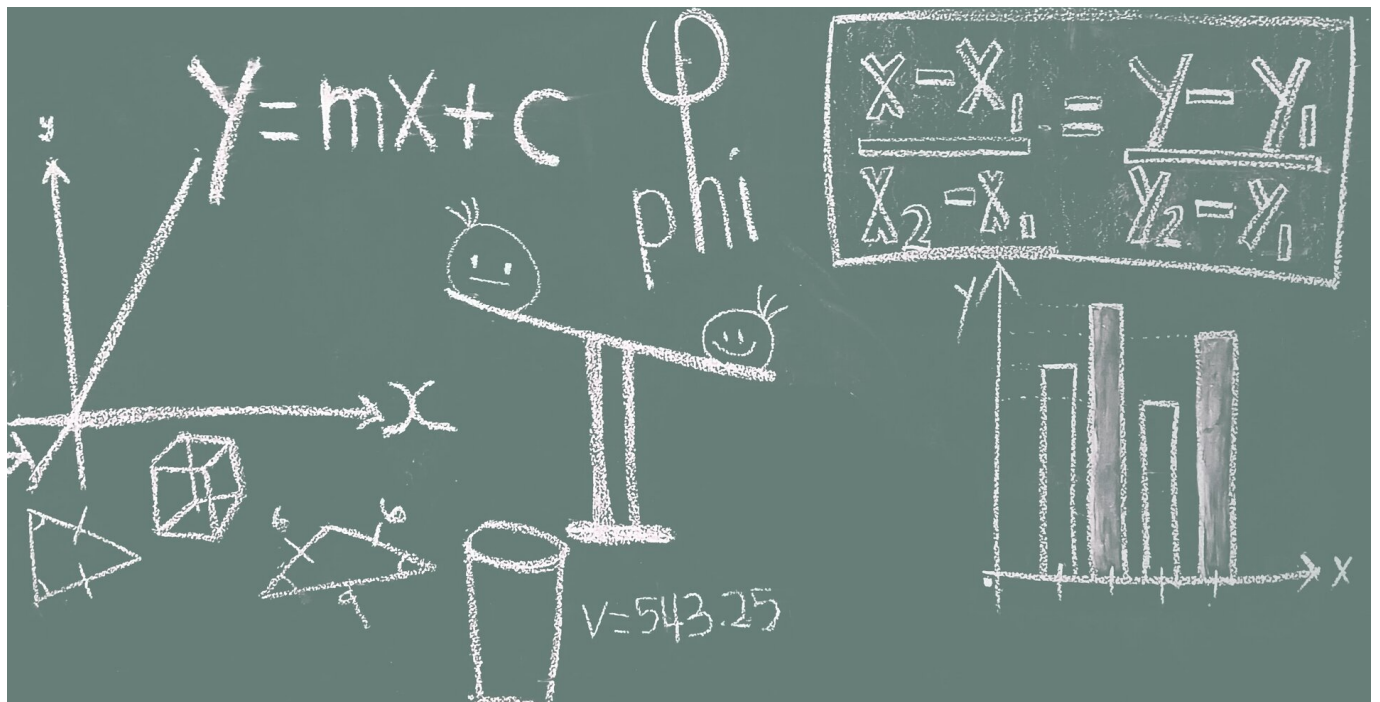




Pierwiastek z liczby nieujemnej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Gra edukacyjna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: Andrik Langfield, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Znamy już definicje pierwiastka kwadratowego i pierwiastka sześciennego. Okazuje się, że pojęcie pierwiastka można uogólnić i zdefiniować pierwiastek dowolnego stopnia będącego liczbą naturalną nie mniejszą niż 2. W tej lekcji omówimy własności pierwiastków z liczb nieujemnych.

Twoje cele

- Zastosujesz definicję pierwiastka z liczby nieujemnej.
- Zastosujesz własności pierwiastkowania.
- Usuniesz niewymierność z mianownika ułamka.

Przeczytaj

Przypomnijmy, że pierwiastkiem drugiego stopnia (kwadratowym) z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b , której kwadrat jest równy a , czyli:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a, \text{ gdzie } a \geq 0, b \geq 0$$

Analogicznie pierwiastkiem stopnia n , gdzie n jest liczbą naturalną większą od 2, z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b , której potęga o wykładniku n jest równa a , czyli:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, a \geq 0, b \geq 0$$

Przykład 1

$$\sqrt[4]{16} = 2, \text{ bo } 2 \geq 0 \text{ i } 2^4 = 16$$

$$\sqrt[4]{81} = 3, \text{ bo } 3 \geq 0 \text{ i } 3^4 = 81$$

$$\sqrt[4]{0,0625} = 0,5, \text{ bo } 0,5 \geq 0 \text{ i } 0,5^4 = 0,0625$$

$$\sqrt[5]{32} = 2, \text{ bo } 2 \geq 0 \text{ i } 2^5 = 32$$

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}, \text{ bo } \frac{2}{3} \geq 0 \text{ i } \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

Zauważmy, że wyrażenia $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[6]{x}$, $\sqrt[8]{x}$, ... (i ogólnie pierwiastki parzystych stopni) mają sens liczbowy tylko i wyłącznie dla liczb nieujemnych x , zatem dziedziną pierwiastka parzystego stopnia jest zbiór liczb nieujemnych, czyli $x \geq 0$.

Przykład 2

Wyrażenie $\sqrt[4]{x}$ ma sens dla każdej nieujemnej liczby rzeczywistej x , czyli dla $x \geq 0$.

Wyrażenie $\sqrt[6]{x-7}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $x - 7 \geq 0$, czyli dla $x \geq 7$.

Wyrażenie $\sqrt[8]{x+13}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $x + 13 \geq 0$, czyli dla $x \geq -13$.

Wyrażenie $\sqrt[10]{15-x}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $15 - x \geq 0$, czyli dla $x \leq 15$.

Wyrażenie $\sqrt[12]{-x-17}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $-x - 17 \geq 0$, czyli dla $x \leq -17$.

Przykład 3

Ponieważ niewykonalne jest dzielenie przez 0, wyrażenie $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ ma sens dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x , czyli dla $x > 0$.

Wyrażenie $\frac{1}{\sqrt[6]{x-4}}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $x - 4 > 0$ (uwzględniamy przy tym fakt, że mianownik nie może być równy zero), czyli dla $x > 4$.

Ponieważ mianownik ułamka nie może być równy 0, wyrażenie $\frac{1}{\sqrt[8]{x+6}}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $x + 6 > 0$, czyli dla $x > -6$.

Wyrażenie $\frac{1}{\sqrt[10]{5-x}}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $5 - x > 0$, czyli dla $x < 5$.

Wyrażenie $\frac{1}{\sqrt[12]{-10-x}}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $-10 - x > 0$, czyli dla $x < -10$.

Przykład 4

$$\sqrt[4]{5^4} = \sqrt[4]{625} = 5$$

$$\sqrt[4]{(-5)^4} = \sqrt[4]{625} = 5$$

$$\sqrt[6]{2^6} = \sqrt[6]{64} = 2$$

$$\sqrt[6]{(-2)^6} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Przykład 5

Zwróć uwagę, że liczby $\sqrt{3} - 3$ i $3 - \sqrt{3}$ są liczbami przeciwnymi:

$$\sqrt{3} - 3 = -(-\sqrt{3} + 3) = -(3 - \sqrt{3}). \text{ Zatem}$$

$$\sqrt[4]{(3 - \sqrt{3})^4} = 3 - \sqrt{3}, \text{ bo } 3 - \sqrt{3} > 0$$

Zauważmy, że liczba $\sqrt{3} - 3$ jest ujemna, więc, aby obliczyć $\sqrt[4]{(\sqrt{3} - 3)^4}$, wykonamy przekształcenia:

$$\sqrt[4]{(\sqrt{3} - 3)^4} = \sqrt[4]{[-(-\sqrt{3} + 3)]^4} = \sqrt[4]{[-(3 - \sqrt{3})]^4} = \sqrt[4]{(3 - \sqrt{3})^4} = 3 - \sqrt{3}$$

Ważne!

Uważaj na wyrażenia postaci $\sqrt[n]{x^{2n}}$, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią. Często popełnianym błędem jest uznawanie, że **pierwiastek** i potęga wzajemnie się znoszą (redukują) i rozważane wyrażenie jest równe x . Powyższe przykłady pokazują, że to nieprawda. W rzeczywistości rozważane wyrażenie jest równe wartości bezwzględnej z x , czyli $\sqrt[n]{x^{2n}} = |x|$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x . Natomiast $(\sqrt[n]{x})^{2n} = x$, ale ta równość zachodzi tylko i wyłącznie dla $x \geq 0$.

Własność: Własności pierwiastkowania

Dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b oraz liczby naturalnej n większej od 1 zachodzą równości:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ o ile } b \neq 0$$

Przykład 6

$$\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{125} = \sqrt[4]{5 \cdot 125} = \sqrt[4]{625} = 5$$

$$\frac{\sqrt[5]{729}}{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[5]{\frac{729}{3}} = \sqrt[5]{243} = 3$$

$$\sqrt[6]{192} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 3} = \sqrt[6]{2^6} \cdot \sqrt[6]{3} = 2\sqrt[6]{3}$$

Przykład 7

Korzystając z własności pierwiastkowania, usuniemy niewymierności z mianowników następujących ułamków:

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{8}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2 \cdot 8}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt[5]{9}} = \frac{1}{\sqrt[5]{9}} \cdot \frac{\sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{27}} = \frac{\sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{9 \cdot 27}} = \frac{\sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{9 \cdot 27}} = \frac{\sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{\sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{\sqrt[5]{27}}{3}$$

Zwróć uwagę na kolejność wykonywania działań w wyrażeniach typu $\sqrt[n]{a^n + b^n}$.

Pierwiastkowanie nie jest rozdzielne względem dodawania, więc powyższe wyrażenie nie jest równe wyrażeniu $\sqrt[n]{a^n} + \sqrt[n]{b^n}$.

Rozważmy $\sqrt[4]{2^4 + 3^4}$.

Poprawne obliczenie wygląda następująco $\sqrt[4]{2^4 + 3^4} = \sqrt[4]{16 + 81} = \sqrt[4]{97}$.

Ponadto $\sqrt[4]{2^4} + \sqrt[4]{3^4} = 2 + 3 = 5$, co oczywiście nie jest równe poprawnie obliczonej wartości, czyli liczbie $\sqrt[4]{97}$.

Przykład 8

Aby dodać pierwiastki $\sqrt[4]{48} + \sqrt[4]{243}$, możemy postąpić następująco:

$$\sqrt[4]{48} + \sqrt[4]{243} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} + \sqrt[4]{81 \cdot 3} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3} + 3\sqrt[4]{3} = 5\sqrt[4]{3}.$$

Przypomnijmy jeszcze, że dla $a \geq 0$ i liczb naturalnych n większych od 1 zachodzi równość:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Słownik

pierwiastek stopnia n z liczby nieujemnej

pierwiastkiem stopnia n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$) z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b , której potęga o wykładniku n jest równa a , czyli:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n, \text{ dla } a \geq 0, b \geq 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

dziedzina wyrażenia algebraicznego

zbiór tych i tylko tych liczb, dla których dane wyrażenie ma sens

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Ułóż domino łącząc w pary wyrażenia o równych wartościach.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DmnjtCTFU>

Polecenie 2

Zaplanuj i wykonaj domino złożone z sześciu kostek, na których znajdują się wyrażenia zawierające pierwiastki z liczb nieujemnych. Stworzone domino daj do ułożenia koledze lub koleżance z klasy.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oblicz wartości podanych pierwiastków. Wyniki wpisz w wyznaczonych miejscach. Dla oddzielenia rzędu jednostek od rzędu części dziesiętnych użyj przecinka.

Pierwiastek	Wynik
$\sqrt[4]{0,0001}$	
$\sqrt[4]{1296}$	
$\sqrt[4]{625}$	
$\sqrt[5]{243}$	
$\sqrt[5]{1024}$	
$\sqrt[6]{0,000729}$	
$\sqrt[6]{729}$	
$\sqrt[7]{0,0000128}$	
$\sqrt[8]{256}$	
$\sqrt[10]{1024}$	

Ćwiczenie 2



Połącz w pary równe liczby.

$$\sqrt[4]{2\frac{46}{625}}$$

$$1\frac{2}{5}$$

$$\sqrt[4]{6\frac{346}{625}}$$

$$1\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[6]{5\frac{451}{729}}$$

$$1\frac{3}{4}$$

$$\sqrt[5]{12\frac{209}{243}}$$

$$1\frac{1}{4}$$

$$\sqrt[6]{11\frac{25}{64}}$$

$$1\frac{4}{5}$$

$$\sqrt[5]{3\frac{53}{1024}}$$

$$1\frac{3}{5}$$

$$\sqrt[4]{9\frac{97}{256}}$$

$$1\frac{1}{5}$$

$$\sqrt[4]{10\frac{311}{625}}$$

$$1\frac{1}{3}$$

$$\sqrt[4]{3\frac{526}{625}}$$

$$1\frac{2}{3}$$

Ćwiczenie 3



Rozwiąż test. Wskaż poprawną odpowiedź.

Zbiór wszystkich liczb x , dla których wyrażenie $\sqrt[4]{-x}$ ma sens liczbowy, definiuje warunek:

☐ $x < 0$

☐ $x \leq 0$

☐ $x \geq 0$

Zbiór wszystkich liczb x , dla których wyrażenie $\sqrt[6]{x-2}$ ma sens liczbowy, definiuje warunek:

☐ $x \leq 2$

☐ $x \geq -2$

☐ $x \geq 2$

Zbiór wszystkich liczb x , dla których wyrażenie $\sqrt[8]{2-x}$ ma sens liczbowy, definiuje warunek:

☐ $x \geq -2$

☐ $x \leq 2$

☐ $x \geq 2$

Zbiór wszystkich liczb x , dla których wyrażenie $\sqrt[10]{x+2}$ ma sens liczbowy, definiuje warunek:

☐ $x \leq -2$

☐ $x \geq 2$

☐ $x \geq -2$

Zbiór wszystkich liczb x , dla których wyrażenie $\sqrt[12]{-x-2}$ ma sens liczbowy, definiuje warunek:

☐ $x \geq -2$

☐ $x \leq -2$

☐ $x \geq 2$

Ćwiczenie 4



Połącz w pary liczby równe.

$\sqrt[4]{48}$

$2\sqrt[4]{2}$

$\sqrt[6]{128}$

$2\sqrt[4]{3}$

$\sqrt[6]{192}$

$3\sqrt[4]{2}$

$\sqrt[5]{96}$

$2\sqrt[6]{2}$

$\sqrt[6]{1458}$

$2\sqrt[5]{2}$

$\sqrt[4]{162}$

$3\sqrt[6]{2}$

$\sqrt[5]{486}$

$3\sqrt[5]{3}$

$\sqrt[5]{64}$

$3\sqrt[4]{3}$

$\sqrt[5]{729}$

$3\sqrt[5]{2}$

$\sqrt[4]{243}$

$2\sqrt[6]{3}$

$\sqrt[4]{32}$

$2\sqrt[5]{3}$

Ćwiczenie 5



Oblicz stosując własności działań na pierwiastkach. Przeciągnij odpowiedni wynik do drugiej kolumny.

$\sqrt[4]{81 \cdot 16}$, $\sqrt[4]{216} \cdot \sqrt[4]{6}$, $\sqrt[4]{243} : \sqrt[4]{3}$, $\sqrt[4]{81:625}$, $\sqrt[5]{-3125 \cdot (-1024)}$, $\sqrt[5]{\frac{32}{3125}}$, $\sqrt[6]{\frac{729}{64}}$, $\sqrt[6]{81} \cdot \sqrt[6]{9}$,
0, 8, 0, 2, 0, 9, 1, 7, 1, 3, 2, 5, 22, 4, 8, 10

Pierwiastek	Wynik
$\sqrt[4]{81 \cdot 16}$	
$\sqrt[4]{216} \cdot \sqrt[4]{6}$	
$\sqrt[4]{243} : \sqrt[4]{3}$	
$\sqrt[4]{81:625}$	
$\sqrt[5]{-3125 \cdot (-1024)}$	
$\sqrt[5]{\frac{32}{3125}}$	
$\sqrt[6]{\frac{729}{64}}$	
$\sqrt[6]{81} \cdot \sqrt[6]{9}$	

Ćwiczenie 6



Sprowadź do najprostszej postaci:

a) $\frac{\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{1250}}$,

b) $\frac{\sqrt[4]{0,0016} + \sqrt[6]{1}}{\sqrt[4]{0,0625} - \sqrt[3]{0,027}}$.

Ćwiczenie 7



Usuń niewymierność z mianownika ułamka. Połącz w pary liczby równe.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$$

$$\frac{\sqrt[5]{2}}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{4}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{8}}$$

$$\frac{\sqrt[5]{16}}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{8}}$$

$$\sqrt[4]{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt[4]{2}}$$

$$\frac{\sqrt[5]{4}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{16}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$$

$$\sqrt[5]{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{16}}$$

$$\sqrt[5]{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

$$\sqrt[5]{4}$$

$$\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$$

$$\sqrt[4]{8}$$

Ćwiczenie 8



Rozwiąż test. Wskaż poprawną odpowiedź.

Zbiór wszystkich liczb x , dla których wyrażenie $\frac{1}{\sqrt[4]{-x}}$ ma sens liczbowy, definiuje warunek:

☐ $x \leq 0$

☐ $x < 0$

☐ $x \geq 0$

Zbiór wszystkich liczb x , dla których wyrażenie $\frac{4}{\sqrt[4]{x+3}}$ ma sens liczbowy, definiuje warunek:

☐ $x \geq -3$

☐ $x > -3$

☐ $x \leq -3$

Zbiór wszystkich liczb x , dla których wyrażenie $\frac{x}{\sqrt[6]{-5-x}}$ ma sens liczbowy, definiuje warunek:

☐ $x > -5$

☐ $x < -5$

☐ $x \geq -5$

Zbiór wszystkich liczb x , dla których wyrażenie $\frac{x+3}{\sqrt[8]{x-7}}$ ma sens liczbowy, definiuje warunek:

☐ $x \geq 7$

☐ $x > 7$

☐ $x < 7$

Ćwiczenie 9



Zbiór wszystkich liczb x , dla których wyrażenie $\frac{\sqrt[10]{x-1}}{\sqrt[12]{2-x}}$ ma sens liczbowy, jest określony przez warunek

☐ $1 < x < 2$

☐ $1 \leq x \leq 2$

☐ $1 \leq x < 2$

☐ $1 < x \leq 2$

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pierwiastek z liczby nieujemnej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- Zastosuje definicję pierwiastka z liczby nieujemnej;
- zastosuje własności pierwiastkowania;
- usunie niewymierność z mianownika ułamka.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Pierwiastek z liczby nieujemnej” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Gra edukacyjna”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3–5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6–8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak...”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Pierwiastek z liczby nieujemnej”).

Materiały pomocnicze:

- [Własności pierwiastków](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Gra edukacyjna” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Pierwiastek z liczby nieujemnej”.