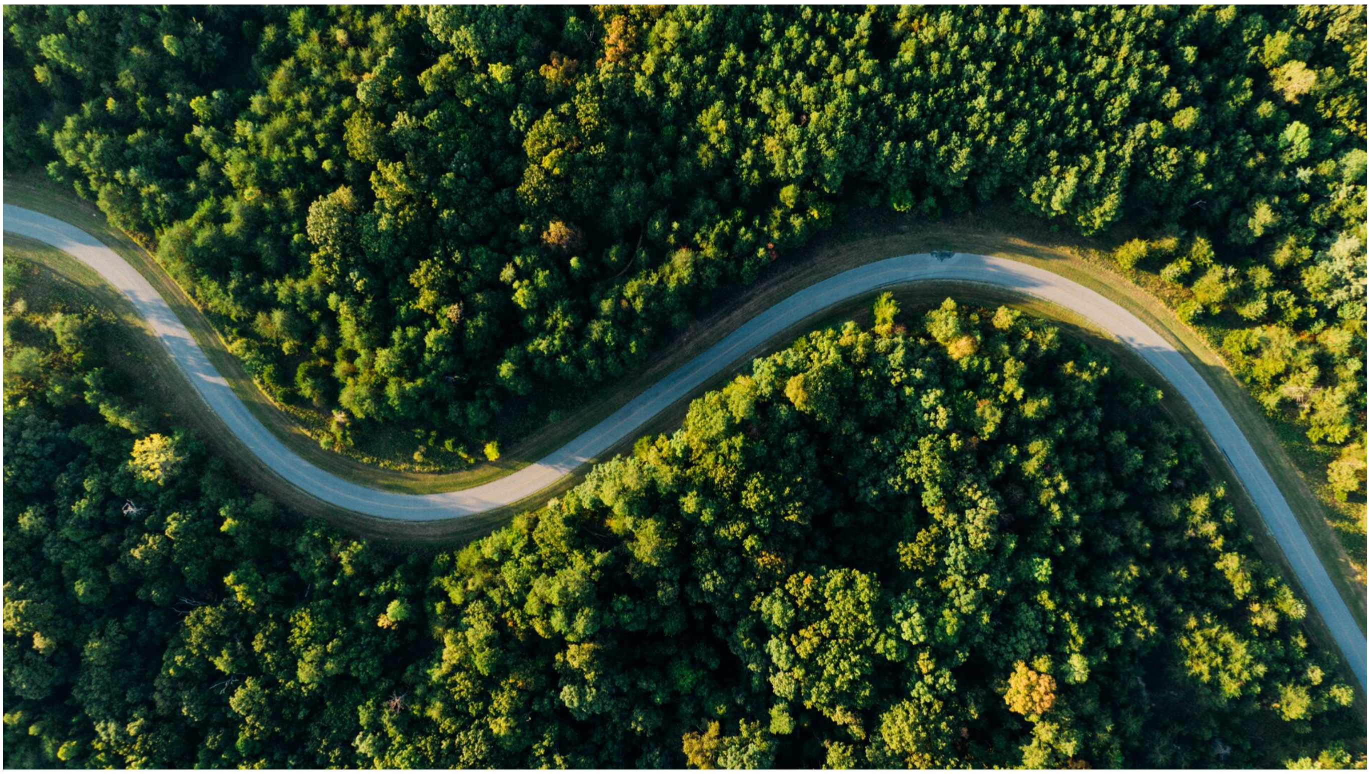
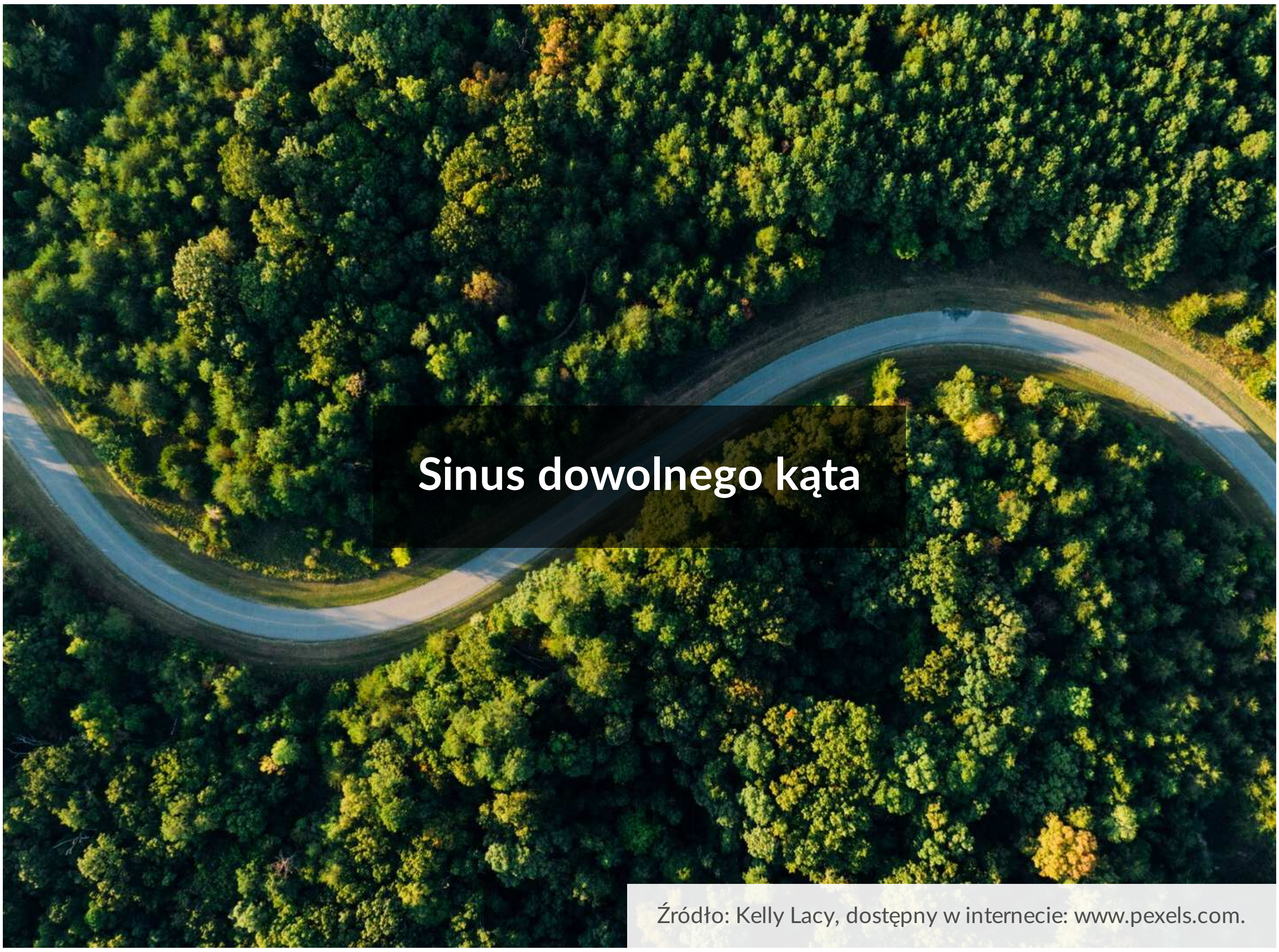


Sinus dowolnego kąta

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Sinus dowolnego kąta



Źródło: Kelly Lacy, dostępny w internecie: www.pexels.com.

Znasz już definicje związków trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym. W praktyce oznacza to, że potrafisz obliczyć sinus, cosinus, tangens i cotangens kąta o mierze od 0 do 90 stopni. W matematyce, fizyce, technice, geodezji i wielu innych dziedzinach technicznych przydają się również funkcje trygonometryczne kątów o miarach większych niż 90 stopni. W tym rozdziale zajmiemy się jedną z tych funkcji. Poznasz definicję funkcji sinus dla kąta skierowanego umieszczonego w układzie współrzędnych.

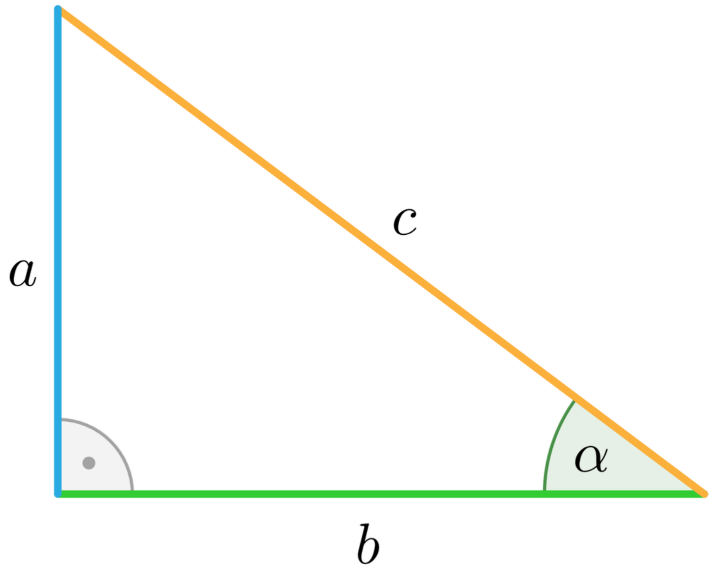
Twoje cele

- Obliczysz sinus wielokrotności kąta prostego.
- Obliczysz sinus dowolnego kąta.
- Wyznaczysz miarę kąta, znając wartość jego sinusa.

Przeczytaj

Przypomnijmy najpierw, że sinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym to stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości przeciwprostokątnej, czyli przy oznaczeniach jak na rysunku to

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$



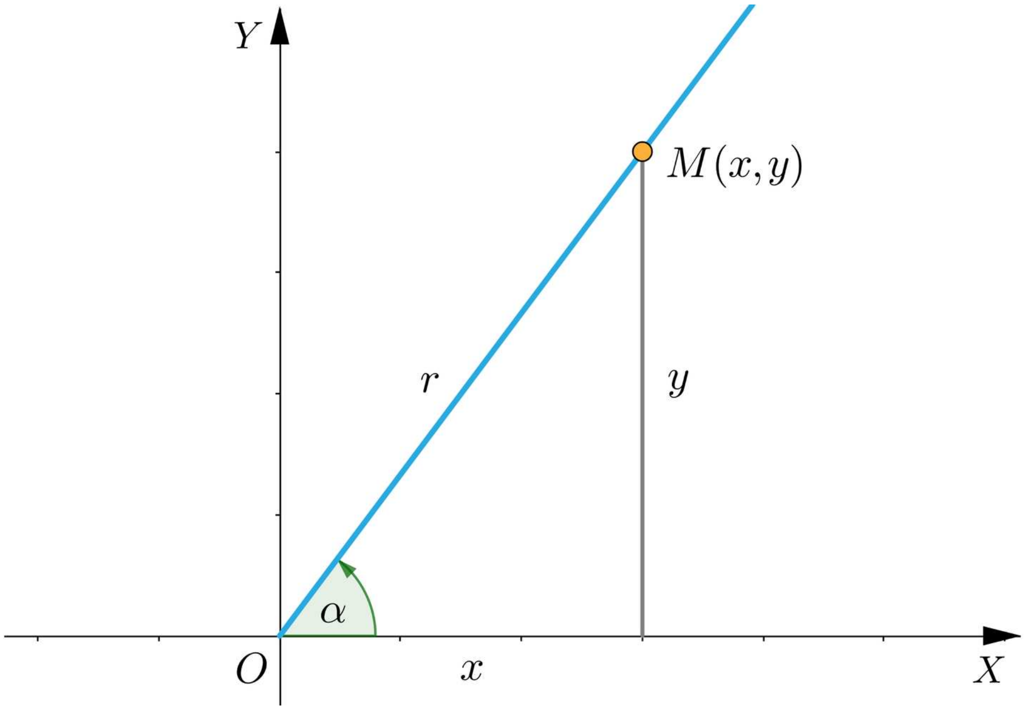
Jeżeli w prostokątnym układzie współrzędnych umieścimy dowolny kąt skierowany w położeniu standardowym, czyli wierzchołkiem w punkcie $(0,\ 0)$ w taki sposób, aby jedno ramię pokrywało się z osią X, i wybierzemy na drugim ramieniu tego kąta punkt M o współrzędnych (x, y), to łącząc punkt M z osią X pod kątem prostym utworzymy trójkąt prostokątny. Zauważmy, że jeśli nasz kąt jest ostry, to długości przyprostokątnych są równe współrzędnym punktu M. Wówczas sinus tego kąta skierowanego wyniesie

$$\sin\alpha = \frac{y}{r},$$

gdzie

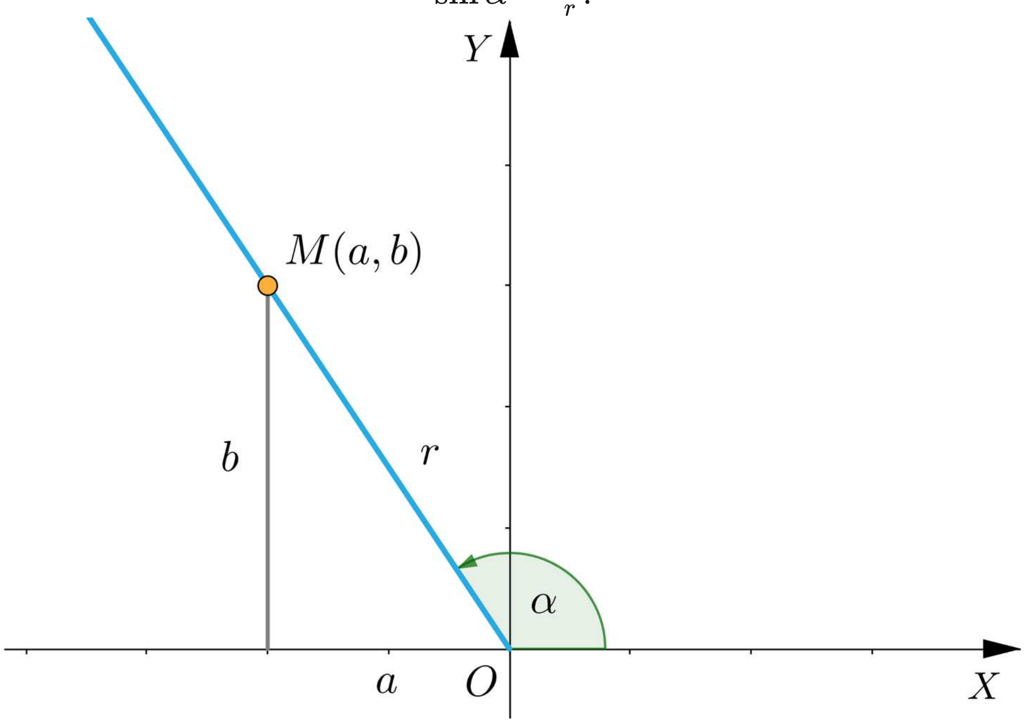
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

i r nazywamy promieniem wodzącym punktu M.



Zwróćmy jeszcze uwagę, że tę definicję można rozszerzyć do sytuacji, gdy α jest kątem rozwartym (a nawet wklęsłym). Na przykład jeśli α jest kątem rozwartym – jak na rysunku poniżej, to nadal $\sin\alpha$ możemy obliczyć **jako iloraz drugiej współrzędnej punktu M przez promień wodzący tego punktu**. Zatem

$$\sin\alpha = \frac{b}{r}.$$



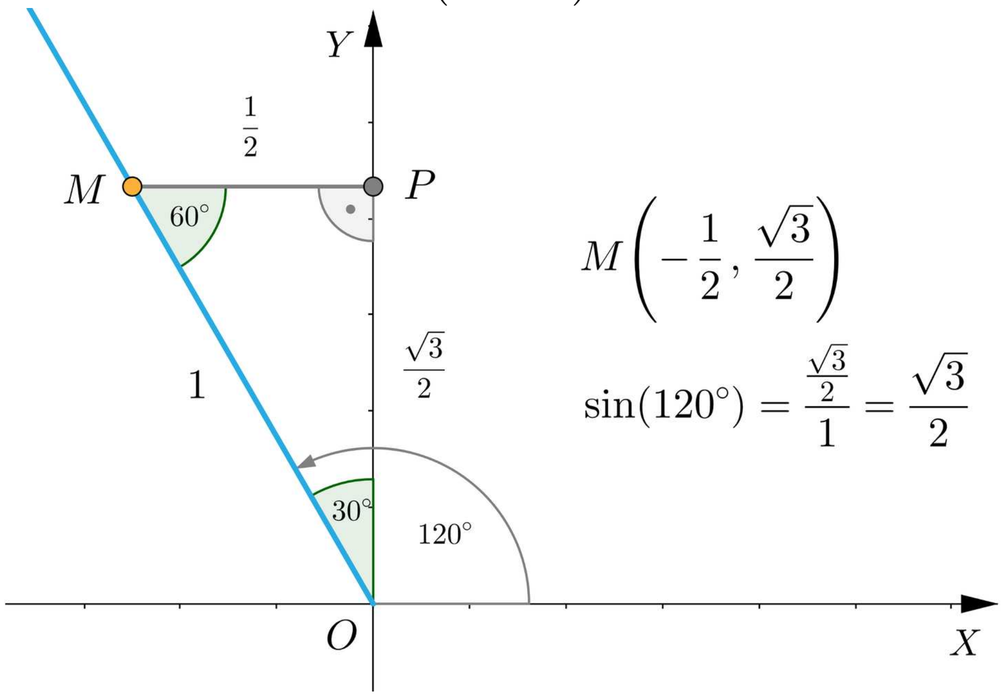
Przykład 1

Oblicz:

a) $\sin 120^\circ$

W prostokątnym układzie współrzędnych umieszczamy kąt o mierze 120° w położeniu standardowym. Na drugim ramieniu wybieramy punkt M. Promień wodzący punktu M jest równy 1 (nie zastanawiaj się za długo, dlaczego akurat 1 – równie dobrze mógłby to być dowolny inny punkt). Wówczas trójkąt MOP jest połową trójkąta równobocznego, a zatem $|MP| = \frac{1}{2}, \ |OP| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

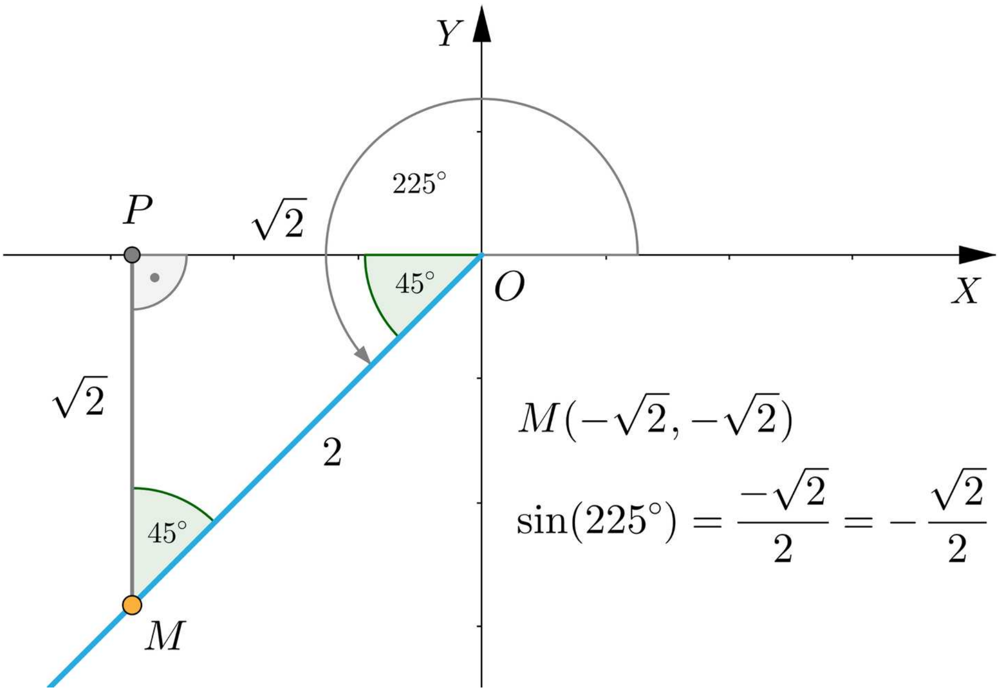
Wobec tego współrzędne punktu M to $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Zatem $\sin 120^\circ = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



b) $\sin 225^\circ$

Spójrzmy na rysunek poniżej. W prostokątnym układzie współrzędnych umieszczamy kąt o mierze 225° w położeniu standardowym. Na drugim ramieniu wybieramy punkt M. Niech będzie to punkt, którego promień wodzący jest równy 2. Wówczas trójkąt MOP jest połową kwadratu, a zatem $|MP| = \sqrt{2}, |OP| = \sqrt{2}$.

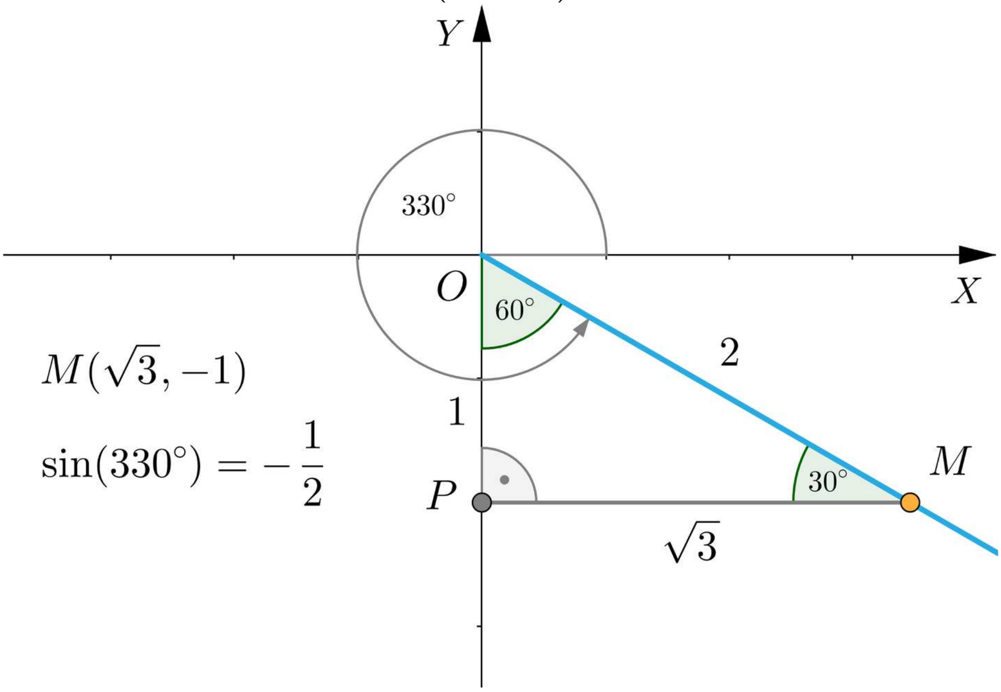
Wobec tego współrzędne punktu M to $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$. Zatem $\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



c) $\sin 330^\circ$

W prostokątnym układzie współrzędnych umieszczamy kąt o mierze 330° w położeniu standardowym. Na drugim ramieniu wybieramy punkt M. Niech będzie to punkt, którego promień wodzący jest równy 2. Wówczas trójkąt MOP jest połową trójkąta równobocznego, a zatem $|MP| = \sqrt{3},\ |OP| = 1$.

Wobec tego współrzędne punktu M to $\left(\sqrt{3}, -1\right)$. Zatem $\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$.



W następnym przykładzie rozważymy sinusy kątów skierowanych ujemnie.

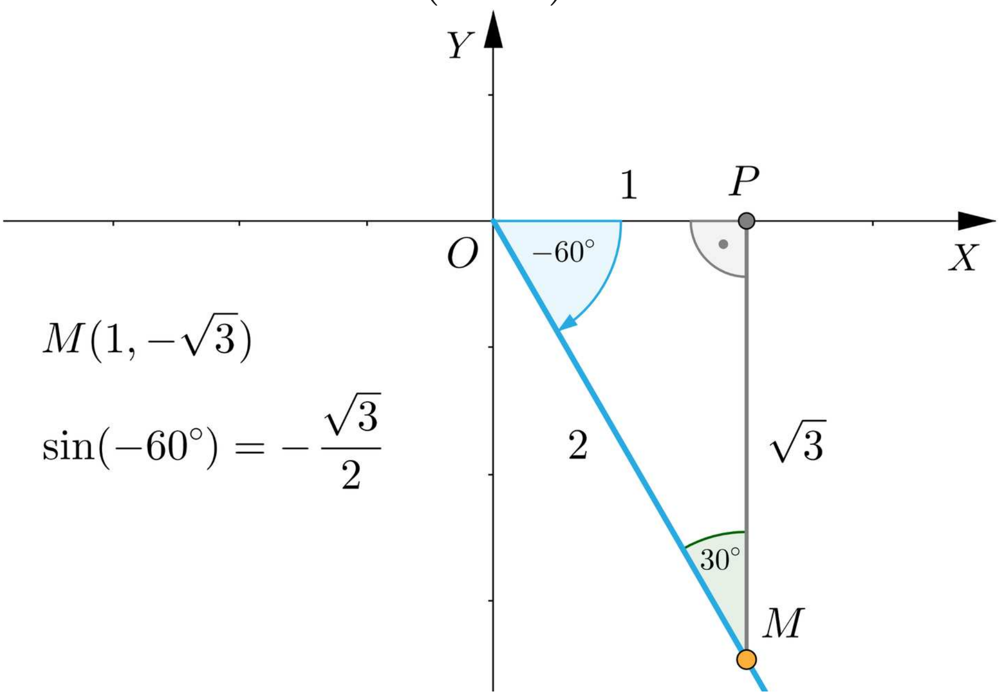
Przykład 2

Oblicz:

a) $\sin(-60^{\circ})$

W prostokątnym układzie współrzędnych umieszczamy kąt o mierze -60° w położeniu standardowym. Na drugim ramieniu wybieramy punkt M. Niech będzie to punkt, którego promień wodzący jest równy 2. Wówczas trójkąt MOP jest połową trójkąta równobocznego, a zatem $|MP| = \sqrt{3},\ |OP| = 1$.

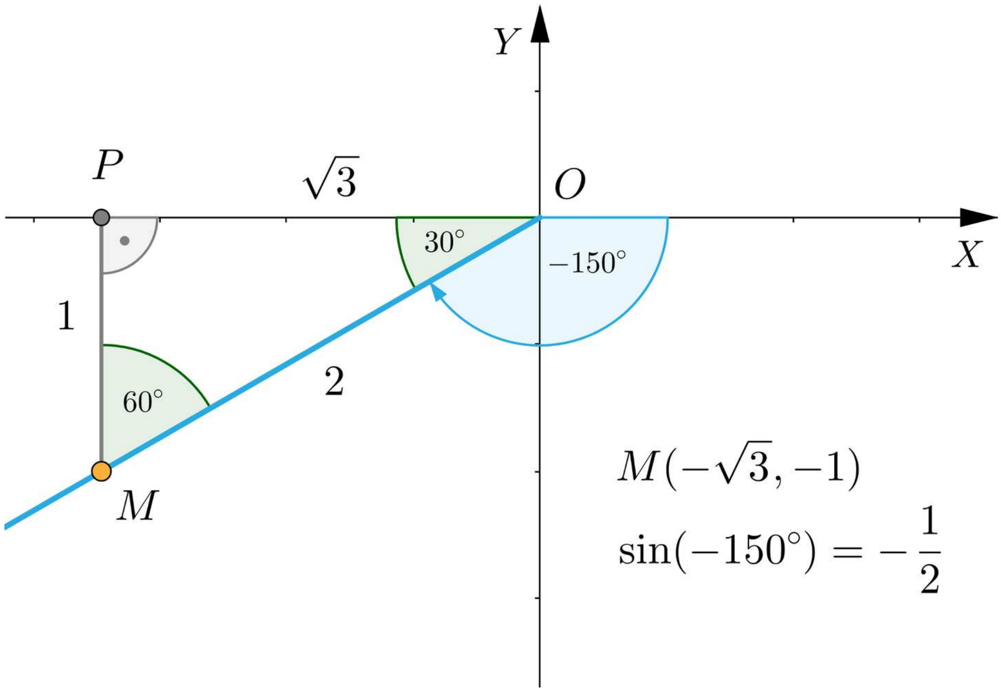
Wobec tego współrzędne punktu M to $\left(1, -\sqrt{3}\right)$. Zatem $\sin(-60^{\circ}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



b) $\sin(-150^{\circ})$

W prostokątnym układzie współrzędnych umieszczamy kąt o mierze -150° w położeniu standardowym. Na drugim ramieniu wybieramy punkt M. Niech będzie to punkt, którego promień wodzący jest równy 2. Wówczas trójkąt MOP jest połową trójkąta równobocznego, a zatem $|MP| = 1,\ |OP| = \sqrt{3}$.

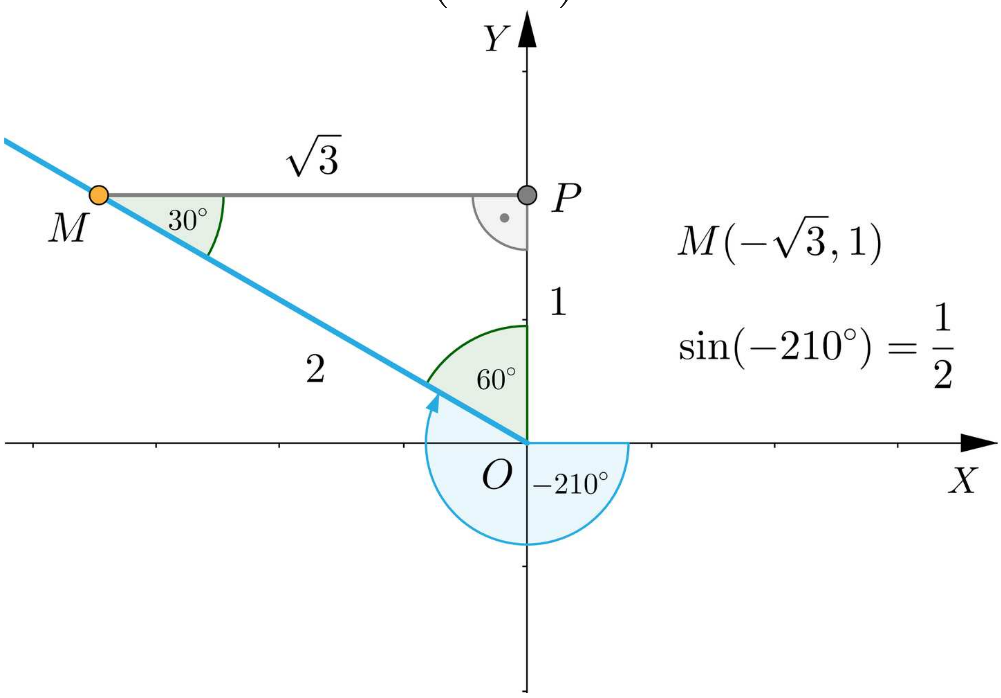
Wobec tego współrzędne punktu M to $\left(-\sqrt{3}, -1\right)$. Zatem $\sin(-150^{\circ}) = -\frac{1}{2}$.



c) $\sin(-210^\circ)$

W prostokątnym układzie współrzędnych umieszczamy kąt o mierze -210° w położeniu standardowym. Na drugim ramieniu wybieramy punkt M. Niech będzie to punkt, którego promień wodzący jest równy 2. Wówczas trójkąt MOP jest połową trójkąta równobocznego, a zatem $|MP| = 1, \ |OP| = \sqrt{3}$.

Wobec tego współrzędne punktu M to $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$. Zatem $\sin(-210^\circ) = \frac{1}{2}$.



Ciekawostka

Istnieją również inne, nieco bardziej “nowoczesne”, definicje funkcji sinus. Jedna z nich wykorzystuje nieskończoną sumę zwaną **szeregiem Taylora**.

Według tej definicji:

$\sin x \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

Inna definicja funkcji sinus wykorzystuje iloczyny nieskończone:

$\sin x = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 \cdot 1^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 \cdot 2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 \cdot 3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 \cdot 4^2}\right) \cdot \ldots$

Niektóre definicje wykorzystują tzw. **ułamki łańcuchowe** lub **równania różniczkowe**, ale te zagadnienia są na tyle wymagające, że pominiemy szczegóły.

Przykład 3

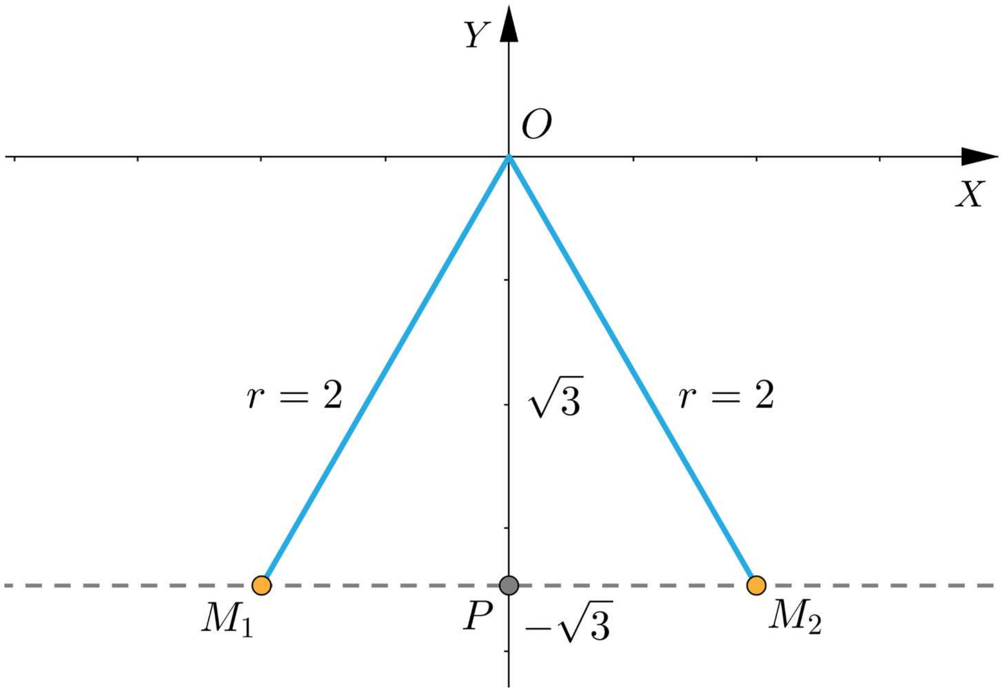
Wyznaczymy miary wszystkich kątów α, dla których sinα $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Z definicji funkcji sinus mamy, że $\sin\alpha = \frac{y}{r}$.

W tym przypadku $\frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ponieważ $r > 0$, to $y = -\sqrt{3}k$ i $r = 2k$ dla pewnej liczby $k > 0$.

Ponieważ możemy wybrać dowolny punkt na drugim ramieniu kąta, więc niech $k = 1$. Wówczas punkt M ma drugą współrzędną równą $-\sqrt{3}$ i jego promień wodzący jest równy 2.



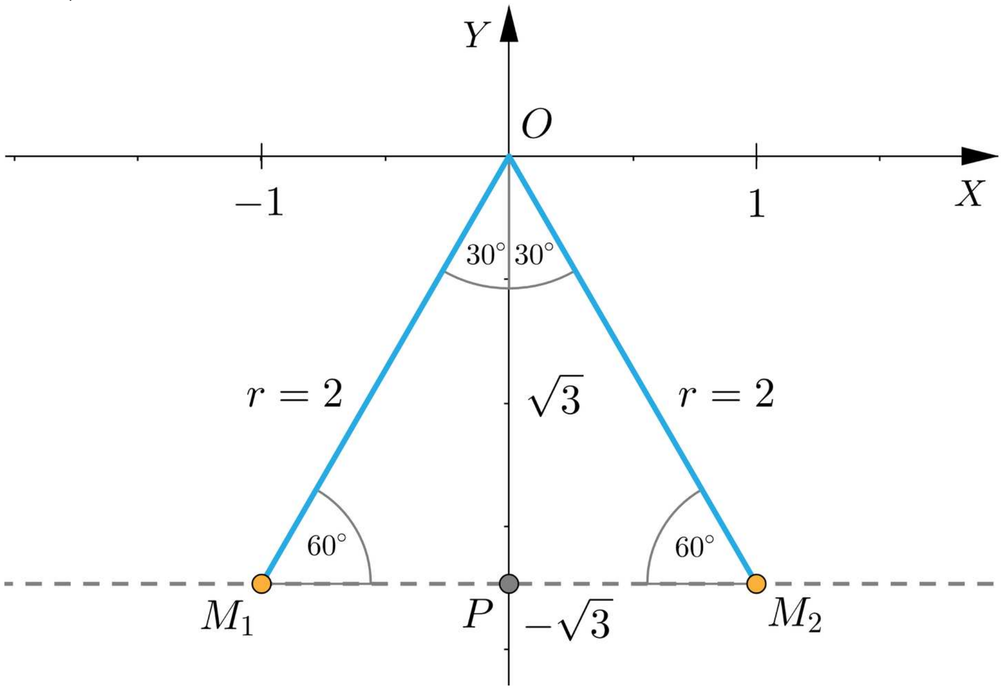
Zauważmy, że są dwa takie punkty: jeden leży w trzeciej, a drugi – w czwartej ćwiartce. Z twierdzenia Pitagorasa możemy wyznaczyć ich odległości od osi Y:

$|MP|^2 + |PO|^2 = |OM|^2$

$|MP|^2 + 3 = 4$

$|MP|^2 = 1$

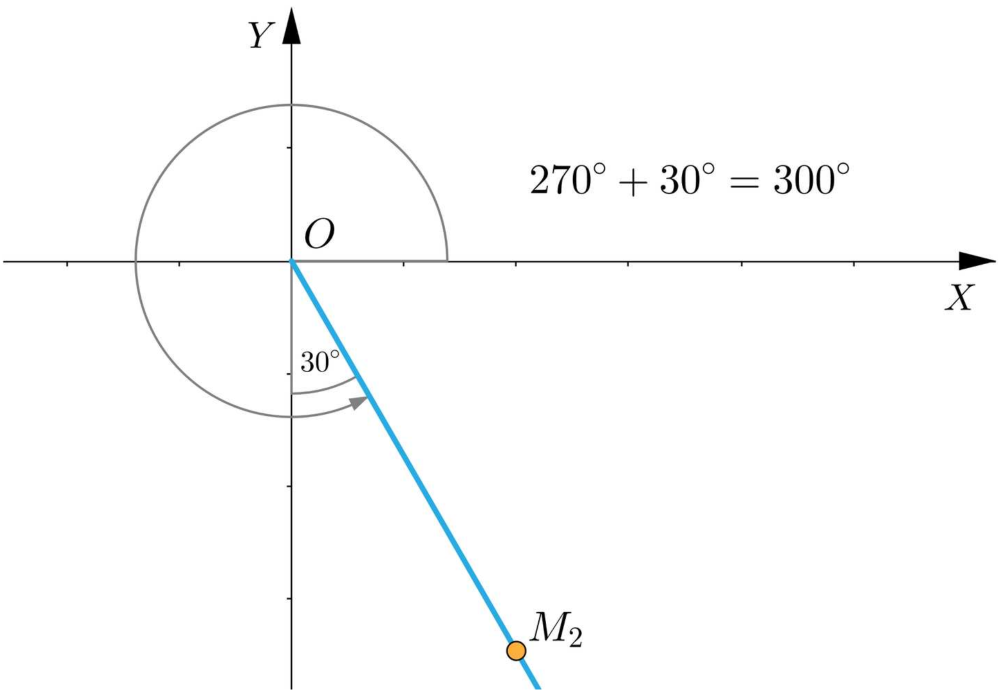
Zatem pierwsza współrzędna punktu M to 1 lub -1. Niech $M_1 = \left(-1, -\sqrt{3}\right)$ i $M_2 = \left(1, -\sqrt{3}\right)$.

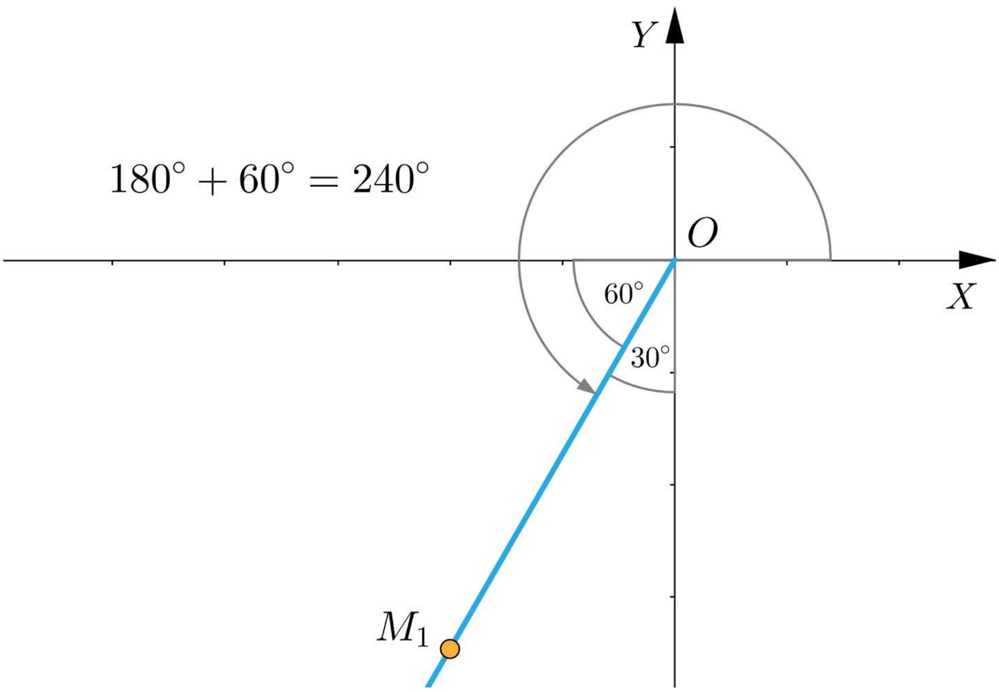


Wynika stąd, że każdy z trójkątów M_1PO i M_2PO jest połową trójkąta równobocznego.

Jednocześnie trójkąt M_1M_2O jest równoboczny.

Zatem szukane kąty mają miary $180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$ oraz $270^\circ + 30^\circ = 300^\circ$.





Zwróćmy jeszcze uwagę, że po obrocie drugiego ramienia kąta o 360° w jedną lub w drugą stronę, to ramię znajdzie się w dokładnie tym samym położeniu. Zatem

$\sin 240^\circ = \sin(240^\circ + 360^\circ) = \sin(240^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \ldots$

i

$\sin 240^\circ = \sin(240^\circ - 360^\circ) = \sin(240^\circ - 2 \cdot 360^\circ) = \ldots.$

Stąd wszystkie kąty tej postaci możemy zapisać jako $240^\circ + k \cdot 360^\circ$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Ponadto

$\sin 300^\circ = \sin(300^\circ + 360^\circ) = \sin(300^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \ldots$

i

$$\sin 300^\circ = \sin(300^\circ - 360^\circ) = \sin(300^\circ - 2 \cdot 360^\circ) = \ldots.$$

Stąd wszystkie kąty tej postaci możemy zapisać jako $300^\circ + k \cdot 360^\circ$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Dostaliśmy dwie serie rozwiązań: $240^\circ + k \cdot 360^\circ$ oraz $300^\circ + k \cdot 360^\circ$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Słownik

promień wodzący punktu

odległość punktu od początku układu współrzędnych

sinus kąta skierowanego

stosunek rzędnej dowolnie wybranego punktu M należącego do drugiego ramienia tego kąta do promienia wodzącego punktu M, definicja wymaga, aby kąt był umieszczony w położeniu standardowym

Aplet

Polecenie 1

Przeanalizuj, jak zmienia się wartość funkcji sinus dla ustalonego kąta przy zmianie promienia wodzącego punktu B na drugim ramieniu kąta.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dq8swSWYD

Polecenie 2

Wypełnij tabelę, korzystając z apletu. Pamiętaj, że obliczone w ten sposób wartości funkcji sinus są zwykle przybliżone.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Sinus dowolnego kąta

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
Zakres rozszerzony 2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

- Obliczysz sinus wielokrotności kąta prostego.
- Obliczysz sinus dowolnego kąta.
- Wyznaczysz miarę kąta, znając wartość jego sinusa.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Aplet” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Aplet”. Uczniowie zapoznają się z materiałem i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują jego treść wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.
4. Praca indywidualna – implementacja poznanej techniki do rozwiązywania problemów informatycznych – wykonywanie ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

2. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Sinus dowolnego kąta”).

Materiały pomocnicze:

- Własności funkcji sinus
- Wykres i własności funkcji sinus

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Aplet” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Sinus dowolnego kąta”.