości współczynników  $a$  i  $b$ .

### Przykład 1

Naszkuje wykres funkcji liniowej określonej wzorem  $y = -\frac{2}{5}x + 2$ .

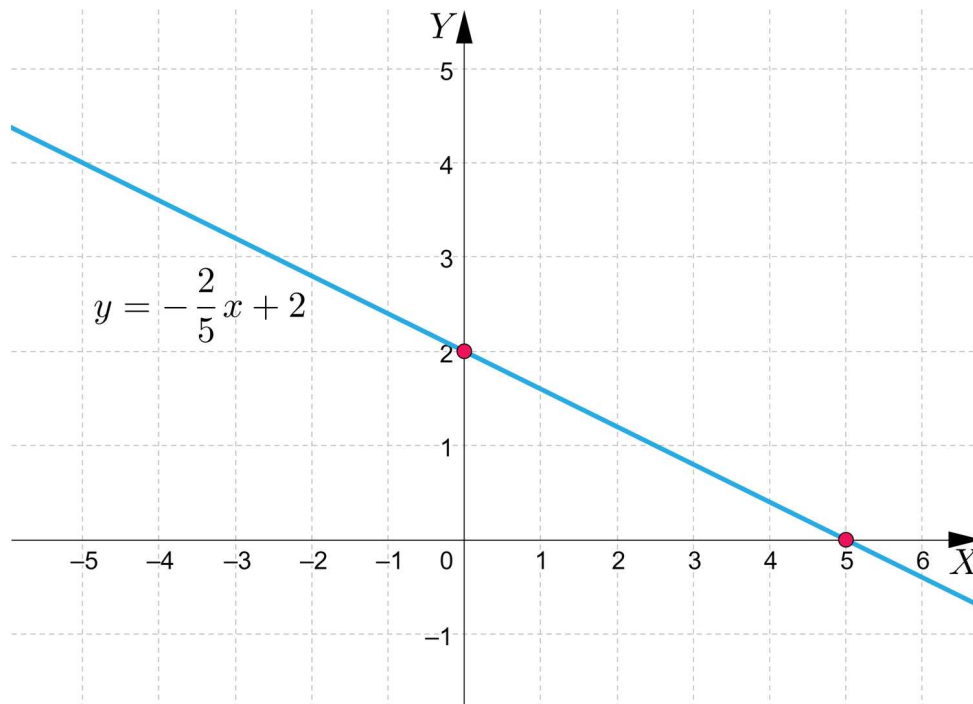
### Rozwiązanie

Ze wzoru funkcji możemy odczytać, że  $a = -\frac{2}{5}$  oraz  $b = 2$ .

Zatem współrzędne punktów przecięcia prostej, która jest wykresem tej funkcji, z osiami układu współrzędnych wynoszą:

- z osią  $X$ :  $(5, 0)$ ,
- z osią  $Y$ :  $(0, 2)$ .

Wykres tej funkcji przedstawia się następująco:



### Przykład 2

Do wykresu funkcji liniowej określonej wzorem  $y = ax$  należy punkt o współrzędnych  $(-1, 4)$ .

Wyznamy wzór tej funkcji oraz naszkicujemy jej wykres.

### Rozwiązanie

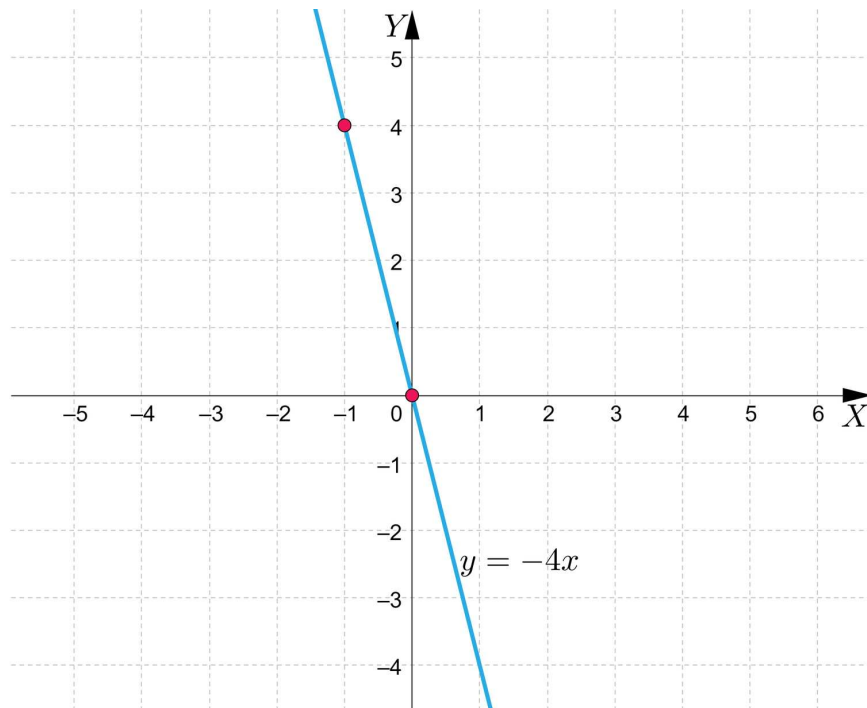
Ponieważ punkt o współrzędnych  $(-1, 4)$  należy do wykresu funkcji określonej wzorem  $y = ax$ , zatem do wyznaczenia wartości  $a$  rozwiązujemy równanie:

$$4 = a \cdot (-1), \text{ zatem } a = -4.$$

Wzór funkcji zapisujemy w postaci:  $y = -4x$ .

Zauważmy, że do wykresu funkcji należy punkt o współrzędnych  $(0, 0)$ .

Wykres tej funkcji przedstawia się następująco:



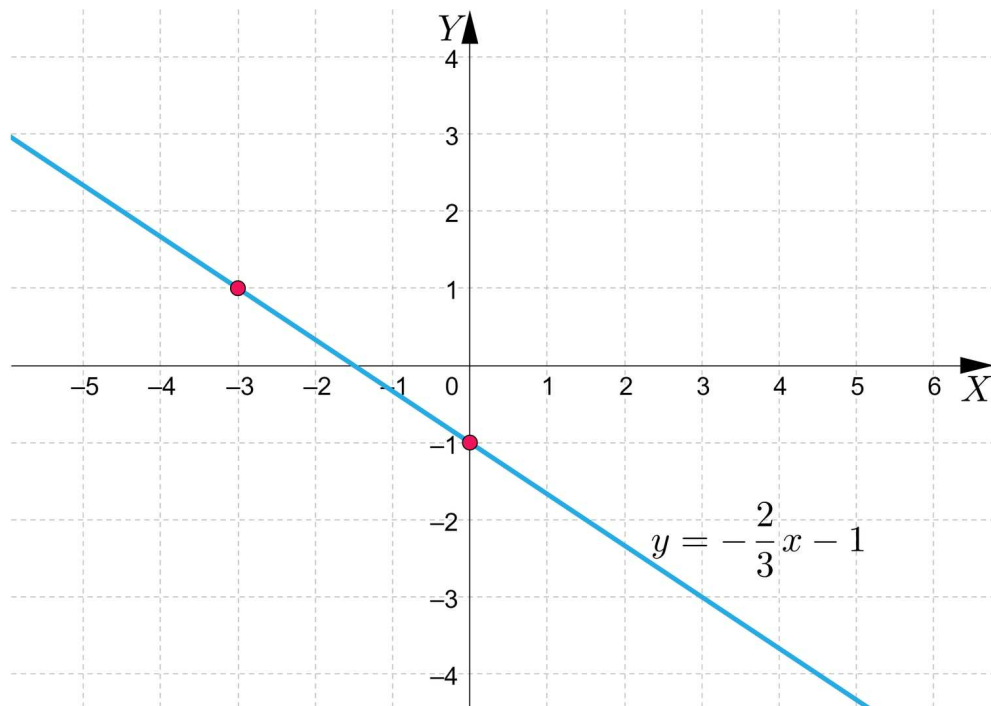
### Przykład 3

Naszkcujemy wykres funkcji liniowej określonej wzorem  $y = -\frac{2}{3}x - 1$  i określimy jego położenie w układzie współrzędnych.

### Rozwiązanie

Do wykresu funkcji należą punkty o współrzędnych  $(-3, 1)$  oraz  $(0, -1)$ .

Zatem wykres tej funkcji przedstawia się następująco:



Wykres tej funkcji znajduje się w II, III i IV ćwiartce układu współrzędnych.

Wykresy funkcji liniowych znajdują zastosowanie w rozwiązywaniu sytuacji związanych z życiem codziennym.

#### Przykład 4

Wypożyczalnia oferuje dwie opcje zapłaty za wypożyczenie kajaka, w zależności od trasy spływu:

trasa I - wpłata 30 zł oraz 15 zł za każdą godzinę,

trasa II - wpłata 20 zł oraz 20 zł za każdą godzinę.

- a. Zapiszemy wzory funkcji przedstawiających koszt wypożyczenia, w zależności od liczby godzin.
- b. Naszkicujemy wykresy funkcji mając dane ich wzory.

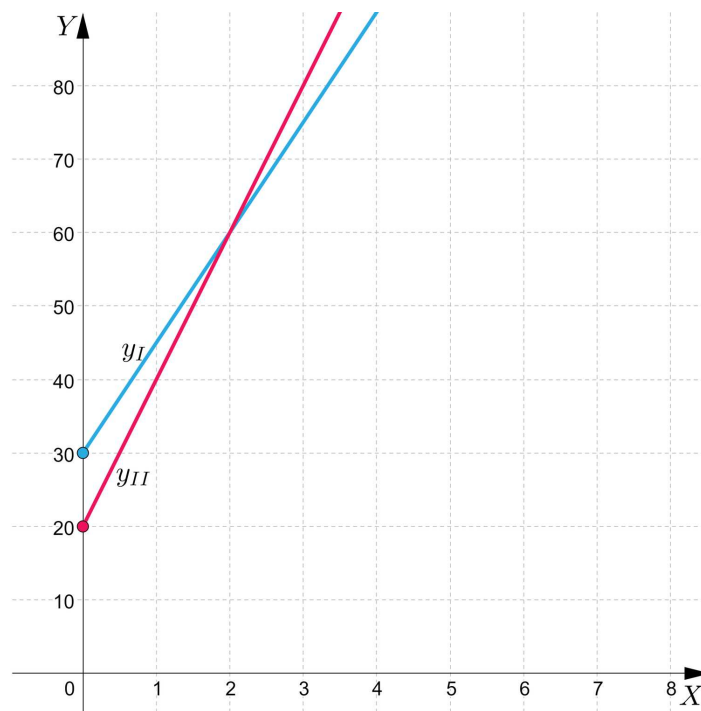
#### Rozwiązanie

a. Najpierw oznaczymy przez  $x$  (gdzie  $x > 0$ ) liczbę godzin i przez  $y$  (gdzie  $y > 0$ ) całkowity koszt wypożyczenia. Wtedy wzory funkcji określających całkowity koszt wypożyczenia można zapisać następująco:

$$\text{trasa I} - y_{\text{I}} = 30 + 15x,$$

$$\text{trasa II} - y_{\text{II}} = 20 + 20x.$$

b. Wykresy funkcji  $y_{\text{I}}$  i  $y_{\text{II}}$  przedstawiają się następująco:



### Przykład 5

Naszkiujemy wykres funkcji liniowej, jeżeli wiadomo, że ten wykres przecina oś  $Y$  w punkcie o współrzędnych  $(0, -3)$ , a pole trójkąta ograniczonego prostą, która jest wykresem tej funkcji oraz osiami układu współrzędnych, wynosi 9.

### Rozwiązanie

Trójkąt opisany w zadaniu jest prostokątny, a jego wysokość wynosi 3.

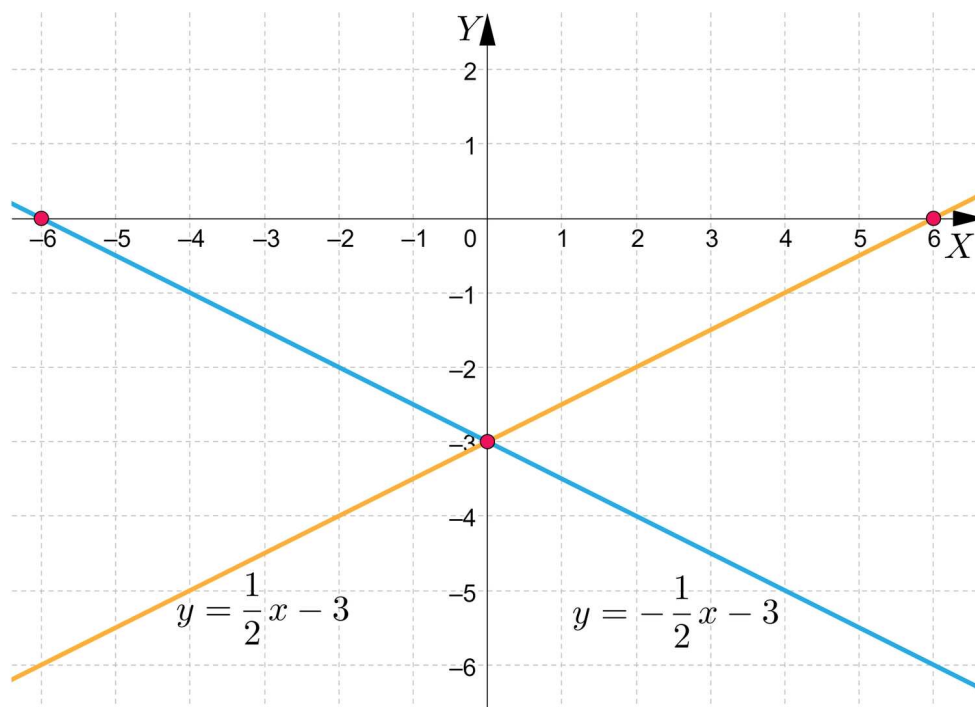
Wykorzystamy wzór na pole trójkąta  $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ .

Wartość  $a$  obliczamy z równania:

$$9 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 3, \text{ zatem } a = 6.$$

Zatem do prostej należy punkt o współrzędnych  $(-6, 0)$  lub  $(6, 0)$ .

Istnieją dwie proste, które wyznaczają trójkąt opisany w zadaniu:



## Słownik

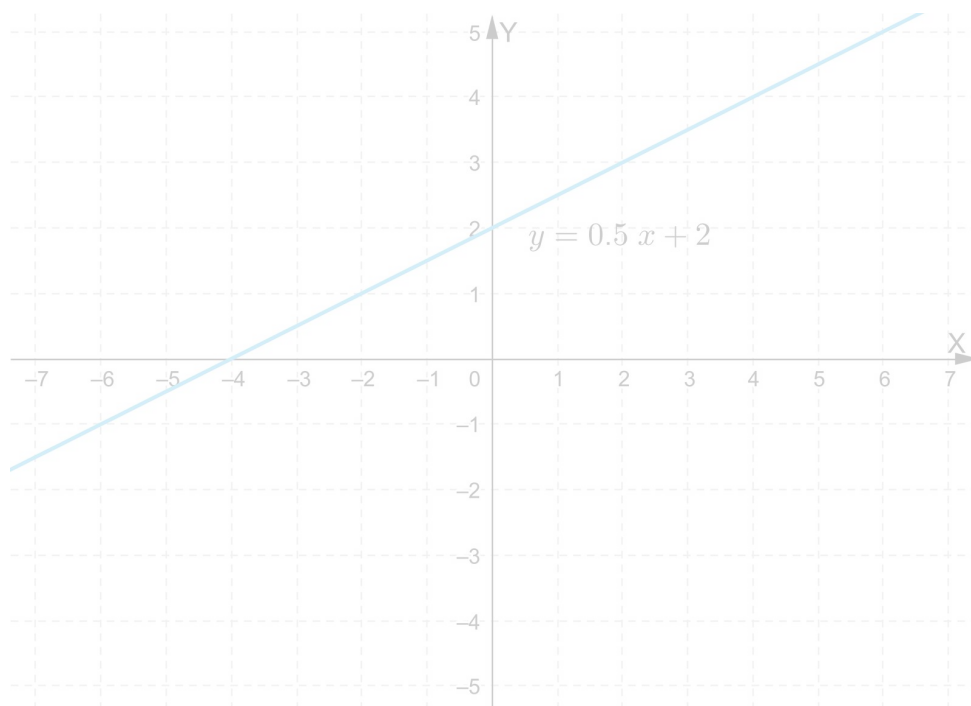
### wykres funkcji

zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych  $(x, y)$ , gdzie  $x$  należy do dziedziny tej funkcji, natomiast  $y$  jest wartością funkcji dla argumentu  $x$

# Aplet

## Polecenie 1

Uruchom aplet służący do szkicowania wykresu funkcji liniowej. Określ położenie prostej, będącej wykresem funkcji, w zależności od wybranych wartości współczynników  $a$  i  $b$ .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DsgW7Fne4>




## Polecenie 2

Określ, w których ćwiartkach prostokątnego układu współrzędnych znajdują się wykresy danych funkcji:

- $y = 3x - 2$ ,
- $y = -x - 4$ ,
- $y = -6$ ,
- $y = 2x + 1$ ,
- $y = 3$ ,
- $y = -x + 2$ .



# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



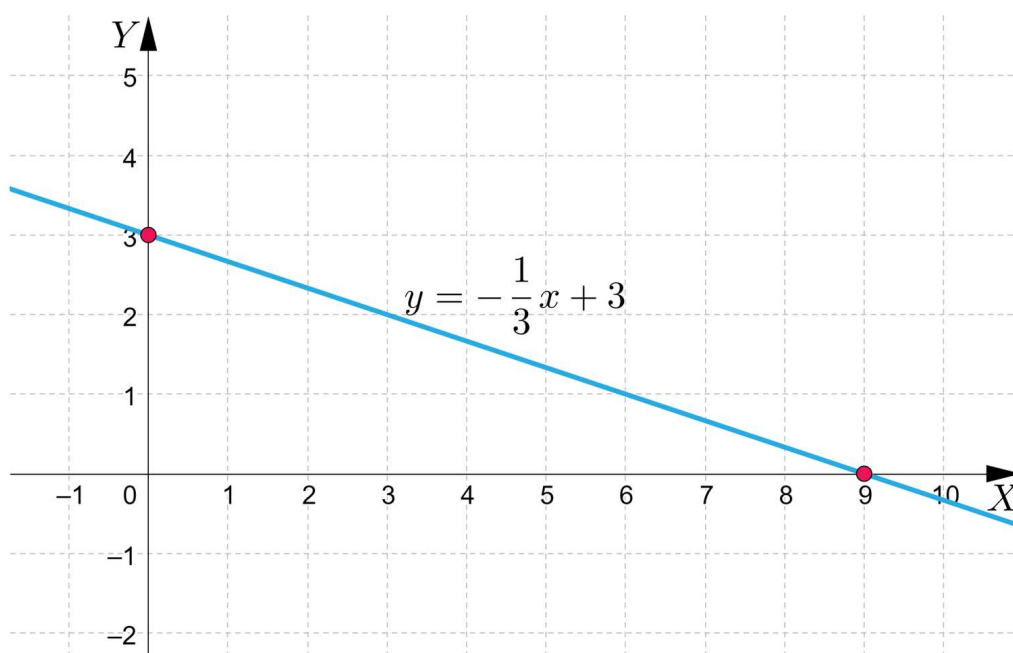
Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem  $y = -\frac{1}{3}x + 3$ .



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



## Ćwiczenie 8



Dana jest funkcja  $f$  określona wzorem  $f(x) = (2m - 1)x + (-n + 2)$ .

Określ, dla jakich wartości parametrów  $m$  i  $n$  wykres tej funkcji znajduje się w I, III i IV ćwiartce układu współrzędnych.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Tomasz Wójtowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Wykres funkcji liniowej

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- poznaje etapy szkicowania wykresu funkcji liniowej,
- szkicuje wykresy funkcji liniowych określonych wzorami  $y = ax + b$  dla różnych wartości współczynników  $a$  i  $b$ ,
- określa położenie wykresu funkcji liniowej w ćwiartkach układu współrzędnych, w zależności od wartości współczynników  $a$  i  $b$ ,
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- metoda kota i myszy;
- liga zadaniowa;

- burza mózgów.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Wykres funkcji liniowej” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszyte minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie zapoznają się z treścią zawartą w sekcji „Aplet”, zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy materiału.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza. Wyniki pracy omawiane są na forum klasy i komentowane przez nauczyciela.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3-5 na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łam się jak...”.

**Praca domowa:**

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Wykres funkcji liniowej”).

**Materiały pomocnicze:**

- [Definicja funkcji liniowej.](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Materiał w sekcji „Aplet” można wykorzystać jako powtórzenie i utrwalenie wiadomości na temat wykresu funkcji liniowej.
- Można też wykorzystać aplet omawiając własności funkcji liniowej, odczytując je z wykresu.