Średnia geometryczna

Źródło: dostępny w internecie: pikrepo.com, domena publiczna.

W tym materiale poznamy średnią geometryczną. Średnia ta zaliczana jest do miar wartości przeciętnej, które wskazują wartość typową dla badanej populacji. Jest to miara mianowana, a jej miano jest takie samo, jak to, które posiadają dane, z których jest obliczona. Średnia geometryczna ma zastosowanie przede wszystkim wtedy, gdy mamy do czynienia z wielkościami zmieniającymi się w postępie geometrycznym. Z takimi zjawiskami można spotkać się na przykład w demografii, w badaniach dotyczących wzrostu lub spadku dochodu narodowego. W systemach elektronicznych częstotliwość środkowa, w optyce powłoka antyrefleksyjna, w filmie współczynnik kształtu – te wielkości również wyrażane są za pomocą średniej geometrycznej.

My skoncentrujemy się głównie na zastosowaniach matematycznych tej średniej.

Twoje cele

- Obliczysz średnią geometryczną danych liczb.
- Zinterpretujesz geometrycznie średnią geometryczną.
- Zastosujesz średnią geometryczną w obliczeniach z innych dziedzin wiedzy.

Przeczytaj

Rozważmy najpierw średnią geometryczną dwóch liczb.

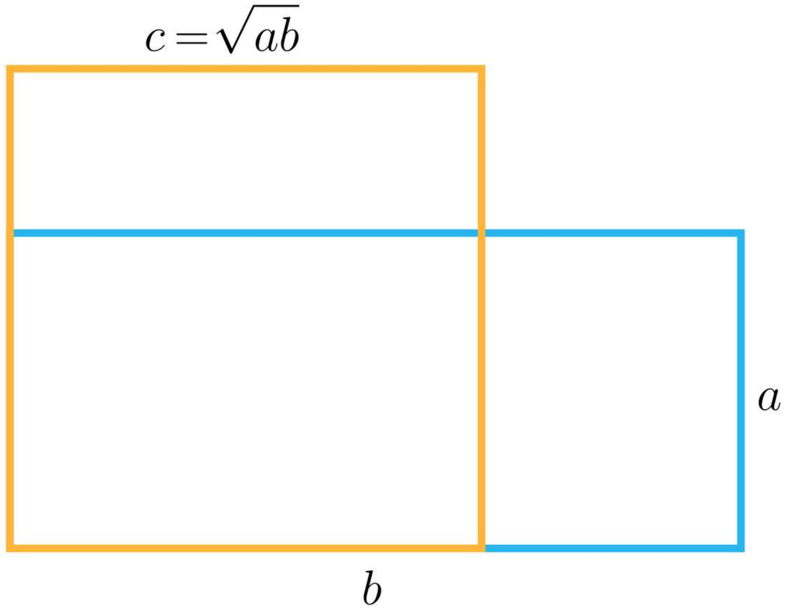
Definicja: Średnia geometryczna (średnia proporcjonalna) dwóch liczb

Średnią geometryczną dwóch liczb dodatnich a i b nazywamy taką liczbę dodatnią c, że

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b}.$$

Z definicji wynika, że $c^2 = ab$, zatem $c = \sqrt{ab}$.

Geometrycznie możemy określić średnią geometryczną jako długość boku kwadratu, którego pole jest równe polu prostokąta o bokach długości a i b.



Ważne!

Często w obliczeniach, szczególnie statystycznych, średnią geometryczną oznaczamy: $\bar{x}_g$ lub G.

Przykład 1

Obliczymy średnią geometryczną:

- liczb 4 i 16

  $\bar{x}_g = \sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{64} = 8,$

- liczb 2 i 3

  $\bar{x}_g = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}.$

Zauważmy, że średnia geometryczna może być liczbą wymierną dodatnią, bądź niewymierną dodatnią. Nie może być zerem, ani liczbą ujemną, gdyż zakładamy, że określamy średnią geometryczną tylko dla wartości dodatnich (w przeciwieństwie np. do średniej arytmetycznej).

Definicję średniej geometrycznej można uogólnić, na przypadek n liczb.

Definicja: Średnia geometryczna

Średnią geometryczną n liczb dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, gdzie $n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$ nazywamy liczbę

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

W przypadku trzech liczb a, b, c średnią geometryczną tych liczb można interpretować, jako długość krawędzi sześcianu, którego objętość jest równa objętości prostopadłościanu o długościach krawędzi a, b, c.

Przykład 2

Obliczymy średnią geometryczną:

- liczb 2, 2, 4, 16

  $\bar{x}_g = \sqrt[4]{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 16} = \sqrt[4]{256} = 4,$

- liczb 4, 5, 6, 10, 11, 13

  $\bar{x}_g = \sqrt[6]{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 13} = \sqrt[6]{171600} \approx 7,45.$

W przypadku odliczania średniej geometrycznej dużej liczby danych, obliczanie pierwiastków wyższych stopni może sprawiać kłopot, zatem wygodniej jest korzystać wtedy z postaci zlogarytmowanej tej średniej.

Na przykład jeśli liczby a, b, c są dodatnie i $c = \sqrt{ab}$ to

$$\log c = \log\left(\sqrt{ab}\right)$$

Z własności logarytmu potęgi i logarytmu iloczynu wynika, że

$$\log c = \frac{\log a + \log b}{2}$$

Zatem logarytm przekształca zależności zapisane za pomocą iloczynu w zależności zapisane za pomocą sumy. Zauważmy też, że liczby $\log a$, $\log b$, $\log c$ tworzą ciąg arytmetyczny.

Średnia geometryczna danych liczb dodatnich jest zawsze nie mniejsza od średniej harmonicznej tych liczb i nie większa od ich średniej arytmetycznej.

Twierdzenie: Nierówność między średnimi

Dla dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzą następujące zależności

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

Średnia geometryczna a ciąg geometryczny

Przypomnimy teraz zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Twierdzenie: Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego

Jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich, to każdy wyraz tego ciągu (za wyjątkiem wyrazu pierwszego i ostatniego – w przypadku ciągu skończonego) jest średnią geometryczną wyrazów z nim sąsiadujących.

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

dla $n = \{2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$.

Powyższą zależność można uogólnić:

Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich, a_n nie jest ani pierwszym wyrazem ciągu, ani ostatnim, to

$$a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$$

dla $n = \{2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$, $k = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ i $k < n$.

Przykład 3

Liczby dodatnie $x+4$, $2x$, $x-\frac{1}{5}$, w podanej kolejności, tworzą ciąg geometryczny. Znajdziemy wyrazy tego ciągu.

Liczby $x+4$, $2x$, $x-\frac{1}{5}$ są liczbami dodatnimi, czyli:

$x+4>0 \Rightarrow x>-4$ i $2x>0 \Rightarrow x>0$ i $x-\frac{1}{5}>0 \Rightarrow x>\frac{1}{5}$.

Zatem $x > \frac{1}{5}$.

Wiemy, że wyraz środkowy, czyli $2x$ jest średnią geometryczną wyrazów skrajnych, czyli:

$$2x = \sqrt{(x+4)\left(x-\frac{1}{5}\right)}$$

Obie strony zapisanej równości są dodatnie, więc możemy podnieść je do kwadratu i wykonać wskazane działania.

$$4x^2 = x^2 - \frac{1}{5}x + 4x - \frac{4}{5}$$

Otrzymane równanie kwadratowe sprowadzamy do postaci ogólnej i rozwiązujemy.

$3x^2 - \frac{19}{5}x + \frac{4}{5} = 0 \mid \cdot 5$

$15x^2 - 19x + 4 = 0$

$\Delta = 121$

$\sqrt{\Delta} = 11$

$x_1 = \frac{19-11}{30} = \frac{4}{15} > \frac{1}{5}$

$x_2 = \frac{19+11}{30} = 1 > \frac{1}{5}$

Obie uzyskane liczby są większe od $\frac{1}{5}$, więc spełniają warunki zadania. Istnieją więc dwa ciągi o własnościach podanych w treści zadania.

Dla $x_1 = \frac{4}{15}$ otrzymujemy:

$\frac{4}{15} + 4 = \frac{64}{15}$

$2 \cdot \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$

$\frac{4}{15} - \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

Dla $x_2 = 1$ otrzymujemy:

$1 + 4 = 5$

$2 \cdot 1 = 2$

$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Odpowiedź:

Istnieją dwa ciągi spełniające warunki zadania: $\left(\frac{64}{15},\ \frac{8}{15},\ \frac{1}{15}\right)$ i $\left(5,\ 2,\ \frac{4}{5}\right)$.

Przykład 4

Ciąg $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n)$ jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Wykażemy, że średnia geometryczna jego wszystkich wyrazów jest równa średniej geometrycznej wyrazu pierwszego i ostatniego.

Mamy wykazać, że $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$.

Oznaczmy:
q – iloraz ciągu.

Wyrazy ciągu są dodatnie, zatem $q > 0$.

Przekształcimy każdą ze stron dowodzonej równości, zapisując wyrazy ciągu za pomocą wyrazu pierwszego i ilorazu.

Zaczniemy od lewej strony.

$L = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}$

$L = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^2 \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot q^{n-1}}$

Korzystamy z własności iloczynu potęg o tych samych podstawach – wykładniki dodajemy.

$L = \sqrt[n]{{a_1}^n \cdot q^{1+2+3+\ldots+n-1}}$

Suma $1+2+3+\ldots+n-1$ to suma kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego, zatem

$1+2+3+\ldots+n-1 = \frac{1+n-1}{2} \cdot (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$

Otrzymujemy:

$L = \sqrt[n]{{a_1}^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$

Liczby a_1 i q są dodatnie, więc

$L = a_1 \cdot q^{\frac{n-1}{2}}$

Teraz pora na przekształcenie prawej strony dowodzonej równości.

$P = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$

$P = \sqrt{a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n-1}}$

$P = \sqrt{{a_1}^2 \cdot q^{n-1}}$

Zapisując pierwiastek w postaci potęgi o wykładniku ułamkowych, otrzymujemy

$P = \left({a_1}^2 \cdot q^{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

$P = a_1 \cdot q^{\frac{n-1}{2}}$

Zatem:

$P = L$, co kończy dowód.

Średnia geometryczna w statystyce

W statystyce średnia geometryczna znajduje zastosowanie przy badaniu średniego tempa zmian zjawisk, gdy zjawiska zmieniają się w ujęciu dynamicznym. Średnia geometryczna mówi o wzroście lub spadku wartości danej zmiennej w badanym okresie, co jest szczególnie przydatne przy analizie wyników inwestycyjnych. Średnią geometryczną często wtedy wyrażamy w procentach.

Przykład 5

Pan Kowalski zainwestował kwotę 100 zł. W trzech kolejnych latach kapitał zainwestowany osiągnął następujące wartości: 80 zł na koniec pierwszego roku, 50 zł na koniec drugiego roku, 90 zł na koniec trzeciego roku. Obliczymy średnią stopę zwrotu zainwestowanego kapitału na koniec rozważanego okresu.

Stopa zwrotu to wyrażony w procentach zwrot osiągnięty z inwestycji w danym roku w relacji do jej kosztu.

Aby obliczyć, czy inwestycja przynosi zysk czy straty w dłuższym okresie czasu, obliczamy średnią geometryczną tzw. indeksów. Indeks to miernik, który porządkuje wyniki pewnej liczby szczegółowych obserwacji, charakteryzuje zmiany w czasie. Indeks obliczymy jako iloraz kapitału w okresie n przez kapitał w okresie $n-1$.

Obliczenia zapiszemy w tabelce.

Okres	Wartość kapitału	Indeks
0	100	–
1	80	$\frac{80}{100}=0,8$
2	50	$\frac{50}{80}=0,625$
3	90	$\frac{90}{50}=1,8$
Iloczyn indeksów		$0,8\cdot 0,625\cdot 1,8=0,9$
Średnia geometryczna indeksów		$\sqrt[3]{0,9}\approx 0,9655$
Średnia stopa zwrotu (średnia geometryczna indeksów-1)		$0,9655-1=-0,0345$
Średnia stopa zwrotu wyrażona w procentach		$-3,45\%$

Odpowiedź:

Średnia stopa zwrotu to około $(-3,45\%)$.

Przykład 6

W tabelce przedstawione są dane na temat liczby posiadanych samochodów przez mieszkańców pewnego miasta, w latach 2017– 2020.

Rok	Liczba samochodów
2017	345010
2018	328000
2019	426800
2020	401364

Ustalimy średnie tempo zmian liczby samochodów w badanym okresie.

Najpierw ustalamy tempo zmian w dwóch kolejnych latach.

$\frac{328000}{345010} \approx 0,95$

$\frac{426800}{328000} \approx 1,30$

$\frac{401364}{426800} \approx 0,94$

Wyznaczamy średnią geometryczną znalezionych liczb.

$\bar{x}_g = \sqrt[3]{0{,}95 \cdot 1{,}30 \cdot 0{,}94} \approx 1,05$

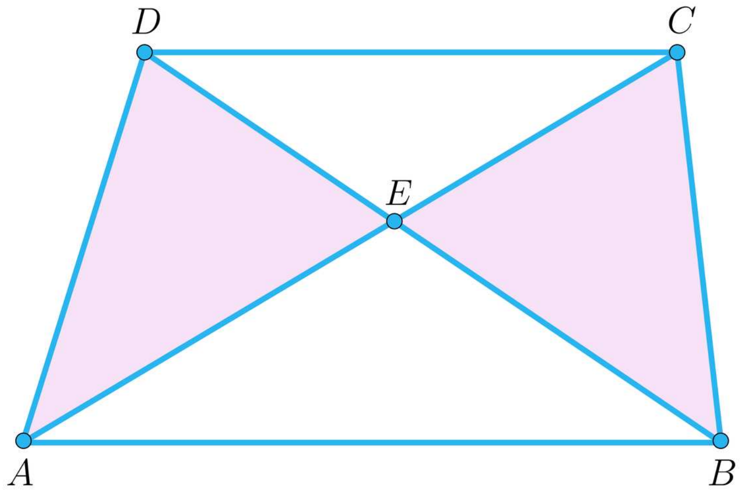
W badanym okresie średni przyrost liczby samochodów wyniósł $(1,05 - 1) \cdot 100\% = 5\%$
.

Zastosowanie geometryczne średniej geometrycznej

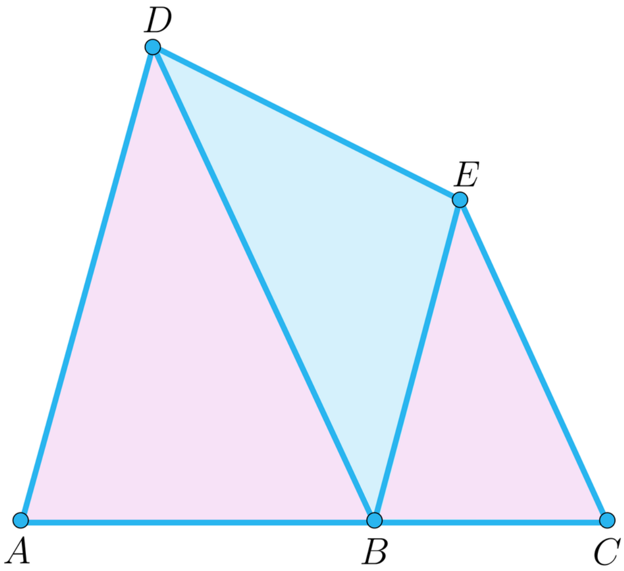
W wielu problemach geometrycznych pojawiają się zagadnienia, których rozwiązanie prowadzi do uzyskania średniej geometrycznej. Średnia geometryczna jest istotą złotego podziału, wykorzystuje się ją do przybliżonej konstrukcji kwadratury koła, czy konstrukcji siedemnastokąta foremnego.

Przykład 7

- Przekątne trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie E i dzielą trapez na cztery trójkąty takie, że $P_{\triangle AED} = P_{\triangle BEC}$ (patrz rysunek). Można udowodnić, że $P_{\triangle AED} = \sqrt{P_{\triangle ABE} \cdot P_{\triangle CDE}}$.



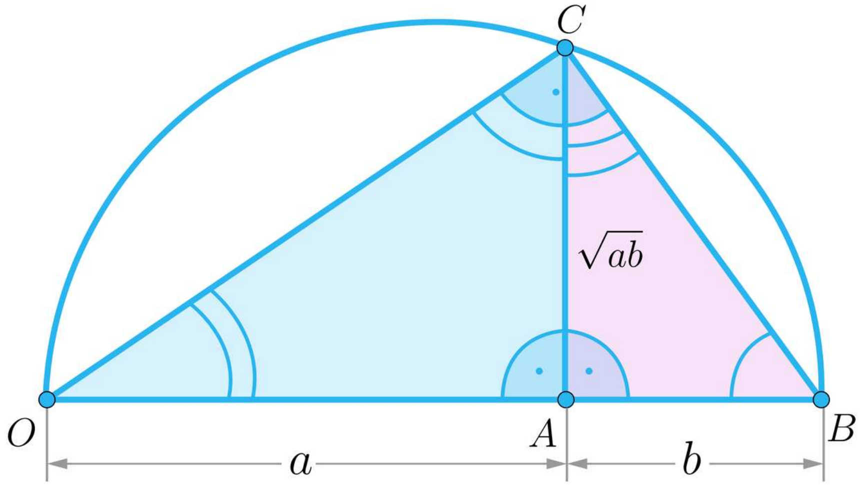
- Jeżeli w trójkątach ABD i BCE boki AD i BE są równoległe oraz boki BD i CE są równoległe (patrz rysunek), to $P_{\triangle BED} = \sqrt{P_{\triangle ABD} \cdot P_{\triangle BCE}}$.



Przykład 8

Dane są odcinki o długościach a i b. Skonstruujemy odcinek c, którego długość jest średnią geometryczną długości tych odcinków.

- Rysujemy prostą, na której odkładamy odcinki $|OA| = a$ i $|AB| = b$.
- Kreślimy półokrąg o średnicy OB.
- Przez punkt A prowadzimy prostą prostopadłą do prostej OB.
- Prosta ta przecina półokrąg w punkcie C.
- Odcinek $|CA| = \sqrt{ab} = c$.



Poprawność tej konstrukcji wynika z podobieństwa trójkątów OBC, OAC i CAB.

W trójkącie OBC kąt OCB jest prosty (jako kąt oparty na półokręgu), trójkąty OAC i CAB są również prostokątne i ich kąty ostre są odpowiednio równe.

Zatem:

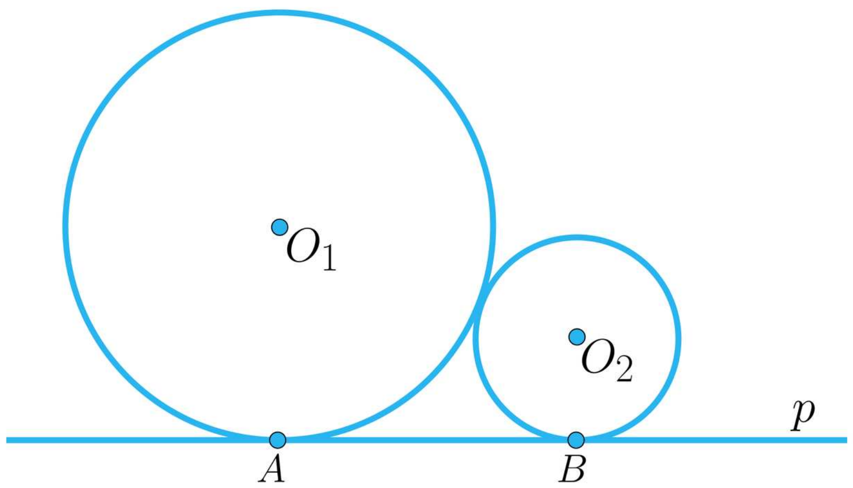
$\frac{|CA|}{a} = \frac{b}{|CA|}$

$|CA|^2 = ab$

$|CA| = \sqrt{ab}.$

Przykład 9

Okrąg o środku O_1 i średnicy a jest styczny zewnętrznie do okręgu o środku O_2 i średnicy b, przy czym $a > b$. Prosta p jest wspólną styczną do tych okręgów, odpowiednio w punktach A i B. Wykażemy, że $|AB| = \sqrt{ab}$.

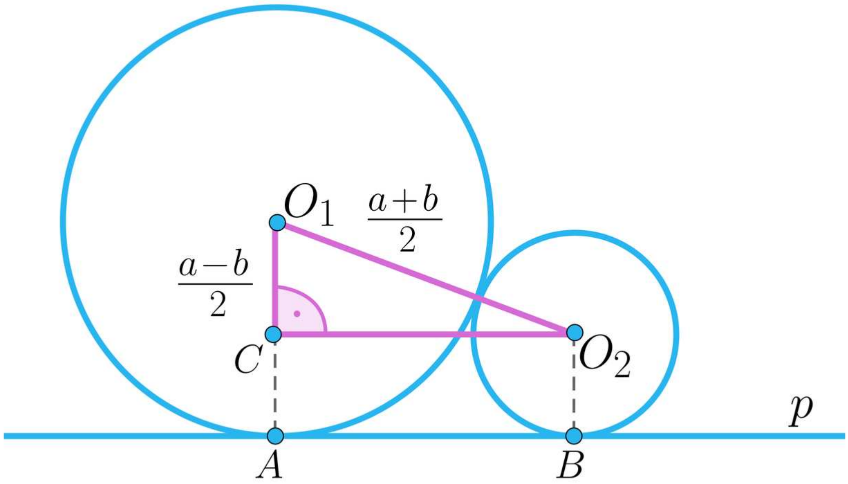


Rozwiązanie:

Ze środków danych okręgów poprowadźmy promienie do punktów styczności. Utworzone w ten sposób odcinki $|O_1A| = \frac{a}{2}$ i $|O_2B| = \frac{b}{2}$ są prostopadłe do prostej p (promień w punkcie styczności jest prostopadły do stycznej), są więc równoległe.

Utwórzmy trójkąt O_1CO_2 o boku CO_2 równoległym do prostej p i taki, że punkt C należy do O_1A.

Trójkąt ten jest trójkątem prostokątnym, w którym przyprostokątna $|O_1C| = \frac{a-b}{2}$ i przeciwprostokątna $|O_1O_2| = \frac{a+b}{2}$.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przyprostokątnej CO_2.

$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + |CO_2|^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$4|CO_2|^2 = \left(a^2 + 2ab + b^2\right) - \left(a^2 - 2ab + b^2\right)$

$4|CO_2|^2 = 4ab$

$|CO_2|^2 = ab$

Ponieważ $a > 0$, $b > 0$, jako promienie okręgów, stąd

$|CO_2| = \sqrt{ab}$.

Słownik

średnia geometryczna (średnia proporcjonalna) dwóch liczb

średnią geometryczną dwóch liczb dodatnich a i b nazywamy taką liczbę dodatnią c, że

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką. Najpierw samodzielnie spróbuj rozwiązać zapisany w infografice problem.

Polecenie 2

Przez pięć lat badano liczebność pewnego owada w wybranym siedlisku.

Uzyskano następujące dane: w pierwszym roku 20 sztuk owadów, w drugim roku 40 sztuk, w trzecim roku 20 sztuk w czwartym roku 20 sztuk, w piątym roku 80 sztuk. Oblicz średni współczynnik wzrostu populacji obserwowanego owada. Wynik zaokrąglij do części setnych.

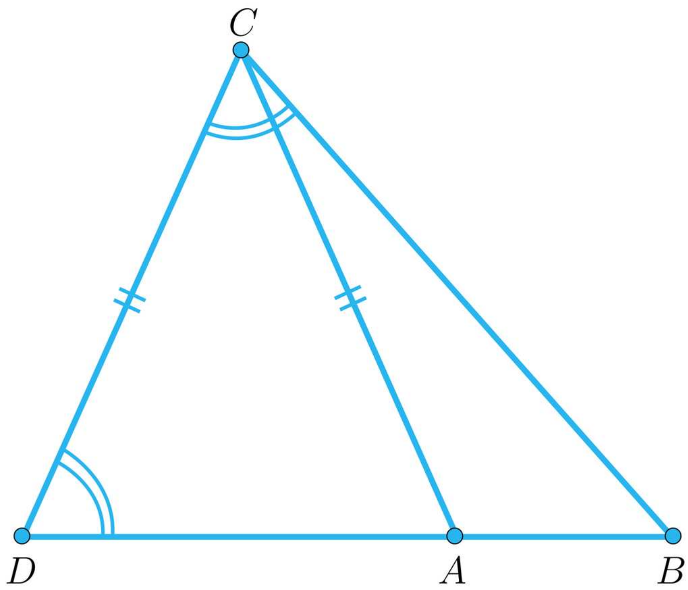
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Przedstawione na rysunku poniżej trójkąty równoramienne BCD i ACD są podobne. Co z tego wynika?



Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

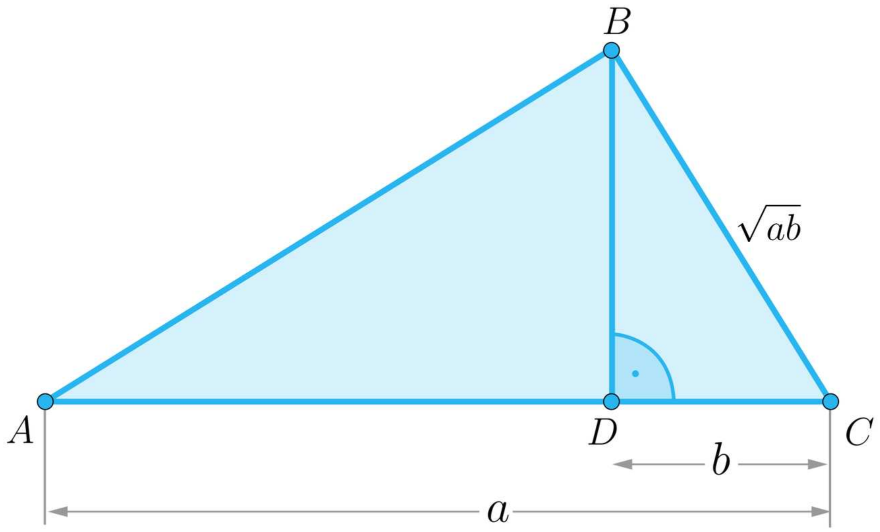
Roczny procentowy przyrost przychodów pewnego przedsiębiorstwa w kolejnych czterech latach wynosił: 2%, 20%, 50%, 5%. Oblicz średni przyrost dochodów w tym okresie. Skorzystaj ze średniej geometrycznej (wynik zaokrąglij do $0,01$), odpowiedź podaj w procentach.

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym, w którym przeciwprostokątna AC ma długość a. Odcinek BD jest wysokością tego trójkąta i $|DC| = b$. Wykaż, że $|BC| = \sqrt{ab}$.



Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Średnia geometryczna

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;

7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza średnią geometryczną danych liczb
- interpretuje geometrycznie średnią geometryczną
- stosuje średnią geometryczną w obliczeniach z innych dziedzin wiedzy

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- puzzle eksperckie

- skacząca żaba
- kot i mysz

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą „skaczącej żaby" przypominają uzyskane do tej pory wiadomości na temat ciągu geometrycznego i średnich (rozpoczyna przypominanie uczeń wskazany przez nauczyciela, który podaje jedną powtórzeniową informację i ustala długość skoku żaby, czyli np. – odpowiadają osoby oznaczone w dzienniku numerem podzielnym przez 3).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Praca w grupach metodą puzzli eksperckich. Poproszeni o to kilka dni wcześniej uczniowie, zapoznali się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj" i infografiką. Ich zadaniem jest przekazanie zdobytych informacji grupom, tak aby każdy uczeń potrafił rozwiązać analogiczne zadanie.
2. Uczniowie w parach, metodą kot i mysz, rozwiązują proponowane w materiale ćwiczenia interaktywne. Przy czym mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot, sprawdza ich poprawność – po 2 nieudanych próbach – kot „łapie mysz", która wypada z gry. Aby gra toczyła się dalej – teraz mysz staje się kotem i procedura się powtarza. Pracę uczniów nadzorują nadal eksperci. W razie wątpliwości prosząc o pomoc nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Podsumowaniem zajęć jest dyskusja – jakie umiejętności potrzebne są do sprawnego rozwiązywania zadań z wykorzystaniem średniej geometrycznej, jakie strategie są najbardziej przydatne.
2. Uczniowie – eksperci opowiadają o pracy grup, dzielą się swoimi spostrzeżeniami, zwracają uwagę na mocne i słabe strony pracy.

3. Uczniowie dokonują oceny koleżeńskiej partnerów/partnerki z zabawy – kot i mysz.
4. Nauczyciel dzieli się swoimi obserwacjami, zwracając szczególną uwagę na wiodącą rolę ekspertów i ich merytoryczne przygotowanie.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest poszukanie w dostępnych źródłach, informacji na temat jeszcze innych, niż pokazane na lekcji, zastosowań średniej geometrycznej.

Materiały pomocnicze:

Średnia geometryczna

Wskazówki metodyczne:

Z infografiką każdy uczeń może zapoznać się w domu i na jego podstawie przygotować jedno zadanie, które na lekcji da do rozwiązania koleżance lub koledze z ławki.