

Cechy przystawiania trójkątów

Materiał składa się z sekcji: "Pierwsza cecha przystawiania trójkątów", "Druga cecha przystawiania trójkątów", "Trzecia cecha przystawiania trójkątów", "Zastosowania cech przystawiania trójkątów".

Materiał zawiera ilustracje (fotografie, obrazy, rysunki), film, ćwiczenia, w tym interaktywne.

Przykłady i ćwiczenia - pierwsza, druga i trzecia cecha przystawiania trójkątów, zastosowanie cech przystawiania trójkątów.

Film- trzecia cecha przystawiania trójkątów.

Cechy przystawania trójkątów

Pierwsza cecha przystawania trójkątów

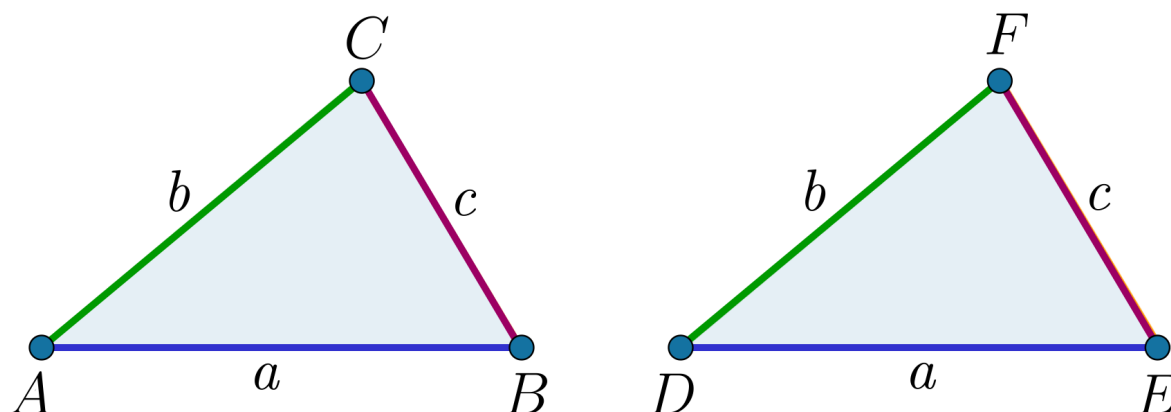
Przykład 1

Jeśli dwie figury są przystające, to można je tak przekształcić (wykorzystując np. symetrię), aby pokryły się.

Z warunku przystawania odcinków (dwa odcinki są przystające, gdy mają równe długości) wynika, że trójkąty przystające muszą mieć odpowiednie boki równe. Z warunku przystawania kątów wynika, że trójkąty przystające muszą mieć odpowiednie kąty równe. Chcąc sprawdzić, czy trójkąty są przystające, nie musimy porównywać ich wszystkich boków i wszystkich kątów. Możemy skorzystać z własności przystawania, zwanych cechami przystawania trójkątów.

Twierdzenie: I cecha przystawania trójkątów bok – bok – bok (bbb)

Jeżeli dwa trójkąty mają odpowiadające sobie boki równe, to te trójkąty są przystające.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jeżeli $AB = DE$, $AC = DF$, $CB = FE$, to trójkąt ABC jest przystający do trójkąta DEF .

Zapisujemy symbolicznie

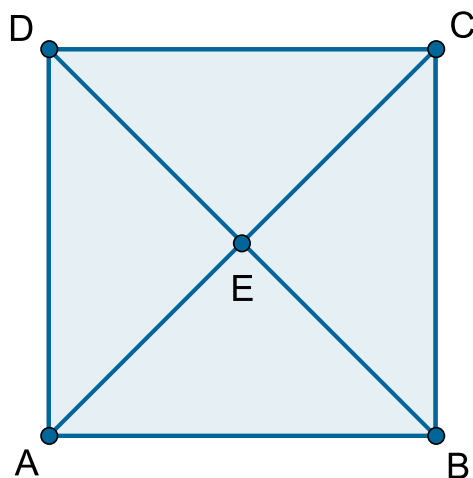
$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

Przykład 2

Opiszemy konstrukcję trójkąta $A'B'C'$ przystającego do trójkąta ABC , korzystając z I cechy przystawania trójkątów.

Rysujemy trójkąt ABC , a następnie kolejno konstruujemy odpowiednie boki trójkąta $A'B'C'$.

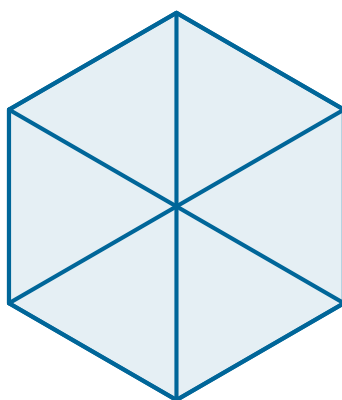
Przykład 3



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przekątne dzielą kwadrat $ABCD$ na 4 trójkąty. Trójkąty te mają odpowiednie boki równe, zatem na podstawie I cechy przystawania trójkątów stwierdzamy, że trójkąty ABE , BCE , CDE , DAE są przystające.

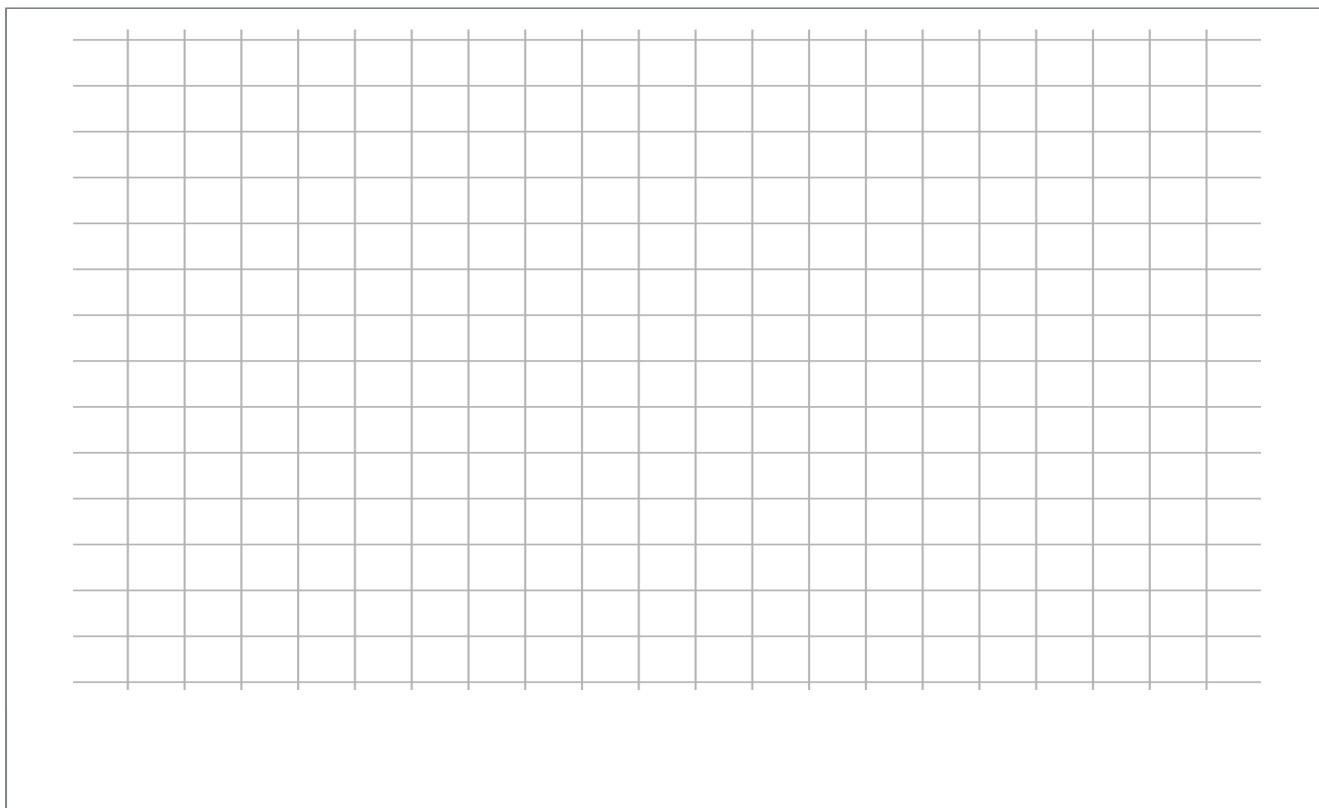
Podobnie można uzasadnić, że trójkąty otrzymane w wyniku podzielenia sześciokąta foremnego przekątnymi – są przystające, tak jak na rysunku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Narysuj dwa przystające trójkąty, korzystając z pierwszej cechy przystawania trójkątów.



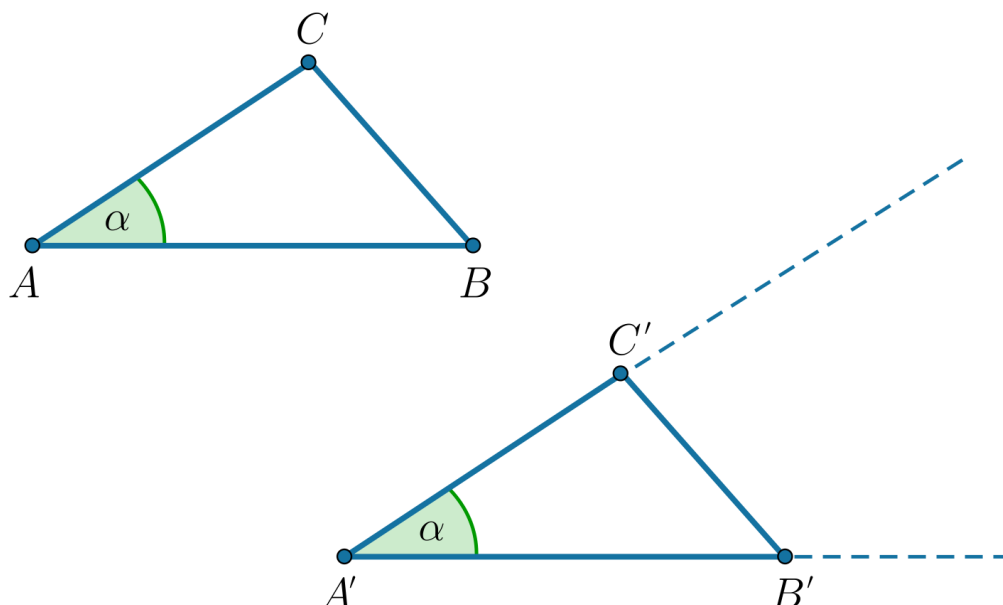
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Druga cecha przystawania trójkątów

Trójkąt $A'B'C'$ przystający do danego trójkąta ABC można skonstruować również innym sposobem.

Konstruujemy najpierw kąt przystający do jednego z kątów trójkąta, np. kąta CAB . Na ramionach otrzymanego kąta odkładamy odcinki $A'C'$ i $A'B'$, równe odpowiednio odcinkom AC i AB .

Łącząc punkty C' i B' , otrzymujemy odcinek $B'C'$. Można wykazać, że $B'C' = BC$. Trójkąty ABC i $A'B'C'$ mają zatem odpowiednie boki równe. Na podstawie I cechy przystawania trójkątów stwierdzamy, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające.

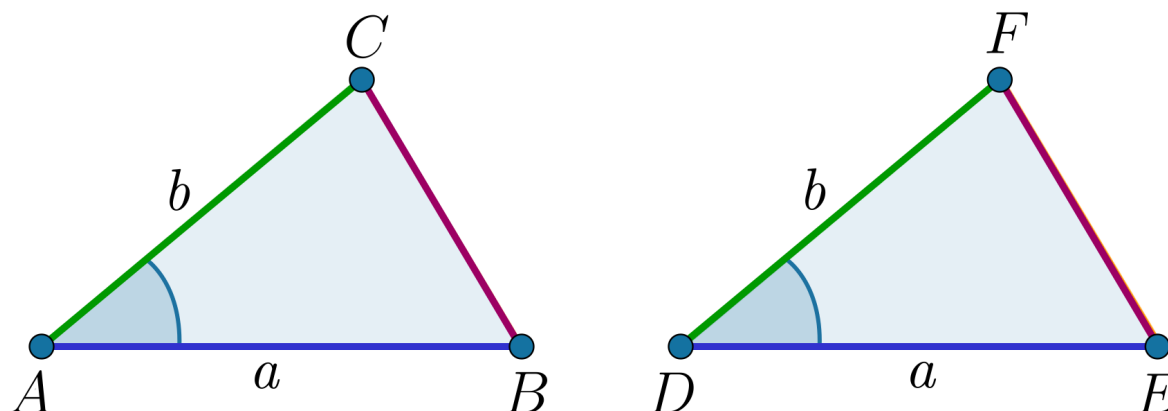


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Z przeprowadzonego eksperymentu wynika kolejna cecha przystawania trójkątów.

Twierdzenie: II cecha przystawania trójkątów bok – kąt – bok (bkb)

Jeżeli dwa boki i kąt zawarty pomiędzy nimi w jednym trójkącie są równe dwóm bokom i kątowi zawartemu między nimi w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.

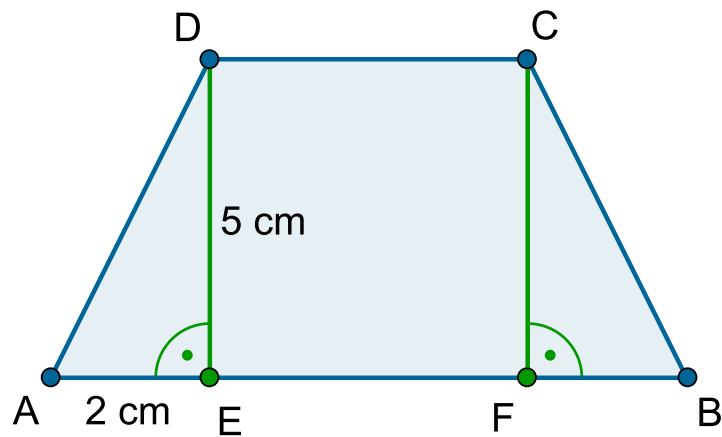


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jeżeli $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle BAC = \angle EDF$ to trójkąt ABC jest przystający do trójkąta DEF .

Przykład 4

W trapezie równoramiennym $ABCD$ wysokości poprowadzone z wierzchołka D oraz z wierzchołka C odcięły dwa trójkąty, tak jak na rysunku. Wykażemy, że trójkąty te są przystające.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Skorzystamy z II cechy przystawiania trójkątów. Odczytujemy, że

$$|AE| = |FB| = 2 \text{ cm},$$

$$|ED| = |CF| = 5 \text{ cm},$$

bo CF i ED są wysokościami trapezu. Ponadto

$$|\angle AED| = |\angle BFC| = 90^\circ.$$

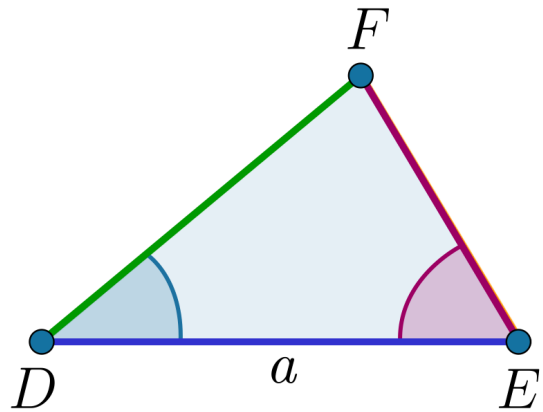
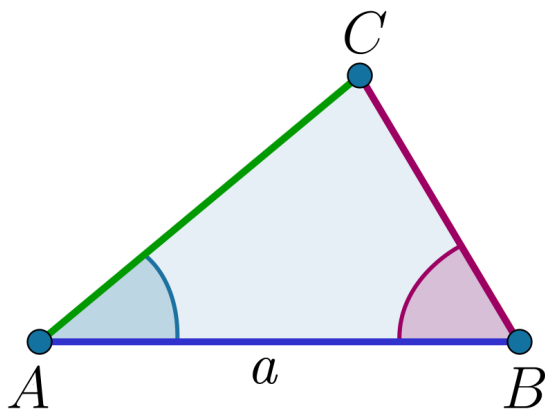
Zatem w trójkątach AED i BFC dwa boki i kąt między nimi są odpowiednio równe. Na podstawie II cechy przystawiania trójkątów stwierdzamy, że trójkąty te są przystające.

Trzecia cecha przystawiania trójkątów

Sformułujmy teraz trzecią cechę przystawiania trójkątów.

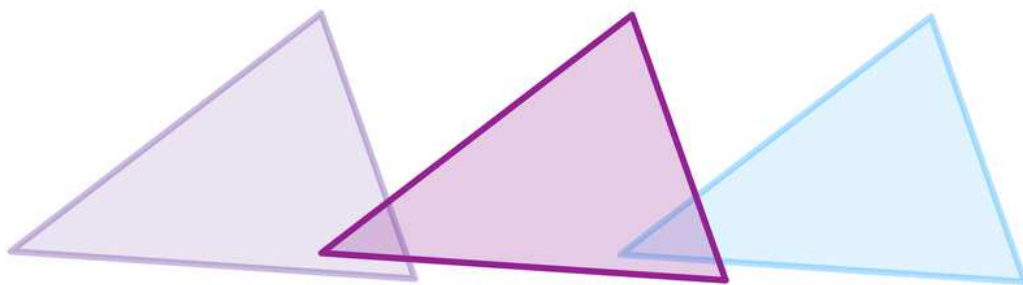
Twierdzenie: III cecha przystawiania trójkątów kąt – bok – kąt (kbk)

Jeżeli bok i dwa przyległe do niego kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm przyległym do niego kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jeżeli $AB = DE$, $\angle BAC = \angle EDF$ i $\angle ABC = \angle DEF$, to trójkąt ABC jest przystający do trójkąta DEF .



Trójkąty są przystające.

Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1W2EmUcKBoOP>

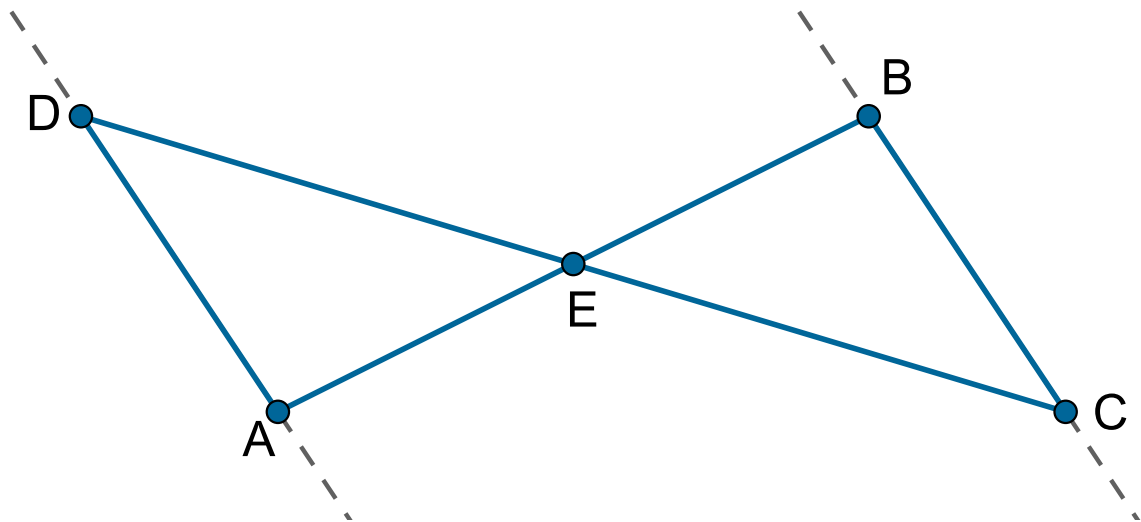
Trzecia cecha przystawiania trójkątów.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Trzecia cecha przystawiania trójkątów.

Przykład 5

Punkt E jest środkiem odcinka AB . Proste DA i BC są równoległe. Wykażemy, że trójkąty ADE i BCE są przystające.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

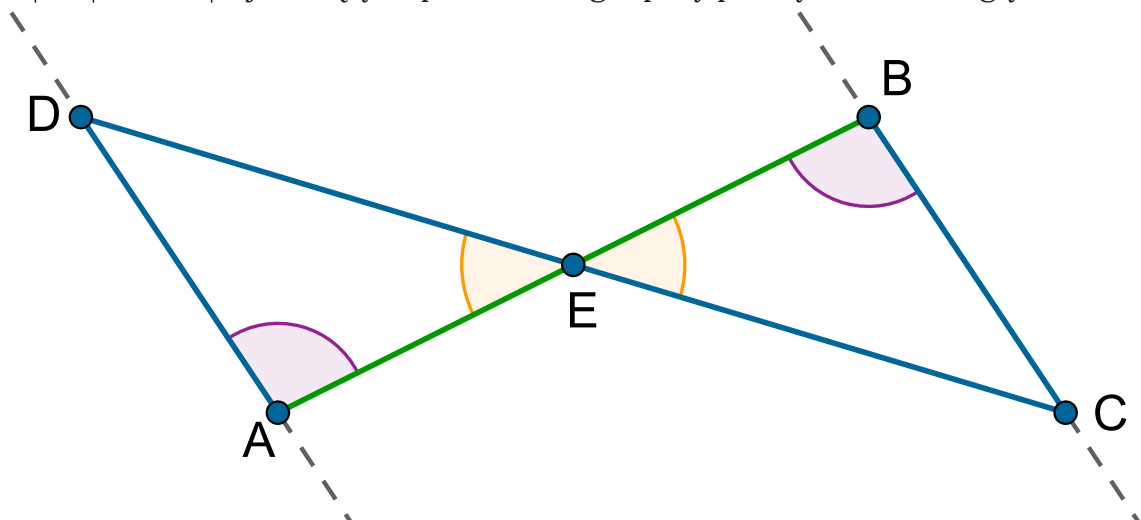
Zauważmy, że

$$|AE| = |EB|,$$

gdyż punkt E jest środkiem odcinka AB .

$|\angle AED| = |\angle BEC|$ - jako kąty wierzchołkowe,

$|\angle DAE| = |\angle CBE|$ - jako kąty naprzemianległe przy prostych równoległych.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wynika z tego, że bok AE i dwa leżące przy nim kąty w trójkącie ADE są równe bokowi EB i odpowiednim kątom w trójkącie CBE . Na podstawie III cechy przystawiania trójkątów stwierdzamy, że trójkąty ADE i CBE są przystające, co należało wykazać.

Z przystawiania trójkątów wynikają cechy przystawiania trójkątów prostokątnych.

Ważne!

Dwa trójkąty prostokątne są przystające, jeśli mają odpowiednio równe

- przyprostokątne,

- jedną z przyprostokątnych i przeciwprostokątną,
- przyprostokątną i kąt leżący naprzeciw tej przyprostokątnej,
- przeciwprostokątną i jeden z kątów ostrych.

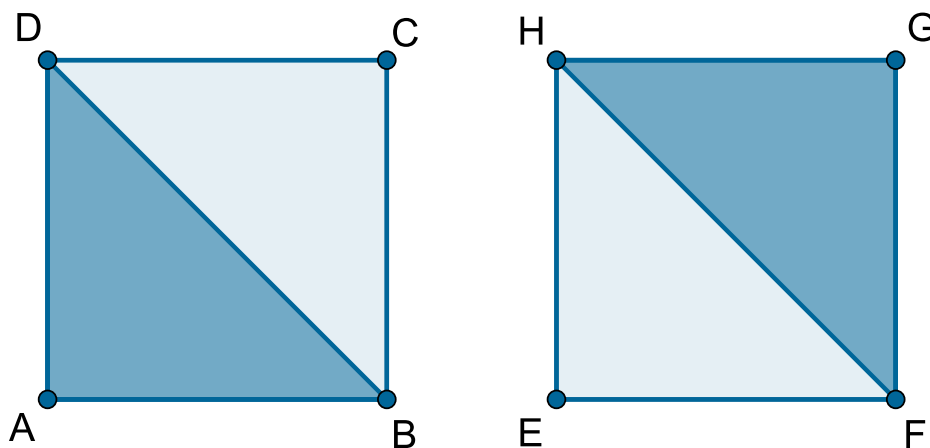
Zastosowania cech przystawania trójkątów

Wiemy już, że każdy wielokąt wypukły można podzielić na trójkąty o wspólnym wierzchołku, który jest zarazem wierzchołkiem wielokąta. Jeśli dwa wielokąty podzielimy w ten sam sposób na tę samą liczbę przystających trójkątów, to na podstawie I cechy przystawania trójkątów stwierdzamy, że wielokąty te mają boki i kąty odpowiednio równe. Są więc przystające.

Nie zawsze równość boków i równość kątów jest niezbędna do stwierdzenia przystawania wielokątów.

Przykład 6

Dla przykładu rozważmy dwa kwadraty.



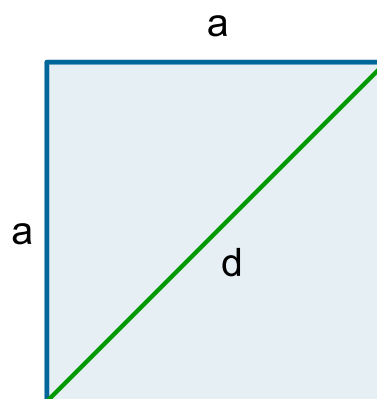
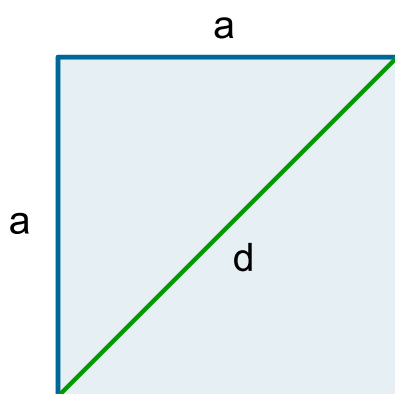
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przekątna DB dzieli kwadrat $ABCD$ na dwa przystające trójkąty prostokątne równoramienne ABD i BCD .

Podobnie przekątna HF dzieli kwadrat $EFGH$ na dwa przystające trójkąty prostokątne równoramienne EFH i FGH . Jeśli więc przystające są trójkąty ABD i EFH lub ABD i FGH , to i kwadraty są przystające. Do przystawania trójkątów prostokątnych równoramiennych wystarcza równość ich przeciwprostokątnych. Zatem kwadraty $ABCD$ i $EFGH$ są przystające, gdy mają boki równe lub gdy mają równe przekątne.

Twierdzenie: Przystawanie kwadratów

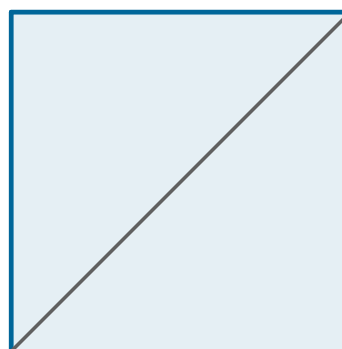
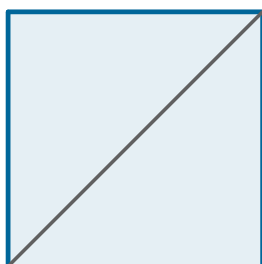
Dwa kwadraty są przystające, jeżeli ich boki są równe lub równe są ich przekątne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 7

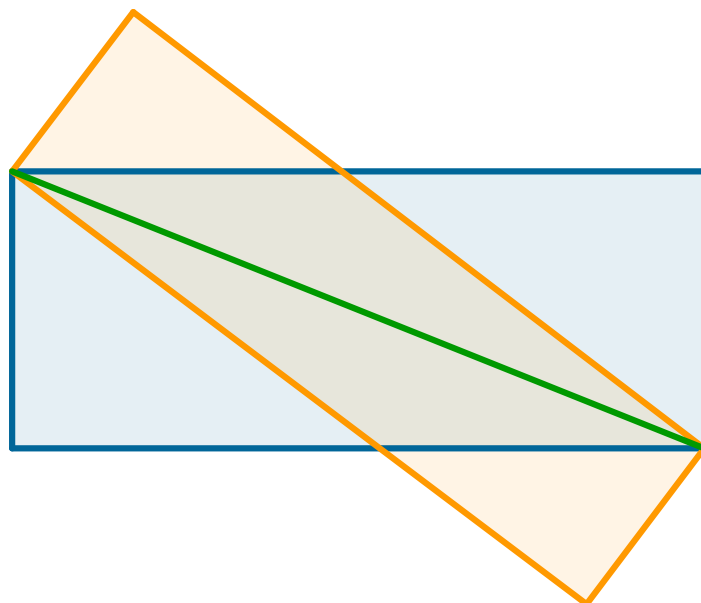
Kwadraty, które nie są przystające.



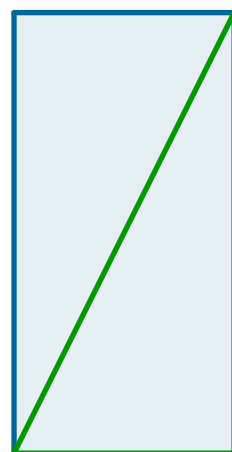
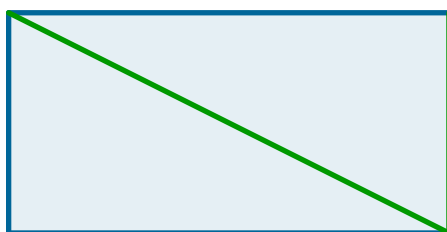
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 8

Równość miar kątów i przekątnych nie wystarcza do stwierdzenia przystawiania dwóch prostokątów.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Poprowadźmy w każdym z dwóch prostokątów przekątną. Przekątna ta dzieli każdy prostokąt na dwa przystające trójkąty prostokątne. Aby prostokąty te były przystające, wystarczy, by wszystkie otrzymane tak trójkąty były przystające.

Możemy zatem na podstawie cech przystawiania trójkątów określić warunki, jakie muszą spełniać dwa prostokąty, aby były przystające.

Ważne!

Dwa prostokąty są przystające, gdy

- boki jednego prostokąta są równe bokom drugiego prostokąta,
- przekątna i jeden z boków jednego prostokąta są równe przekątnej i jednemu z boków drugiego prostokąta,
- przekątna i kąty przez nią utworzone z bokami w jednym prostokącie są odpowiednio równe przekątnej i kątom przez nią utworzonym z bokami w drugim

prostokącie.

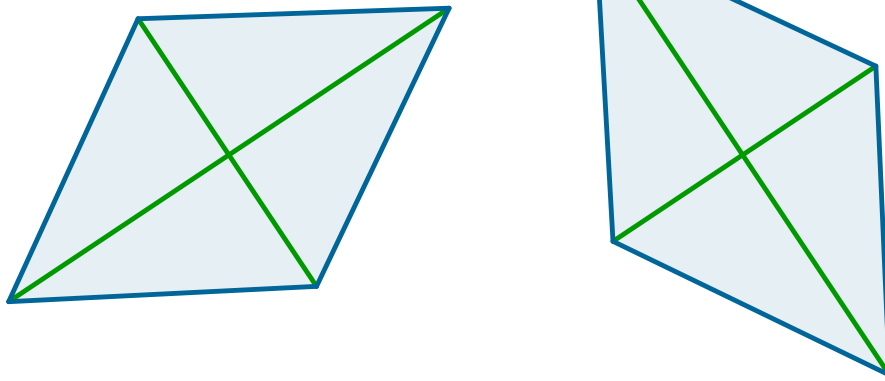
Przykład 9

W rombie przekątne przecinają się pod kątem prostym. Punkt przecięcia dzieli każdą z nich na połowę.

Do przystawiania dwóch rombów wystarczy zatem stwierdzenie równości ich przekątnych (II cecha przystawiania trójkątów).

Zapamiętaj!

Dwa romby są przystające, gdy mają równe przekątne.

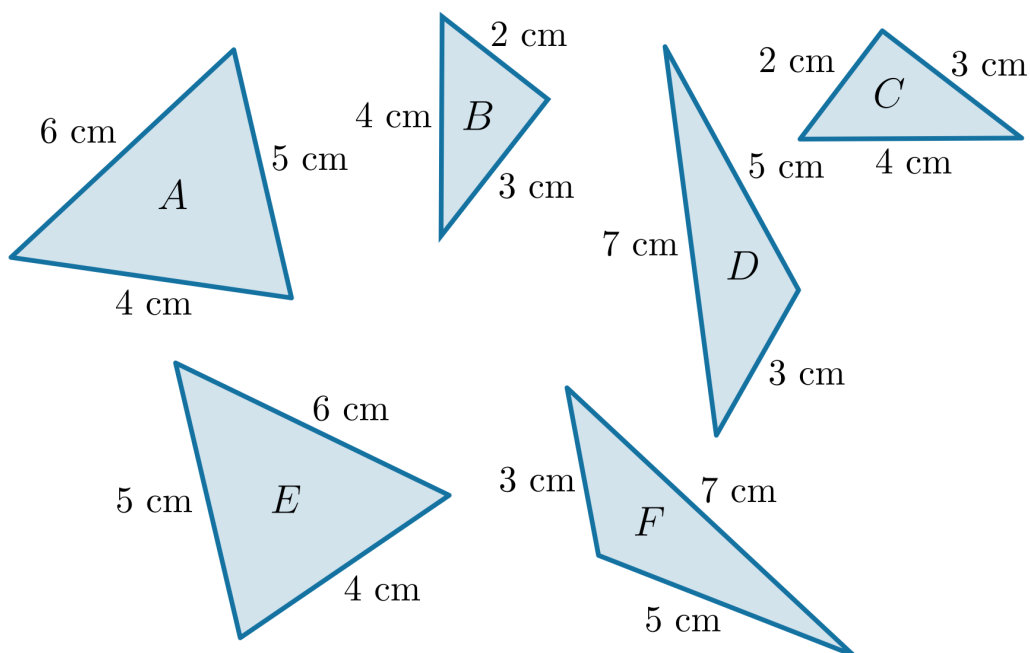


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Zapoznaj się z trójkątami przedstawionymi na poniższej ilustracji.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznacz wszystkie pary trójkątów przystających.

☐ $D \text{ i } F$

☐ $C \text{ i } F$

☐ $A \text{ i } B$

☐ $B \text{ i } E$

☐ $B \text{ i } C$

☐ $A \text{ i } E$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Dwa boki trójkąta ABC mają długości 8 cm i 13 cm. Dwa boki trójkąta DEF mają długości 8 cm i 5 cm.

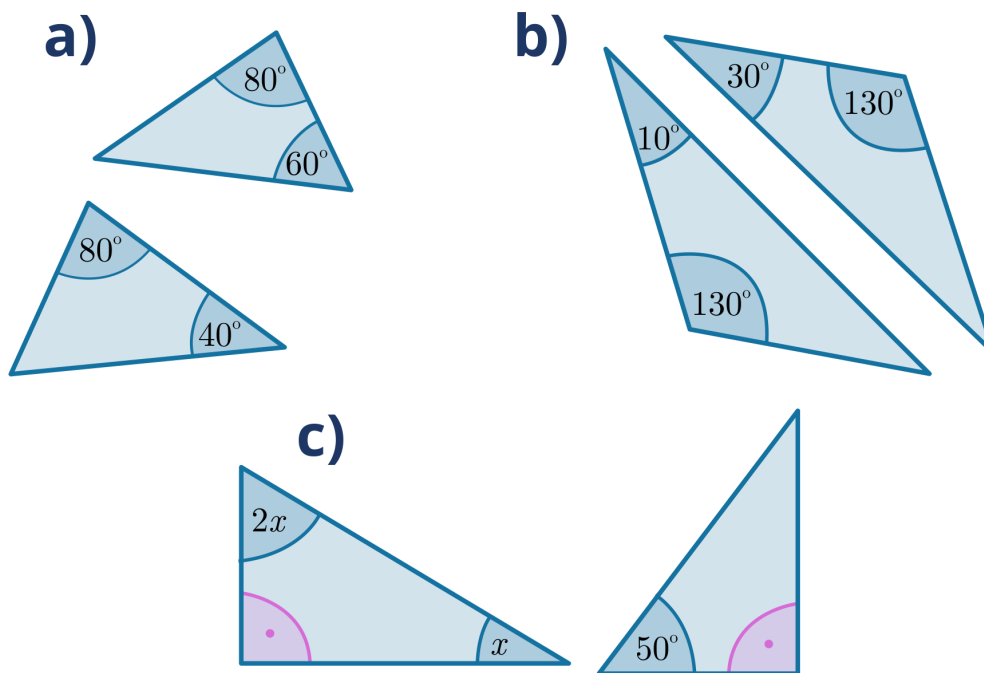
Uzasadnij, że trójkąty te nie są przystające.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Czy trójkąty na rysunku mogą być przystające? Jeśli tak – jaki warunek musi być jeszcze spełniony?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Rabatkę kwiatową w kształcie kwadratu o boku długości 2 m podzielono przekątnymi na 4 części. Na każdej z części posadzono inny rodzaj kwiatów. Oblicz pole powierzchni, jaką zajmuje każdy rodzaj kwiatów, i wpisz w lukę rozwiązanie.

Odpowiedź: Pole powierzchni, jaką zajmuje każdy rodzaj kwiatków, wynosi

m².

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



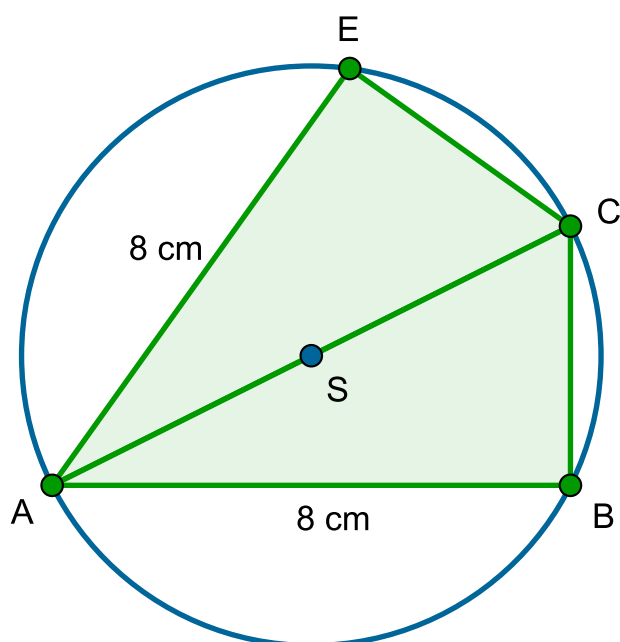
Wysokość podzieliła trójkąt równoboczny na dwa trójkąty. Wykaż, że trójkąty są przystające. Podaj miary kątów każdego z tych trójkątów.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Punkt S jest środkiem okręgu. Uzasadnij, że trójkąty ABC i ACE są przystające.



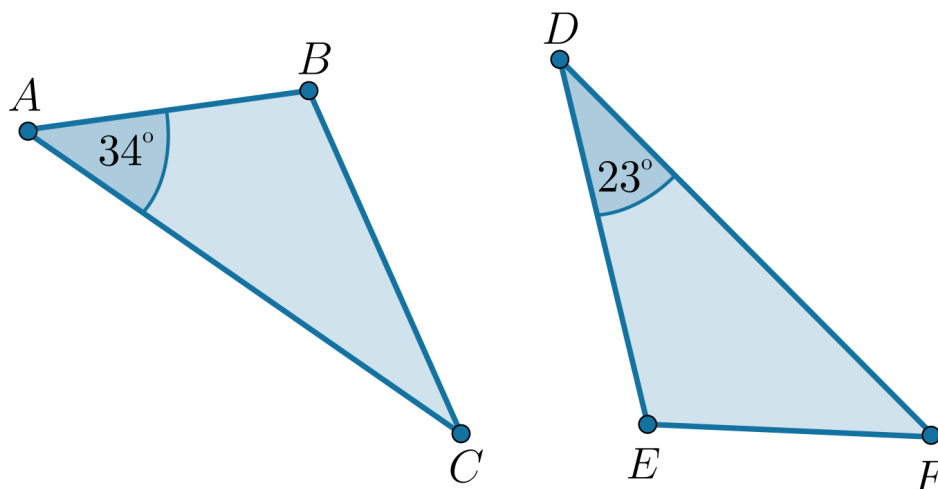
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Trójkąty ABC i DEF są przystające. Zapisz, które boki i które kąty są równe.



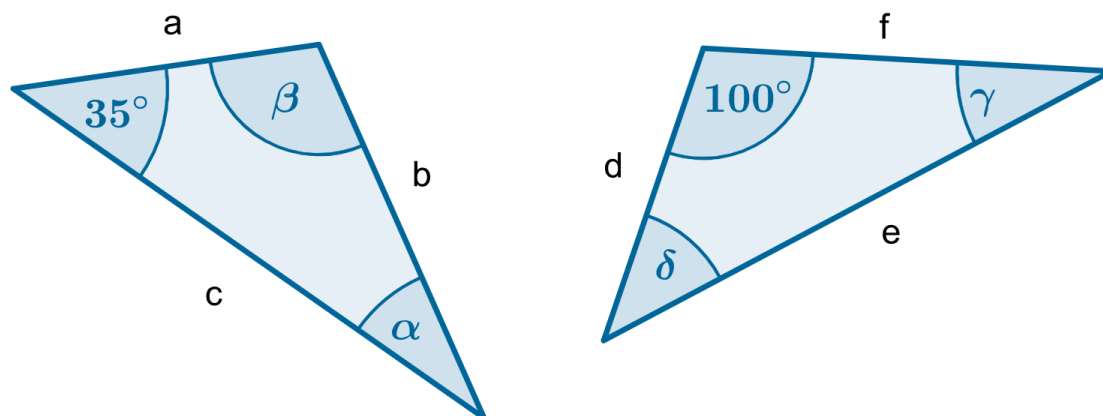
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Zapoznaj się z poniższą ilustracją, która przedstawia dwa trójkąty przystające.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Która z podanych równości jest prawdziwa? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $a = f$

☐ $\alpha + \beta = \gamma + \delta$

☐ $\alpha = 100^\circ$

☐ $\gamma = 35^\circ$

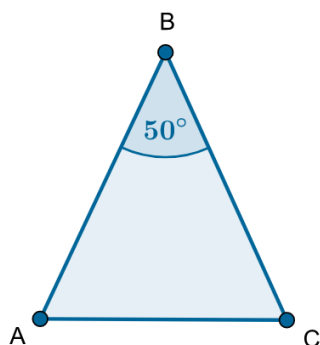
☐ $d = a$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

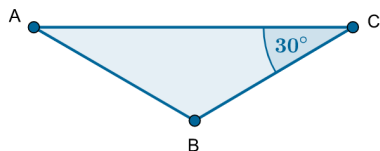
Ćwiczenie 10



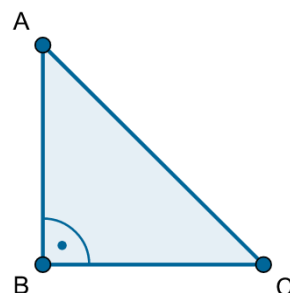
Trójkąt ABC taki, że $|AB| = |BC|$ podzielono wysokością poprowadzoną z wierzchołka B na dwa trójkąty przystające. Podaj miary kątów każdego z tak otrzymanych trójkątów.



$65^\circ, 25^\circ, 90^\circ$



$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$



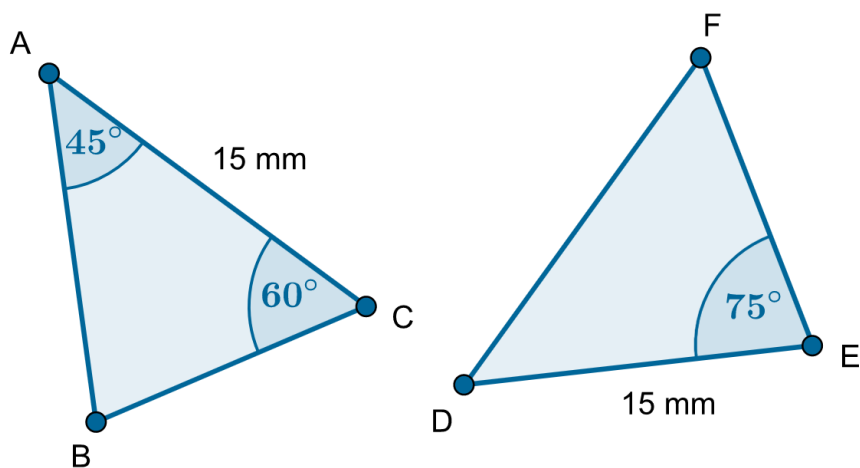
$45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Zapoznaj się z poniższą ilustracją.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Czy trójkąty ABC i DEF są przystające? Zaznacz poprawną odpowiedź.



Tak, ponieważ trójkąty mają jeden bok równy, ale miary kątów przy tym boku są różne.



Tak, ponieważ trójkąty mają jeden bok równy i kąty przy tym boku o tych samych miarach.



Nie, ponieważ trójkąty mają jeden bok równy i kąty o tych samych miarach.



Nie, ponieważ trójkąty mają jeden bok równy, ale miary kątów przy tym boku są różne.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



W równoległoboku $ABCD$ poprowadzono przekątne, które przecinają się w punkcie E .
Uzasadnij, że przystające są trójkąty

1. AEB i DEC ,

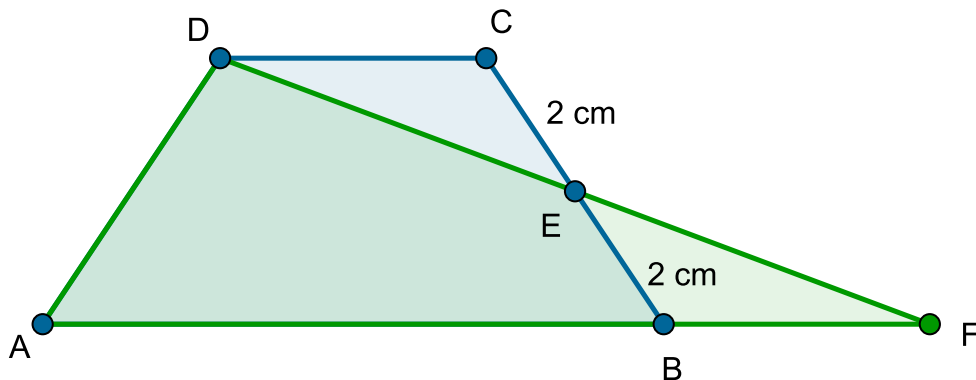
2. AED i CEB .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Wykaż, że pole trapezu $ABCD$ jest równe polu trójkąta ADF .



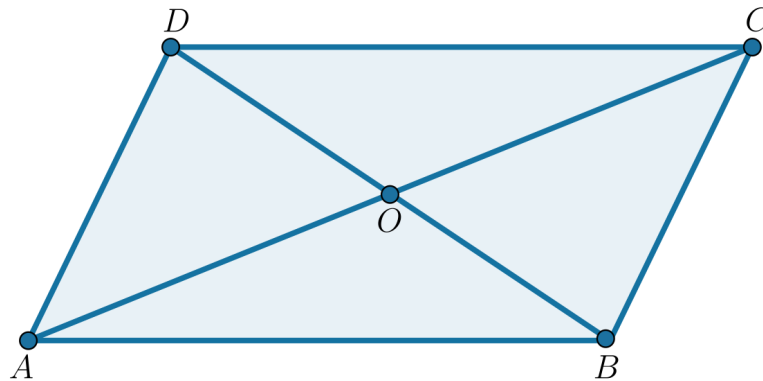
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Uzasadnij, że pole równoległoboku $ABCD$ jest czterokrotnie większe od pola trójkąta AOB .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

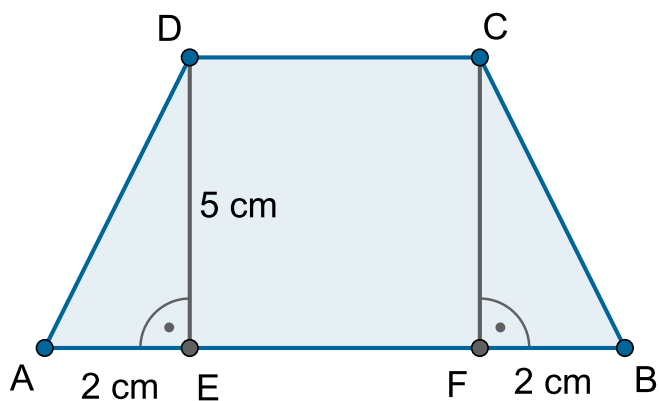
- ☐ Każde dwa trójkąty równoboczne są przystające.
- ☐ Przekątne dzielą równoległobok na cztery trójkąty przystające.
- ☐ Jeśli przekątna jednego kwadratu jest równa przekątnej drugiego kwadratu, to kwadraty te są przystające.
- ☐ Pola trójkątów przystających są równe.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Wykaż, że trapez $ABCD$ jest równoramienny.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Wykaż, że jeśli dwa trójkąty równoboczne mają równe wysokości, to są przystające.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Sprawdź, czy jeśli w równoległoboku dwie wysokości są równe, to jest on rombem.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Która cecha określa przystawanie trójkątów równobocznych? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Dwa trójkąty równoboczne są przystające, jeżeli miary ich kątów są takie same.

☐ Dwa trójkąty równoboczne zawsze są przystające.

☐ Dwa trójkąty równoboczne nigdy nie są przystające.

☐ Dwa trójkąty równoboczne są przystające, jeżeli ich boki są równe.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Jaki warunek muszą spełniać dwa równoległoboki, aby były przystające? Zaznacz poprawną odpowiedź.

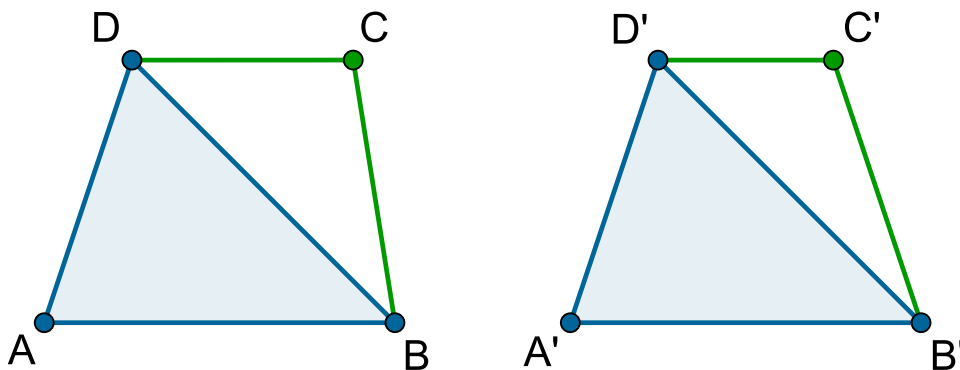
- ☐ Dwa równoległoboki nigdy nie są przystające.
- ☐ Dwa równoległoboki są przystające, jeżeli mają takie same długości przekątnych.
- ☐ Dwa równoległoboki są przystające, jeżeli ich równoległe boki są równe.
- ☐ Dwa równoległoboki są przystające, jeżeli ich nierównoległe boki są równe i kąty między nimi zawarte są odpowiednio równe.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



W jakim przypadku trapezy przedstawione na rysunku będą przystające?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 22



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Dwa kwadraty są przystające, gdy ich obwody są równe.
- ☐ Jeśli boki jednego równoległoboku są równe bokom drugiego równoległoboku, to równoległoboki te są przystające.
- ☐ Dwa prostokąty są przystające, gdy ich przekątne są równe.
- ☐ Dwa romby są przystające, gdy mają równe boki tej samej długości.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.