

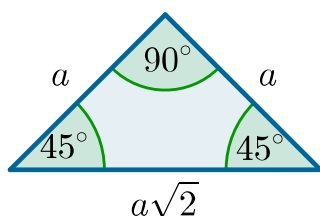


Szczególne trójkąty prostokątne

Szczególne trójkąty prostokątne

W tym materiale poznasz szczególne trójkąty prostokątne oraz dowiesz się jakie związki występują między długościami boków takich trójkątów. Rozwiązesz zadania dotyczące tego zagadnienia.

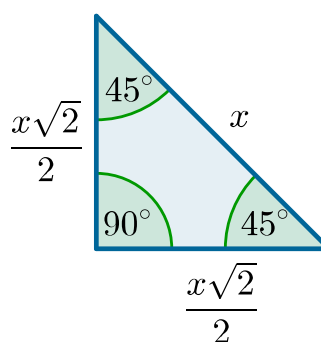
Trójkąt prostokątny równoramienny



a - długość przyprostokątnej

$a\sqrt{2}$ - długość przeciwprostokątnej

45° , 45° , 90° - miary kątów



$\frac{x\sqrt{2}}{2}$ - długość przyprostokątnej

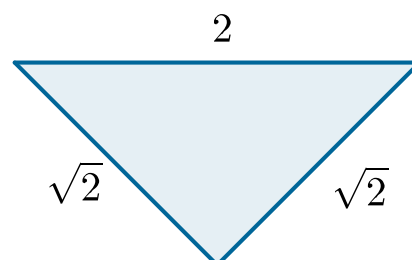
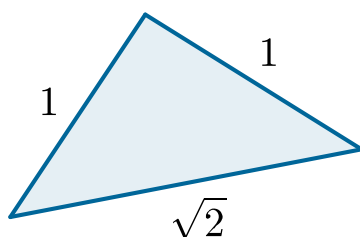
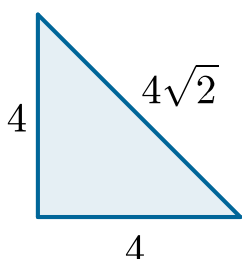
x - długość przeciwprostokątnej

45° , 45° , 90° - miary kątów

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

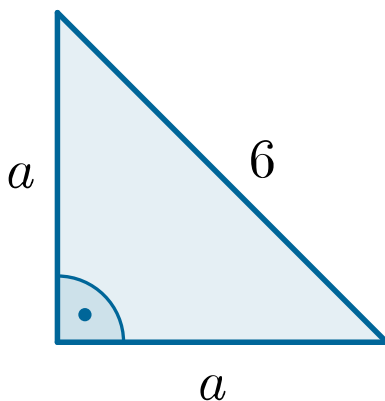
Aby podać długości boków w trójkącie prostokątnym równoramiennym, wystarczy znać długość tylko jednego z boków.

Trójkąty prostokątne równoramienne



Przykład 1

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego równoramiennego jest równa 6. Oblicz obwód L tego trójkąta. Wymierne przybliżenie obwodu podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W trójkącie równoramiennym przyprostokątne są równe. Oznaczmy przez a długość przyprostokątnej i zapiszmy równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa.

$$a^2 + a^2 = 6^2$$

$$2a^2 = 36 / : 2$$

$$a^2 = 18$$

$$a = \sqrt{18}.$$

Długość przyprostokątnej wyraża się liczbą niewymierną. Możemy w dalszych rozważaniach uwzględniać wartość dokładną: $\sqrt{18}$ lub $3\sqrt{2}$ (wylączając czynnik

przed znak pierwiastka) lub przybliżoną

$$\sqrt{18} = 4,2426 \dots \approx 4,24$$

$$3\sqrt{2} = 3 \cdot 1,414 \dots \approx 3 \cdot 1,41 = 4,23.$$

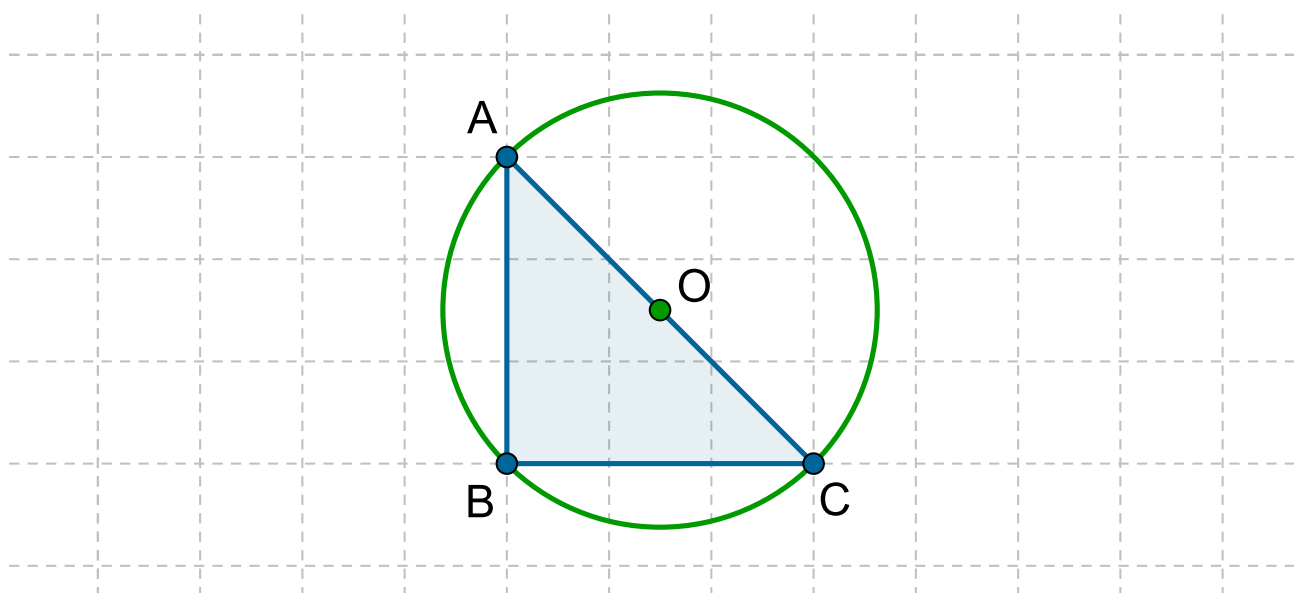
Obliczamy obwód trójkąta.

Sposób I	Sposób II
$L = \sqrt{18} + \sqrt{18} + 6$	$L = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6$
$L = 2\sqrt{18} + 6$	$L = 6\sqrt{2} + 6$
$L \approx 2 \cdot 4,24 + 6$	$L \approx 6 \cdot 1,41 + 6$
$L \approx 14,48$	$L \approx 14,46$

Obwód prostokąta jest równy w przybliżeniu 14,5.

Przykład 2

Obliczymy promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC , którego pole jest równe $4,5 \text{ cm}^2$.



Obliczymy długość przyprostokątnej, korzystając ze wzoru na pole trójkąta.

$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC|$, gdzie $|AB| = |BC|$

$$\frac{1}{2}|AB|^2 = 4,5$$

$$|AB|^2 = 9$$

$$|AB| = 3,$$

bo

$$|AB| > 0.$$

Promień okręgu opisanego na trójkącie jest równy połowie długości przeciwprostokątnej.

$$r = \frac{|AC|}{2}$$

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$$

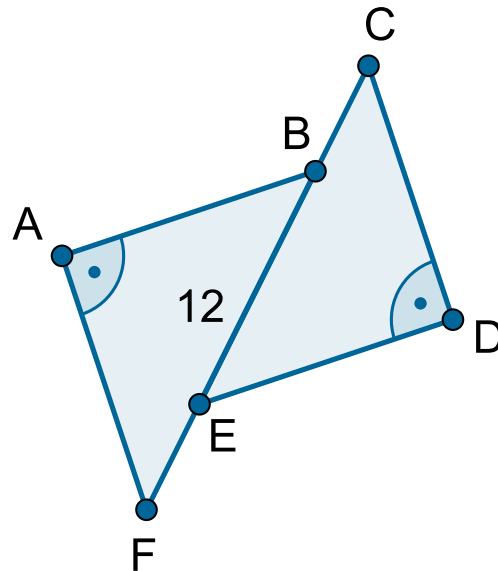
$$r = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$r = 1,5\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy $1,5\sqrt{2}$ cm.

Przykład 3

Sześciokąt $ABCDEF$ zbudowany jest z dwóch przystających równoramiennych trójkątów prostokątnych. Przeciwprostokątna w każdym z tych trójkątów ma długość 12. Stosunek długości odcinków EB do FE jest równy $2 : 1$. Obliczmy obwód wielokąta $ABCDEF$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Stosunek długości odcinków EB do FE jest równy $2 : 1$, zatem

- długość odcinka EB stanowi $\frac{2}{3}$ długości odcinka FB ,
- długość odcinka FE stanowi $\frac{1}{3}$ długości odcinka FB .

$$|EB| = \frac{2}{3} \cdot |FB|, |EB| = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$$

$$|EF| = \frac{1}{3} \cdot |FB|, |EF| = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4.$$

Oznaczmy przez a długość przyprostokątnej trójkąta ABF . Obliczamy a , korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$a^2 + a^2 = 12^2$$

$$2a^2 = 144$$

$$a^2 = 72$$

$$a = \sqrt{72}$$

$$a = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

Obliczamy obwód sześciokąta $ABCDEF$.

$$L = |AF| + |FE| + |ED| + |DC| + |BC| + |BA|$$

$$L = a + |EF| + a + a + (|EC| - |EB|) + a$$

$$L = 4a + 4 + (12 - 8)$$

$$L = 4 \cdot 6\sqrt{2} + 4 + 4$$

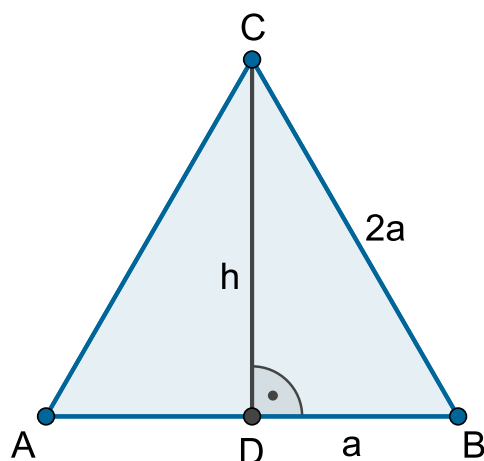
$$L = 4(6\sqrt{2} + 2).$$

Obwód sześciokąta jest równy $4(6\sqrt{2} + 2)$.

Trójkąt o kątach 30° , 60° , 90°

Przykład 4

Bok trójkąta równobocznego ABC ma długość $2a$. Obliczmy miary kątów i długości boków trójkąta CDB , gdzie punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W trójkącie równobocznym każdy kąt ma miarę równą 60° . Kąt ABC jest kątem w trójkącie równobocznym, zatem jego miara jest równa 60°

$$|\angle DBC| = 60^\circ.$$

Wysokość CD jest prostopadła do podstawy AB , zatem kąt CDB jest kątem prostym

$$|\angle CDB| = 90^\circ.$$

Wysokość w trójkącie równobocznym jest zarazem dwusieczną kąta, zatem kąt DCB ma miarę $60^\circ : 2 = 30^\circ$

$$|\angle DCB| = 30^\circ.$$

Miary kątów w trójkącie CDB są równe $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Trójkąt DBC jest trójkątem prostokątnym, w którym przeciwprostokątna ma długość $2a$.

Wysokość CD dzieli podstawę AB na dwa przystające odcinki

$$x = |DB| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2} \cdot 2a = a.$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość boku CD , czyli wysokość h trójkąta CDB

$$h^2 + a^2 = (2a)^2$$

$$h^2 = 4a^2 - a^2$$

$$h^2 = 3a^2$$

$$h = a\sqrt{3},$$

bo $a > 0$ i $h > 0$.

Boki trójkąta CDB mają długości: $2a, a, a\sqrt{3}$.

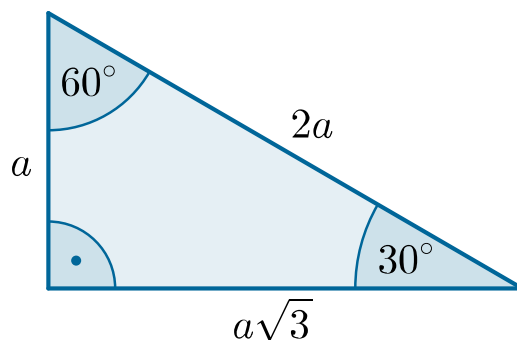
Wysokość dzieli trójkąt równoboczny na dwa przystające trójkąty prostokątne.

Miary kątów w każdym z tych trójkątów są równe: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Jeśli oznaczmy przez $2a$ długość przeciwprostokątnej w tak otrzymanym trójkącie prostokątnym, to długości pozostałych boków są równe a i $a\sqrt{3}$. Przy czym naprzeciw kąta o mierze 30° leży przyprostokątna, której długość jest dwukrotnie mniejsza od długości przeciwprostokątnej.

Ważne!

Trójkąt prostokątny o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

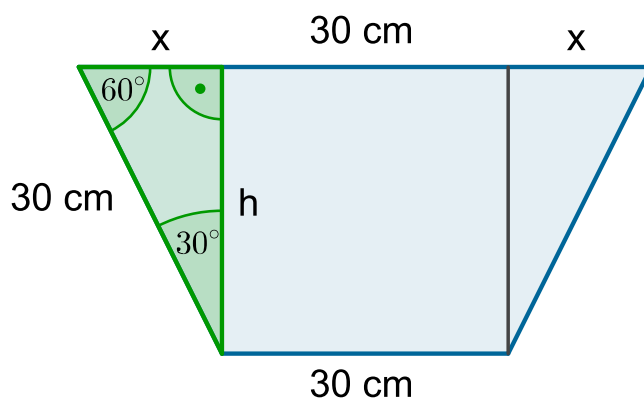
- $2a$ – długość przeciwprostokątnej,
- a – długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta 30° ,
- $a\sqrt{3}$ – długość przyprostokątnej leżącej przy kącie 30° .

Przykład 5

Torba wykonana jest z dwóch jednakowych kawałków skóry. Każdy z nich ma kształt trapezu równoramiennego, w którym ramię i krótsza podstawa mają długość 30 cm, a kąt rozwarty ma miarę 120° .

Ile cm^2 skóry zużyto na wykonanie tej torebki?

Obliczymy pole powierzchni jednego z kawałków skóry, z którego wykonana jest torebka, czyli pole odpowiedniego trapezu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wysokość poprowadzona z wierzchołka krótszej podstawy podzieliła trapez na czworokąt i trójkąt prostokątny o kątach 30° , 60° , 90° . Przeciwprostokątna w tym trójkącie ma długość 30 cm, zatem $x = 15$ cm (przyprostokątna leżąca naprzeciw kąta o mierze 30°) i $h = 15\sqrt{3}$ cm (przyprostokątna leżąca przy kącie o mierze 30°).

Zatem wysokość trapezu jest równa $15\sqrt{3}$ cm, a dłuższa podstawa ma długość

$$15 \text{ cm} + 30 \text{ cm} + 15 \text{ cm} = 60 \text{ cm}.$$

Obliczamy pole trapezu.

$$P = \frac{60 + 30}{2} \cdot 15\sqrt{3}$$

$$P = 675\sqrt{3}$$

$$P \approx 1170 \text{ cm}^2.$$

Obliczamy, ile cm^2 skóry zużyto, aby wykonać torebkę.

$$2 \cdot 1170 = 2340.$$

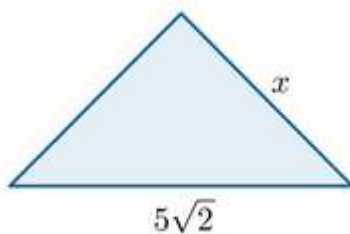
Na wykonanie torebki zużyto około 2340 cm^2 skóry.

Ćwiczenie 1



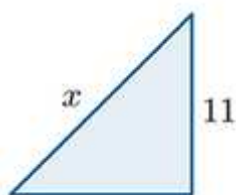
Trójkąty na rysunkach są prostokątne i równoramienne. Wyznacz x na każdym z poniższych rysunków.

a)



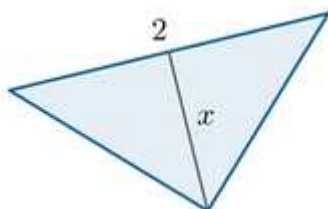
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

b)



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

c)



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Uzupełnij odpowiedzi, przeciągając w luki odpowiednie liczby.

- a) Na pierwszym rysunku długość x wynosi .
- b) Na drugim rysunku długość x wynosi .
- c) Na trzecim rysunku długość x wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Zaznacz prawidłowe dokończenie zdania. W trójkącie prostokątnym równoramiennym

- ☐ stosunek obwodu do długości przeciwprostokątnej jest równy $\sqrt{2}$.
- ☐ długość przynajmniej jednego z boków jest wyrażona liczbą niewymierną.
- ☐ przeciwprostokątna jest dwukrotnie dłuższa od przyprostokątnej.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Kąty trójkąta są równe 45° , 45° , 90° . Najdłuższy bok ma długość m . Oblicz sumę długości krótszych boków. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę i wybierz odpowiednie wyrażenia w odpowiedniej kolejności.

$$\frac{m}{\sqrt{2}} + \boxed{} = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny. Oblicz obwód L tego trójkąta w podanych przypadkach. Kliknij w luki, aby rozwinąć listę i wybierz odpowiednią liczbę.

- Kiedy przyprostokątna tego trójkąta ma długość 2, wtedy obwód tego trójkąta wynosi $4 +$.
- Kiedy przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość $\sqrt{72}$, wtedy obwód tego trójkąta wynosi $\sqrt{72} +$.
- Kiedy pole tego trójkąta jest równe 8, wtedy obwód tego trójkąta wynosi $8 +$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Czy istnieje trójkąt prostokątny równoramienny, którego długości boków wyrażają się liczbami naturalnymi? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ Tak, istnieje.

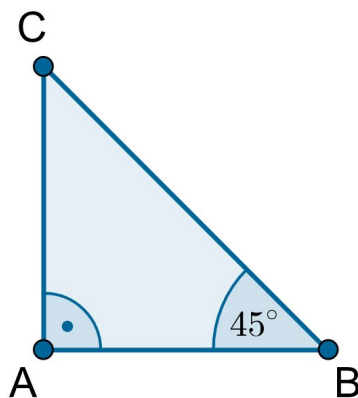
☐ Nie, nie istnieje.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Czy w poniższym trójkącie ABC bok BC jest najdłuższy?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wybierz poprawną odpowiedź.

- ☐ Tak, trójkąt jest prostokątny i BC jest jego przeciwprostokątną
- ☐ Tak, ponieważ trójkąt ma dwa równe kąty
- ☐ Nie, trójkąt jest prostokątny i BC jest jego przeciwprostokątną
- ☐ Nie, ponieważ trójkąt ma dwa równe kąty

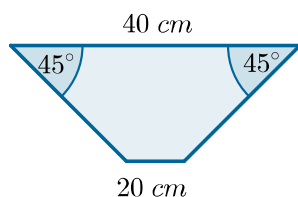
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

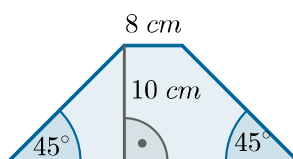


Zapoznaj się z poniższym rysunkiem, na którym znajdują się trzy trapezy.

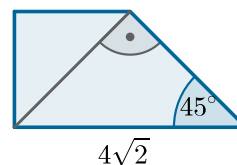
a)



b)



c)



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Uzupełnij obwody trapezów, wpisując w luki odpowiednie liczby.

a) $L = \boxed{} + \boxed{} \sqrt{2} \text{ (cm)}$

b) $L = \boxed{} + \boxed{} \sqrt{2} \text{ (cm)}$

c) $L = \boxed{} \sqrt{2} + \boxed{}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Miara kąta rozwartego równoległoboku jest równa 135° . Dłuższy bok jest równy 16 dm. Oblicz obwód równoległoboku, wiedząc, że jego wysokość opuszczona na dłuższy bok jest równa 2 dm. Uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w luki odpowiednie liczby.

Obwód tego równoległoboku wynosi $(\boxed{} + \boxed{} \sqrt{2}) \text{ dm}$.

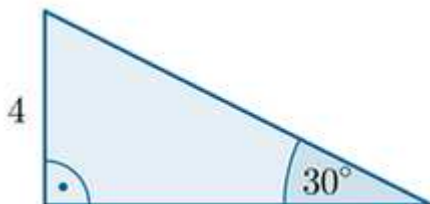
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



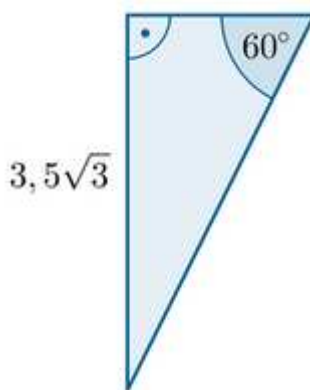
Zapoznaj się z poniższym rysunkiem, na którym znajdują się trzy trójkąty.

a)



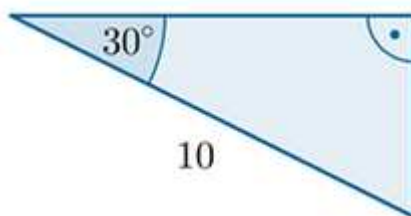
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

b)



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

c)



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Uzupełnij obwody trójkątów. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę i wybierz odpowiednią liczbę.

a) $L =$

b) $L =$

c) $L =$

$15 + 5\sqrt{3}$

$12 + 4\sqrt{3}$

$20 + 7\sqrt{3}$

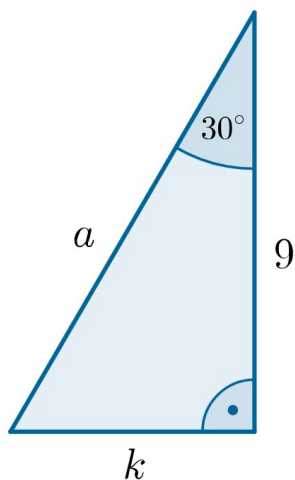
$10,5 + 3,5\sqrt{3}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Zapoznaj się z poniższym rysunkiem trójkąta.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oceń prawdziwość poniższych równości. Zaznacz wszystkie równości prawdziwe.

☐ $a - k = \sqrt{2}$

☐ $k = 3\sqrt{3}$

☐ $k = 3\sqrt{2}$

☐ $a = 18$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



W trójkącie prostokątnym stosunek miary kątów ostrych jest równy 2 : 1. Krótsza przyprostokątna ma długość 10. Oblicz obwód trójkąta. Uzupełnij zdanie, klikając w lukę, aby rozwinąć listę i wybierz odpowiednią liczbę.

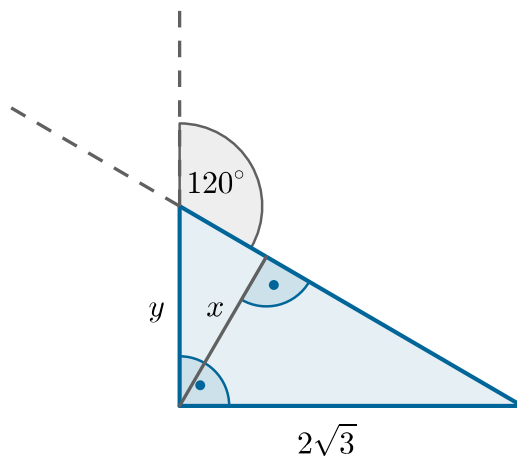
Obwód trójkąta wynosi + $\sqrt{3}$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Zapoznaj się z poniższym rysunkiem trójkąta.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznacz informację, którą można odczytać z rysunku.

☐ $x + y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

☐ $x + y = 2 + \sqrt{3}$

☐ $x + y = 2\sqrt{3}$

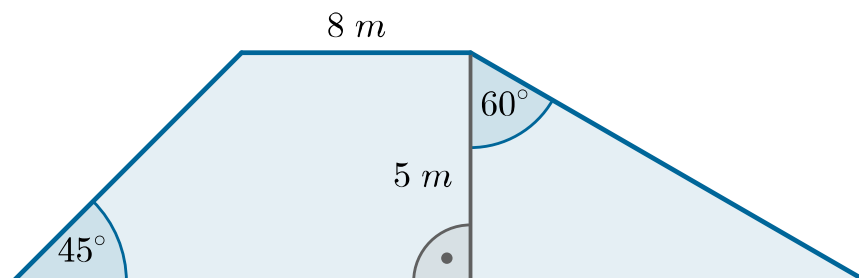
☐ $x + y = 4\sqrt{3}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Metalowy element ozdobny ma kształt trapezu przedstawionego na rysunku. Ile m^2 blachy potrzeba na jego wykonanie?



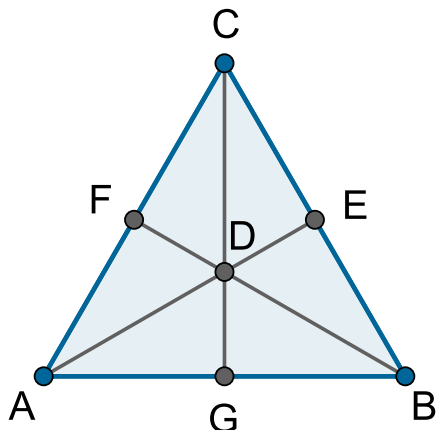
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Punkty E, F, G są środkami boków trójkąta równobocznego ABC . Punkt D jest punktem przecięcia środkowych boków tego trójkąta i $|DE| = 2$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Połącz w pary wielokąty z odpowiadającymi im obwodami.

trójkąt ABC

$$L = 3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

czworokąt $FDEC$

$$L = 6 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6 + 6\sqrt{3}$$

trójkąt EDB

$$L = 2 + 2 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{3}$$

trójkąt EAB

$$L = 2 + 4 + 2\sqrt{3} = 6 + 2\sqrt{3}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Szerokość prostokąta jest równa 4 dm. Znajdź sumę długości przekątnych tego prostokąta, wiedząc, że przecinają się one pod kątem 120° . Uzupełnij odpowiedź, wpisując w luki odpowiednie liczby.

Suma długości przekątnych wynosi dm + dm = dm.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Dany jest okrąg o środku w punkcie S i promieniu $3m$, gdzie m jest liczbą naturalną dodatnią. Z punktu P leżącego poza okręgiem poprowadzono styczne do okręgu, przecinające się pod kątem 120° . Ile wynosi długość odcinka SP ? Rozważ dwa przypadki.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Ćwiczenie 17



Przekątna prostokąta długości 8 cm jest nachylona do dłuższego boku pod kątem 30° . Oblicz pole i obwód tego prostokąta. Uzupełnij równości, klikając w lukę, aby rozwinąć listę i wybierz odpowiednią liczbę.

• $P = \boxed{} \text{ cm}^2$

• $L = \boxed{} \text{ cm}$

$16\sqrt{5}$

$16\sqrt{3}$

$(8 + 8\sqrt{5})$

$14\sqrt{3}$

$(4 + 4\sqrt{3})$

$(8 + 8\sqrt{3})$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Na trójkącie opisano okrąg o promieniu 7 dm. Oblicz trzy wysokości trójkąta, wiedząc, że miary kątów tego trójkąta są w stosunku 3 : 2 : 1. Uzupełnij równości, klikając w luki, aby rozwinąć listę i wybierz odpowiednią liczbę.

• $h_1 = \boxed{} \text{ dm}$

• $h_2 = \boxed{} \text{ dm}$

• $h_3 = \boxed{} \text{ dm}$

6

$8\sqrt{3}$

8

$7\sqrt{3}$

7

$4,5\sqrt{3}$

$2,5\sqrt{3}$

$6\sqrt{3}$

$3,5\sqrt{3}$

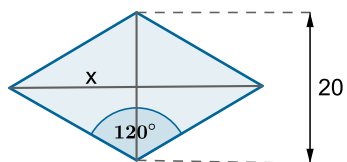
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19

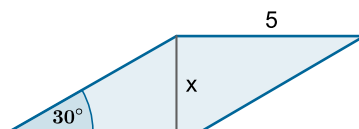


Zapoznaj się z poniższym rysunkiem i oblicz długość x w każdym rombie. Uzupełnij luki w zdaniach, wpisując odpowiednią liczbę.

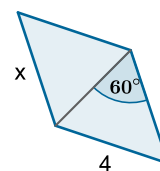
a)



b)



c)



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- W rombie A długość x wynosi $\sqrt{3}$.
- W rombie B długość x wynosi .
- W rombie C długość x wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.