

Dlaczego liczby bliźniacze nie są zaprzyjaźnione?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Dlaczego liczby bliźniacze nie są zaprzyjaźnione?

Źródło: Cortexd, <http://commons.wikimedia.org>, licencja: CC BY-SA 3.0.

Liczby pierwsze to liczby naturalne, które posiadają dwa dzielniki: liczbę 1 i samą siebie. W zbiorze liczb pierwszych nie ma liczby 1, gdyż jej własność mnożenia nie zmienia wartości liczby (każda liczba pomnożona przez 1 w iloczynie jest równa samej sobie, stąd można wielokrotnie pomnożyć przez 1 nie uzyskując żadnych zmian w wartości wyniku). Zatem liczby pierwsze to liczby: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... Czy jest ich skończona ilość?

Należałoby przypuszczać że nie, skoro liczb naturalnych jest nieskończenie wiele. Jak zatem można odnajdywać liczby pierwsze w zbiorze liczb naturalnych? Częstość ich występowania wydaje się być całkowicie przypadkowa.

Twoje cele

- Rozpoznasz (wskażesz) liczby pierwsze, bliźniacze, doskonałe, zaprzyjaźnione.
- Wykorzystasz informacje o poznanych rodzajach liczb do rozwiązywania zadań.

- Przeanalizujesz przeprowadzony dowód w zakresie istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych.
- Przetestujesz hipotezy w zakresie poznanych własności liczb.

Przeczytaj

Na pytania o własności [liczb pierwszych](#) próbowało odpowiedzieć wielu naukowców, a dziś komputery stosujące odpowiednie algorytmy wciąż poszukują coraz to większych liczb pierwszych. Aktualnie największą znaną liczbą pierwszą jest $2^{82\,589\,933} - 1$. Liczba ta ma 24862048 cyfr. Jej odkrycia dokonano **7 XII 2018 roku** na komputerze jednego z uczestników projektu GIMPS - **Patricka Laroche'a z Ocali w stanie Floryda**.



Stanisław Ulam

Źródło: Los Alamos National laboratory,
<http://commons.wikimedia.org>, domena publiczna.

Spirala Ulama lub spirala liczb pierwszych, to graficzna metoda ukazująca prawidłowości w rozkładzie liczb pierwszych, zaproponowana przez polskiego matematyka Stanisława Ulama w **1963 roku**. Spirala powstaje z zapisu kolejnych liczb naturalnych począwszy od 1, a potem spiralnie w kwadracie wpisywanych kolejnych liczb naturalnych. Stanisław Ulam oznaczając na niej jedynie [liczby pierwsze](#) zauważył, że występują one na liniach diagonalnych, czyli skośnych.

101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

Spiralę Ulama wykorzystują dziś programiści podejmując kolejne próby programowania algorytmów, które służyć mają wyszukiwaniu liczb pierwszych.

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Najbardziej znanym algorytmem, i jednym z najstarszych wykorzystywanych w poszukiwaniu liczb pierwszych, jest **Sito Erastotenesa**. Autorstwo tego algorytmu przypisuje się **Erastostenesowi z Cyreny**. Algorytm ten pozwala na wyznaczenie wszystkich liczb pierwszych, mniejszych od ustalonej liczby. Istotą algorytmu jest wykreślanie z listy kolejnych liczb naturalnych, tych liczb, które mają więcej niż dwa dzielniki. Dla przykładu rozpatrzmy kolejne liczby naturalne od 0 do 102.

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90
101	64	63	62	61	60	59	58	57	56	89
102	65	36	35	34	33	32	31	30	55	88
	66	37	16	15	14	13	12	29	54	87
	67	38	17	4	3	2	11	28	53	86
	68	39	18	5	0	1	10	27	52	85
	69	40	19	6	7	8	9	26	51	84
	70	41	20	21	22	23	24	25	50	83
	71	42	43	44	45	46	47	48	49	82
	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81

Wiemy że zero i jeden nie są liczbami pierwszymi oraz, że najmniejsza liczba pierwsza to 2. Zatem ze spirali skreślimy najpierw wszystkie liczby będące wielokrotnością 2 (oznaczone kolorem zielonym). Kolejną liczbą pierwszą jest 3, zatem wykreślamy te wielokrotności liczby 3, które jeszcze nie zostały wykreślone. Następnie wykreślamy wielokrotności liczb 5 i 7. W wyniku tej operacji wykreślenia w tabeli pozostają tylko liczby pierwsze (na białym tle).

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Funkcjonalność algorytmu Euklidesa maleje wraz ze wzrostem liczb pierwszych. Poszukiwanie coraz większych liczb pierwszych wymaga wykonania coraz większej liczby operacji, które również dla dzisiejszych komputerów stanowią wyzwanie. Stąd też wnioskując o pewnej równomierności rozkładu liczb pierwszych w zbiorze liczb naturalnych, wciąż jest trudno przewidzieć wartość kolejnej liczby pierwszej.

Twierdzenie Euklidesa: liczb pierwszych jest nieskończenie wiele

Chcąc udowodnić powyższe twierdzenie, wykorzystamy podstawowe twierdzenie arytmetyki:

Każda liczba naturalna większa od 1 jest albo liczbą pierwszą, albo da się ją jednoznacznie przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych.

Z powyższego twierdzenia wynika, że istnieje dokładnie jeden sposób, w jaki można przedstawić dowolną liczbę złożoną w postaci iloczynu liczb pierwszych. Np. $77 = 7 \cdot 11$, $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, itd. Tę własność wykorzystamy w dowodzie nie wprost, czyli wnioskowaniu prowadzącym do sprzeczności.

Zbiór jest nieskończony, jeśli zawiera więcej niż określoną liczbę k elementów, niezależnie od tego, jakie k wybierzemy. Załóżmy, że zbiór liczb pierwszych jest skończony i zawiera dokładnie q elementów, które oznaczmy symbolami $p_1, p_2, \dots, p_q$

Rozważmy teraz liczbę:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_q + 1.$$

Liczba P jest albo liczbą pierwszą, albo liczbą złożoną. Jeśli P jest liczbą złożoną, to dzieli się przez którąś z liczb pierwszych $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_q$. Zauważmy jednak, że w wyniku dzielenia P przez p_1 otrzymujemy resztę, a więc P nie dzieli się przez p_1 (bez reszty). Stosując analogiczne rozumowanie dla pozostałych liczb możemy pokazać, że P nie dzieli się przez żadną z wartości $p_1, p_2, \dots, p_q$, a w naszym założeniu są to liczby pierwsze. Wnioskując oznacza to, że P jest liczbą pierwszą różną od każdej z dotychczasowych liczb $p_1, p_2, \dots, p_q$, co stoi w sprzeczności z założeniem, że naszych liczb pierwszych jest skończona lista. Zbiór liczb pierwszych ma więc więcej niż q elementów, co kończy dowód.

Liczby Mersenne'a

Liczby Mersenne'a, to liczby, które mają postać $2^p - 1$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a ich nazwa pochodzi od Marina Mersenne'a (1588-1648), francuskiego mnicha franciszkanina i matematyka, który przypuszczał, że wśród liczb postaci $2^p - 1$ znajdują się prawie wszystkie liczby pierwsze (tzn. wszystkie poza ewentualną pewną skończoną ich liczbą). Mersenne twierdził też, że liczby $2^p - 1$ są pierwsze dla $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ i dla żadnych innych liczb naturalnych $p < 258$. Co wynikało z konieczności przeprowadzenia bardzo żmudnych i nie wolnych od błędów arytmetycznych obliczeń. Dziś już wiemy że popełnił pięć

błędów. Liczby pierwsze otrzymamy także dla $p = 61, 89$ i 107 , a dla $p = 67$ i 257 otrzymamy liczby złożone.

Liczby bliźniacze

Liczby pierwsze, różniące się o 2, zwane są bliźniaczymi. Liczby bliźniacze stanowią pary: 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19, 29 i 31, 41 i 43, ...

Największą znaną dziś parą liczb bliźniaczych są liczby: $260497545 \cdot 26625 + 1$ i $260497545 \cdot 26625 - 1$

Liczby doskonałe

Liczbę naturalną nazywamy doskonałą, gdy jest sumą wszystkich swoich dzielników właściwych (dzielnik właściwy liczby to każdy dzielnik mniejszy od samej liczby).

Liczbami doskonałymi są: 6, 28, 496, ponieważ:

dzielniki właściwe 6 to 1, 2, 3, zaś ich suma: $1 + 2 + 3 = 6$

dzielniki właściwe 28 to 1, 2, 4, 7, 14, suma: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$

dzielniki właściwe 496 to 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, suma:

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$

Nie dziwi fakt że dotychczas znaleziono tylko 39 liczb doskonałych, wszak obiekty doskonałe i piękne zawsze są rzadkie. Euklides zauważył, że liczby postaci $(2^p - 1)2^{p-1}$ są doskonałe, o ile $2^p - 1$ jest liczbą pierwszą.

Liczby zaprzyjaźnione

Pary liczb naturalnych o tej własności, że suma dzielników właściwych każdej z nich równa jest drugiej liczbie, to liczby zaprzyjaźnione. Zaprzyjaźniony duet to: 220 i 284, ponieważ suma dzielników właściwych

220 ($1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$) jest równa 284, a suma dzielników właściwych 284 ($1 + 2 + 4 + 71 + 142$) to 220.

Każda liczba doskonała jest zaprzyjaźniona ze sobą. Obecnie znanych jest blisko 8000 par liczb zaprzyjaźnionych, nie wiadomo jednak, czy istnieje ich nieskończenie wiele.

Hipoteza Goldbacha: każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych

W 1724 roku Christian Goldbach w liście do Leonharda Eulera, przedstawił hipotezę, że każdą liczbę naturalną większą od 2 można przedstawić za pomocą trzech liczb

pierwszych, gdzie liczby te mogą się powtórzyć (w tamtych czasach 1 uważano za liczbę pierwszą).

Euler uprościł tę hipotezę i przedstawił ją następująco:

„każda liczba naturalna parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych.”

A zatem:

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$

$$12 = 5 + 7$$

$$14 = 3 + 11 = 7 + 7$$

Pomimo, iż sformułował ją w rezultacie Euler, nazwa nie została zmieniona, i to właśnie tę hipotezę do dzisiaj nazywamy hipotezą Goldbacha. Dlaczego hipoteza? Gdyż do dnia dzisiejszego nie doczekała się formalnego matematycznego dowodu.

Słownik

liczby pierwsze

to liczby naturalne, które posiadają dwa dzielniki: liczbę 1 i samą siebie

Aplet

Polecenie 1

Zaobserwuj wskazania prostej, zmieniając wartości zawarte w suwaku. Co ilustrują punkty przedstawione na układzie współrzędnych? Jakich możesz wyciągnąć wnioski?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz liczby pierwsze.

1	☐	2	☐	3	☐	5	☐	9	☐	15	☐	19	☐	21	☐	23	☐
27	☐	57	☐	61	☐	63	☐	67	☐	71	☐	73	☐	78	☐		
83	☐	87	☐	91	☐	97	☐	101	☐	$2^{257} - 1$	☐	$2^{82589933} - 1$	☐				

Ćwiczenie 2



Zaznacz liczby złożone.

2	☐	9	☐	15	☐	19	☐	21	☐	23	☐	27	☐	57	☐	61	☐
		63	☐	67	☐	71	☐	73	☐	78	☐	83	☐	87	☐	91	☐
		97	☐	101	☐	$2^{257} - 1$	☐	$2^{127} - 1$	☐								

Ćwiczenie 3



Zaznacz poniższe liczby, według podanego klucza:

☐ doskonałe

☐ pozostałe

2	6	7	19	28	91	101	496	$3^3 + 1$	$2^{127} - 1$
---	---	---	----	----	----	-----	-----	-----------	---------------

Ćwiczenie 4



Podane pary liczb umieść w odpowiednich okienkach.

Pary liczb bliźniaczych

Pary, które nie są liczbami bliźniaczymi

5 i 7	2 i 5	31 i 35	3 i 5
21 i 29	17 i 19	11 i 13	
41 i 43	5 i 9	13 i 17	
29 i 31			

Ćwiczenie 5



Połącz w pary liczby zaprzyjaźnione.

1184	6232
496	2620
2924	496
6368	5564
5020	66992
66928	1210

Ćwiczenie 6



Wskaż liczby Mersennea odpowiadające poszczególnym liczbom pierwszym p .

$p = 2$	
$p = 3$	
$p = 5$	
$p = 7$	
$p = 13$	

2<sup>5</sup> + 1	3	13	2<sup>13</sup> - 1	11	7	7	7<sup>2</sup> - 1	1	31	127
--	--------------------------------	---------------------------------	---	---------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--	--------------------------------	---------------------------------	----------------------------------

Ćwiczenie 7



Wskaż zapisy, które mogą być ilustracją hipotezy Goldbacha.

10 = 3 + 7	12 = 3 + 7 + 2	26 = 3 + 5 + 5 + 13	
118 = 59 + 49	128 = 61 + 67	162 = 73 + 89	100 = 43 + 57

Ćwiczenie 8



Dopasuj odpowiedzi do poszczególnych stwierdzeń.

Liczby naturalne, które posiadają dwa dzielniki: liczbę 1 i samą siebie to

Najszybszy algorytm poszukiwania liczb pierwszych mniejszych lub równych zadanej wartości to:

Dokończ twierdzenie Euklidesa: Liczb pierwszych jest

Wnioskowanie prowadzące do sprzeczności to

Graficzna metoda ukazująca prawidłowości w rozkładzie liczb pierwszych to

Liczby pierwsze, których różnica jest równa 2, to

Liczby naturalne będące sumą wszystkich swoich dzielników właściwych to

Każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych, to

liczby bliźniacze

liczby pierwsze

Sito Erastotenesa

liczby doskonałe

nieskończenie wiele

dowód nie wprost

hipoteza Goldbacha

Spirala Ulama

Ćwiczenie 9



Określ, czy dane stwierdzenie jest prawdziwe, czy fałszywe.

	Prawda	Fałsz
Wielokrotności liczb pierwszych są liczbami pierwszymi	☐	☐
Każda liczba doskonała jest zaprzyjaźniona ze sobą	☐	☐
Każda liczba Mersenne'a jest liczbą pierwszą	☐	☐
Liczby postaci $(2^p - 1) \cdot 2^{p-1}$ są doskonałe, o ile $2^p - 1$ jest liczbą pierwszą	☐	☐
Spirala Ulama to algorytm do poszukiwania liczb pierwszych	☐	☐
Liczbami doskonałymi są: 6, 28, 496	☐	☐
Największa znana liczba pierwszą to $2^{82\,589\,933} + 1$	☐	☐
Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele	☐	☐
Liczby bliźniacze są liczbami pierwszymi	☐	☐

Ćwiczenie 10



Podjmij próbę odpowiedzi na pytanie zawarte w temacie dzisiejszych zajęć: Dlaczego liczby bliźniacze nie są zaprzyjaźnione?

Dla nauczyciela

Autor: Elżbieta Miterka

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dlaczego liczby bliźniacze nie są zaprzyjaźnione?

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż:

a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych,

b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje (wskazuje) liczby pierwsze, bliźniacze, doskonałe, zaprzyjaźnione.
- wykorzystuje informacje o poznanych rodzajach liczb do rozwiązywania zadań.
- analizuje przeprowadzony dowód w zakresie istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych.
- testuje hipotezy w zakresie poznanych własności liczb.

Strategie nauczania:

- lekcja odwrócona;
- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- kreatywna rozmowa z wykorzystaniem symulacji i ćwiczeń interaktywnych.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do internetu, słuchawki;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;

Przebieg zajęć:

Faza wstępna

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

2. Zajęcia przeprowadzane metodą lekcji odwróconej. Na wcześniejszej lekcji nauczyciel dzieli klasę na 4 grupy, których zadaniem jest przygotowanie prezentacji multimedialnych.

- grupa 1: Spirala Ulama i sito Erastotenesa.
- grupa 2: Twierdzenie Euklidesa: liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.
- grupa 3: Liczby Mersenne'a, bliźniacze, doskonałe i zaprzyjaźnione.
- grupa 4: Hipoteza Goldbacha: każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych.

Podczas przygotowywania prezentacji uczniowie wykorzystują e-materiały oraz źródła internetowe. Powinni uwzględnić przede wszystkim materiały wizualne. Prezentacje powinny zawierać jak najmniej tekstu – jej treść przedstawią uczniowie ustnie podczas zajęć. Każda prezentacja może trwać nie dłużej niż 5 minut.

Faza realizacyjna

1. Grupy przedstawiają swoje prezentacje – komentują materiały wizualne zawarte w prezentacji.

Po każdej prezentacji następuje runda pytań do prelegentów. Uczniowie mogą uzupełnić wtedy swoje notatki, poprosić o wyjaśnienie niezrozumiałych kwestii. Nauczyciel prosi też uczniów, o skomentowanie pracy kolegów i koleżanek: co w prezentacji im się podobało, a co można było przedstawić inaczej; czy mają jakieś rady dla autorów.

2. Uczniowie analizują dowód twierdzenia Euklidesa, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Następnie chętny/wybrany uczeń przeprowadza dowód na tablicy. Reszta klasy weryfikuje jego poprawność i w razie potrzeby uzupełnia informacje.

3. Praca w parach. Analiza danych w aplecie dotyczącym hipotezy Goldbacha: każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych. Uczniowie dyskutują, a następnie zapisują wnioski. W kolejnym kroku wybrane pary omawiają swoje opracowania na forum klasy i formułują wspólne wnioski.

4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca

1. Na zakończenie zajęć nauczyciel zadaje uczniom pytania:

- Co na zajęciach wydało wam się ważne i ciekawe?
- Co było łatwe, a co trudne?
- Jak możecie wykorzystać wiadomości i umiejętności, które dziś zdobyliście?

Chętni/wybrani uczniowie podsumowują zajęcia.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenie 11.

Materiały pomocnicze:

[Zastosowanie liczb pierwszych](#)

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimedium:

Aplet może posłużyć też jako inspiracja do przygotowania przez uczniów symulacji dla liczb dodatnich z przedziału $(50, 60)$.