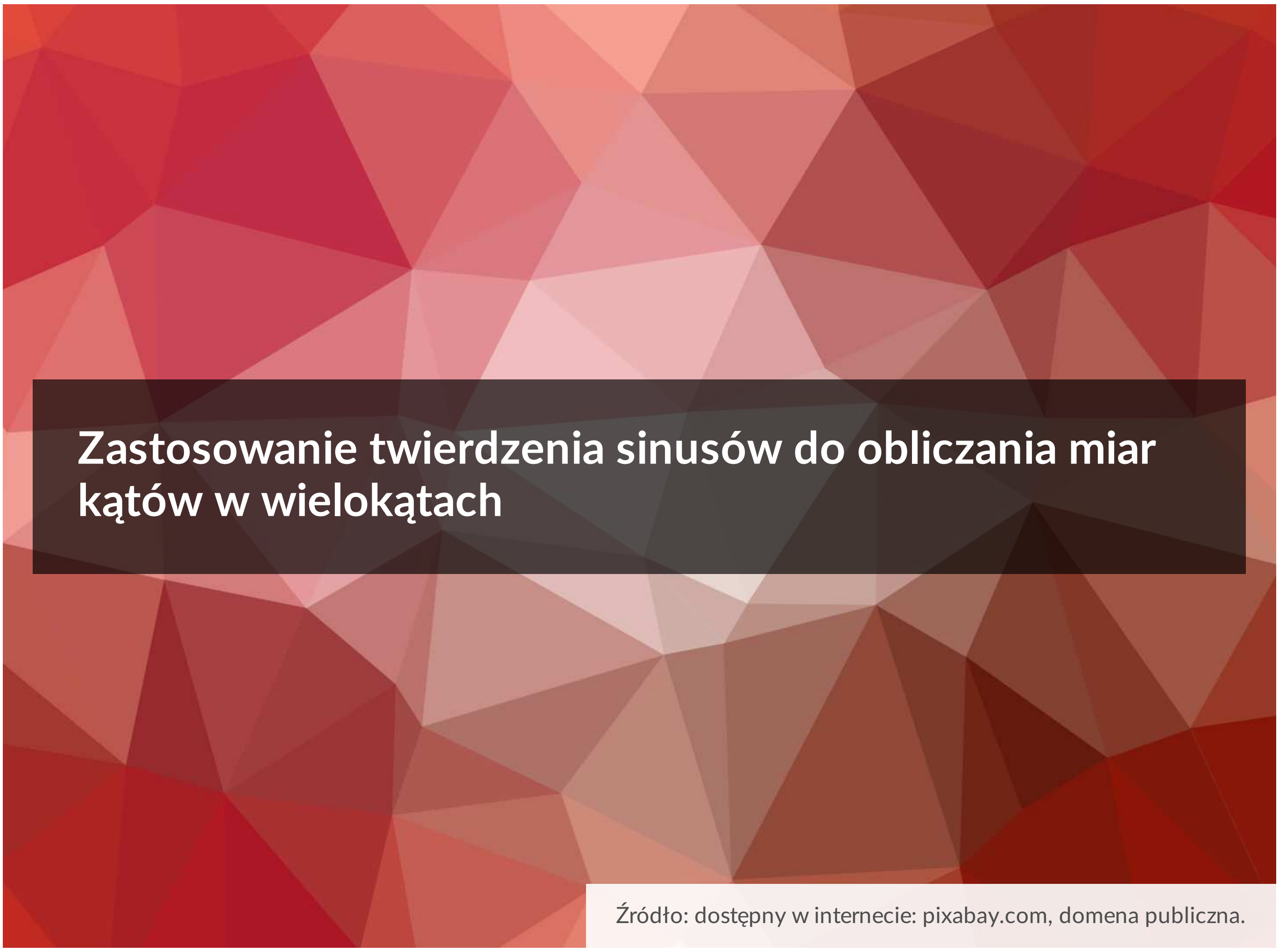
Zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczania miar kątów w wielokątach

Zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczania miar kątów w wielokątach



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Pod pojęciem rozwiązywania trójkątów mieści się niemal wszystko, co dotyczy związków miarowych w danym trójkącie. Tym samym, rozwiązując trójkąt obliczamy długości boków, które nie są podane i wyznaczamy miary jego kątów. Ale pod tym pojęciem możemy rozumieć także obliczanie długości promieni okręgów opisanego i wpisanego w ten trójkąt, czy wyznaczanie jego pola. W celu rozwiązania trójkąta posługujemy się znanymi „narzędziami”, np. twierdzeniem Snelliusa, Carnota, a także mniej znanymi, np. twierdzeniem Regiomontana. Przez fakt, iż każdy wielokąt można poddać triangulacji, czyli podziałowi na trójkąty, te same reguły (twierdzenia) stosuje się do badania związków miarowych także w wielokątach, które nie są trójkątami. Nie chemy jeszcze korzystać z wielu narzędzi geometrycznych, np. z twierdzenia cosinusów, ale już samo twierdzenie sinusów „pozwala na wiele”. Tym razem uwagę skoncentrujemy na badaniu miar kątów.

Twoje cele

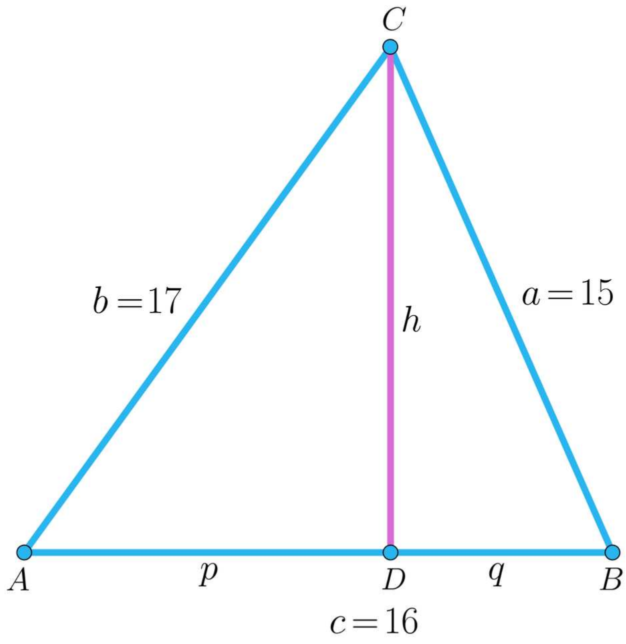
- Wyznaczysz miary kątów trójkąta o danych bokach.
- Zbadasz zależności między bokami i kątami w trójkącie z zastosowaniem twierdzenia sinusów.
- Wyznaczysz przybliżone miary kątów w trójkącie z zastosowaniem tablic funkcji trygonometrycznych.

Przeczytaj

Trzy boki jednoznacznie wyznaczają trójkąt, co jest treścią jednej z cech przystawania trójkątów. Tym samym jednoznacznie wyznaczone są wszystkie kąty trójkąta o danych bokach. Ale jak wyznaczyć ich miary, korzystając tylko z elementarnych metod i ewentualnie twierdzenia sinusów? Okazuje się, że można, choć czeka nas nieco pracy.

Przykład 1

Dany jest trójkąt, którego boki mają długości: 15, 16, 17. Naszym zadaniem będzie wyznaczenie miar kątów tego trójkąta. Na początek przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa odpowiednio dla trójkątów ADC i BDC mamy $p^2 + h^2 = 17^2$ oraz $q^2 + h^2 = 15^2$. Wiemy także, że $p + q = 16$. Z pierwszych dwóch równań, eliminując niewiadomą h, otrzymujemy, że $15^2 - q^2 = 17^2 - p^2$. Podstawiając teraz, że $q = 16 - p$, mamy $15^2 - (16 - p)^2 = 17^2 - p^2$. Upraszczając ostatnie równanie dostajemy, że $32p = 320$. Stąd: $p = 10$, $q = 6$, $h = \sqrt{189}$. Zatem $\sin\alpha = \frac{\sqrt{189}}{17} \approx 0,8087$ oraz $\sin\beta = \frac{\sqrt{189}}{15} \approx 0,9165$. Przybliżone miary kątów są równe: $\alpha = 54^\circ$, $\beta = 66^\circ$ oraz $\gamma = 60^\circ$.

Czy twierdzenie sinusów jest nam niezbędne?

Zagadnienie opisane w Przykładzie 1. pokazuje, że potrafimy wiele dokonać bez osiągnięcia Snelliusa, któremu przypisuje się sformułowanie twierdzenia sinusów. Ale nie jest trudno wskazać prosty model, w którym zastosowanie tego twierdzenia istotnie ułatwia rozwiązanie problemu, choć jak zobaczymy, dalej nie będzie niezbędne.

Przykład 2

Rozważmy trójkąt, którego dwa boki mają długości: $|AB| = 6$, $|AC| = 8$, a kąt leżący między tymi bokami ma miarę 60°. Te informacje w sposób jednoznaczny wyznaczają trójkąt, o czym mówi cecha *kbk* przystawania trójkątów. Przypuśćmy jednak, że znamy także długość trzeciego boku tego trójkąta i jest ona równa $|BC| = 2\sqrt{13}$. Naszym zadaniem jest wyznaczenie miar pozostałych kątów tego trójkąta.

Na wstępie zauważmy, że mając trzy dane boki trójkąta, moglibyśmy postąpić analogicznie do sposobu zastosowanego w Przykładzie 1., czyli rozwiązać układ trzech równań z trzema niewiadomymi, w którym dwa równania są stopnia drugiego. Znów uniknęlibyśmy stosowania twierdzenia sinusów, ale byłoby to nieracjonalne, bo jak za moment zobaczymy, twierdzenie sinusów „od razu" rozwiązuje nasz problem. Mamy bowiem $\frac{|BC|}{\sin 60^\circ} = \frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{|AB|}{\sin\gamma}$. Stąd $\sin\beta = \frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{39}}{13} \approx 0,9608$ i $\beta \approx 74^\circ$ oraz $\sin\gamma = \frac{6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{39}}{26} \approx 0,7206$ i $\gamma \approx 46^\circ$. Tym samym rozwiązanie problemu sprowadziło się do podstawienia wielkości do wzoru Snelliusa, krótko i elegancko.

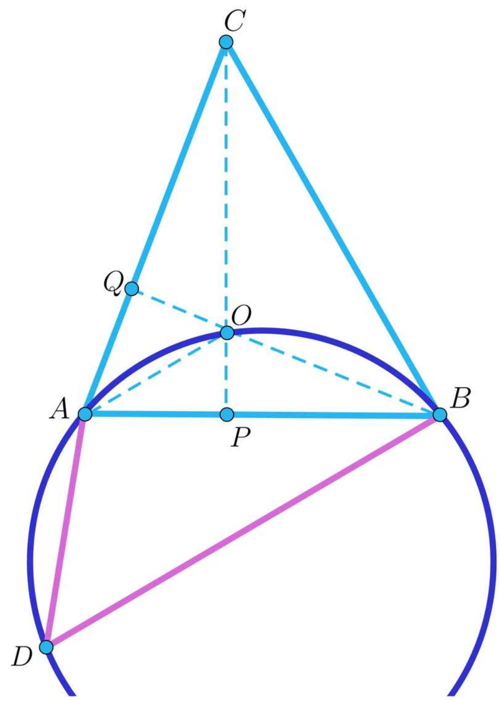
A teraz coś dla czworokąta.

Przykład 3

Punkt O jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC, w którym $|\measuredangle ABC| = 60^\circ$, $|AB| = 10$, $|AC| = 6\sqrt{3}$. Na trójkącie ABO opisano okrąg. Odcinek AO jest krótszą podstawą trapezu $ADBO$ wpisanego w okrąg. Oblicz miary kątów tego trapezu.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku. Punkty P i Q są spodkami odpowiednich wysokości.



Oznaczmy kąty przy wierzchołkach A, B, C odpowiednio przez α, β, γ. Wtedy $\frac{|AB|}{\sin\gamma} = \frac{|AC|}{\sin\beta}$. Stąd $\sin\gamma = \frac{|AB|\cdot\sin\beta}{|AC|} = \frac{10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{6\sqrt{3}} = \frac{5}{6}$. Oznacza to, że $\gamma \approx 56^\circ$. Z bilansu kątów w trójkącie otrzymujemy, że $\alpha \approx 64^\circ$. Pozostaje zauważyć, że przy przyjętych oznaczeniach, kąt AOB ma miarę $|\measuredangle AOB| = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta$ i jest to kąt rozwarty trapezu równoramiennego (co wynika z faktu, że jest on wpisany w okrąg). Zatem kąt rozwarty ma miarę w przybliżeniu równą 124°, a kąt ostry tego trapezu ma miarę 56°.

Słownik

cechy przystawania trójkątów

cechy przystawania trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, by dwa trójkąty były przystające; najczęściej mówi się o cechach: *bbb* (bok-bok-bok), *bkb* (bok-kąt-bok); *kbk* (kąt-bok-kąt)

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką porządkującą schematy rozwiązywania trójkątów.

Polecenie 2

Wyznacz miary kątów trójkąta mając dane długości trzech jego boków: $a = 6$, $b = 7$, $c = 8$.

Polecenie 3

Wyznacz miary kątów trójkąta mając dane długości dwóch jego boków i miarę kąta między tymi bokami: $a = 6$, $b = 7$, $\gamma = 45^{\circ}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Dany jest trapez $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Jego przekątna BD ma długość dwa razy krótszą niż każdy z promieni okręgów opisanych na trójkątach ABD i BCD. Wyznacz miary kątów trapezu.

Ćwiczenie 4

Punkt E jest środkiem boku AB prostokąta $ABCD$. Bok AB ma długość 48. Promień okręgu opisanego na trójkącie CDE jest równy 25, a środek tego okręgu leży na zewnątrz tego prostokąta. Wyznacz przybliżoną miarę kąta, pod jakim przecinają się przekątne prostokąta.

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym podzieliła jego przeciwprostokątną na odcinki o długości 3 i 6. Oblicz, z dokładnością do 1°, miary kątów ostrych tego trójkąta.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Temat: Zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczania miar kątów w wielokątach

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa II lub III

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria PP

2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;

5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$;

6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty)

VII. Trygonometria PR

5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- bada zależności między bokami i kątami w trójkącie i formułuje hipotezy dotyczące tych zależności
- stosuje twierdzenie sinusów do wyznaczania zależności miarowych w trójkącie

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel pyta uczniów, czy spotkali się z pojęciem rozwiązywania trójkątów. Prowadzi rozmowę, co należy rozumieć pod tym pojęciem. Wspomina o różnych twierdzeniach, które mogą być użyteczne i wyjaśnia, że na lekcji będzie się korzystać tylko z twierdzeń Pitagorasa i Snelliusa i z funkcji trygonometrycznych.
- Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie twierdzenia sinusów i cech przystawania trójkątów.
- Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1.Nauczyciel formułuje problem opisany w Przykładzie 1. i prosi o zaproponowanie strategii jego rozwiązania. Uczniowie pod kierunkiem nauczyciela budują układ równań i poznają sposoby jego rozwiązania.

2. Uczniowie, pracując w parach, wykorzystują Infografikę *Obliczanie miar kątów z zastosowaniem twierdzenia sinusów* i wykonują polecenia do niej dołączone. Nauczyciel informuje, że metody wykorzystujące twierdzenie Carnota okażą się niebawem jednym z podstawowych narzędzi w rozwiązywaniu trójkątów, ale na razie doskonali się umiejętność wykorzystania przede wszystkim twierdzenia sinusów i reguł poznanych wcześniej.

3. Nauczyciel formułuje problemy podane w kolejnych przykładach. Wskazane jest, by uczniowie mieli czas na samodzielne rozwiązanie Problemu 2. Następnie nauczyciel prosi, by uczniowie omówili metodę rozwiązania. Jeśli są tacy, którzy zbudowali układ równań, to

warto, by takie rozwiązanie pojawiło się na tablicy. Obok warto zapisać rozwiązanie z wykorzystaniem twierdzenia sinusów. Następnie nauczyciel prosi uczniów o krótką ocenę obu rozwiązań. Rozwiązując zadanie opisane w Przykładzie 3. Trzeba zbudować model (rysunek) danej sytuacji problemowej. Ważne, by to uczniowie byli autorami takiego modelu i by to oni wskazali strategię rozwiązania.

4. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

  Nauczyciel inicjuje dyskusję - czy twierdzenie sinusów jest narzędziem, które pozwala rozwiązać każdy trójkąt, by w ten sposób nawiązać do twierdzenia cosinusów, które winno być wprowadzone niebawem.

Praca domowa:

- Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

- Cechy podobieństwa trójkątów

Wskazówki metodyczne:

Infografikę można wykorzystać powtarzając materiał związany z rozwiązywaniem trójkątów.