



## Bryły obrotowe - stożek

Stożek - definicja. Ilustracja interaktywna: powstawanie stożka w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych. Ilustracja interaktywna: odcinki, kąty i przekroje w stożku. Wzory na pole powierzchni i objętość stożka. Animacja 3D: powstawanie siatki stożka. Animacja 3D: tworzenie stożka z siatki stożka.

Przykłady rozwiązań zadań na obliczanie pola powierzchni i objętości stożka. Prezentacje multimedialne: pole powierzchni całkowitej, objętość stożka.

Zestaw zadań na obliczanie pola powierzchni i objętości stożka. Zasób zawiera zadania interaktywne.

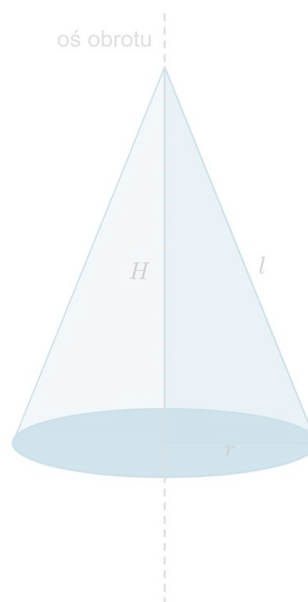
# Bryły obrotowe - stożek

## Definicja: Stożek

Stożek to bryła, która powstała w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych.

### Stożek

Stożek to bryła, która powstaje w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych.



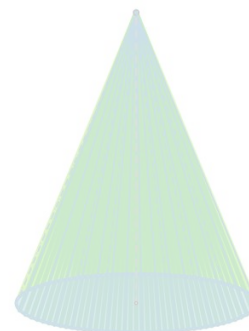
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PCtDj8hvt>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

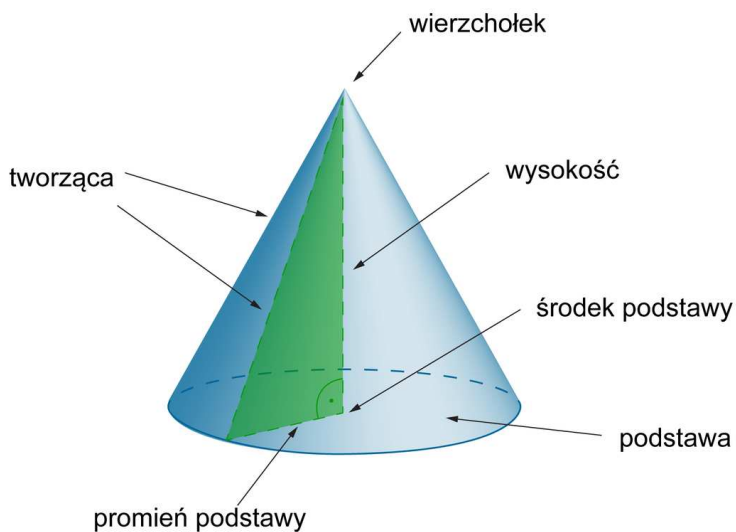
### Stożek

- |                                                                                  |                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> oś obrotu                                               | <input checked="" type="checkbox"/> tworząca stożka            |
| <input checked="" type="checkbox"/> podstawa stożka                              | <input checked="" type="checkbox"/> wysokość stożka            |
| <input type="checkbox"/> promień podstawy stożka                                 | <input checked="" type="checkbox"/> powierzchnia boczna stożka |
| <input type="checkbox"/> średnica stożka                                         | <input type="checkbox"/> przekrój osiowy stożka                |
| <input checked="" type="checkbox"/> wierzchołek stożka                           | <input type="checkbox"/> kąt rozwarcia stożka                  |
| <input type="checkbox"/> kąt nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy |                                                                |

Tworzącą stożka - jest każdy odcinek łączący wierzchołek stożka z punktem na krawędzi podstawy.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PCtDj8hvt>



### Zapamiętaj!

- Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe:

$$P_c = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l).$$

- Objętość stożka jest równa:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H.$$

Siatka stożka



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1WqKQ9hUnuUW>

Matematyka\_3D\_5010

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje stojące na drodze pachołki drogowe w kształcie stożka. Kreślone są krawędzie jednego pachołka - powstaje stożek, który następnie rozkłada się na siatkę stożka.

---

Siatka stożka



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RxNRDivwC7nHl>

Matematyka\_3D\_5011

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje siatkę stożka, która następnie składa się w stożek. Stożek zamienia się w pachołek drogowy. Na drodze stoją cztery pachołki.

---

### Przykład 1

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 cm i 9 cm obraca się wokół dłuższego boku. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość otrzymanego w ten sposób stożka.

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 cm i 9 cm obraca się wokół dłuższego boku. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość otrzymanego w ten sposób stożka.

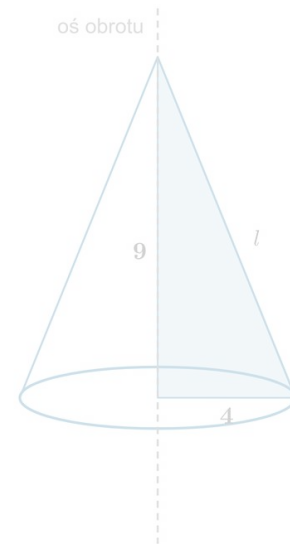
$$H = 9 \text{ cm}, \quad r = 4 \text{ cm}, \quad l = \sqrt{97} \text{ cm}$$

Wynika z tego, że objętość stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 9 = 48\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Pole powierzchni całkowitej jest równe

$$P_c = \pi r(r + l) = \pi \cdot 4(4 + \sqrt{97}) = 4\pi(4 + \sqrt{97}) \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PCtDj8hvt>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Przykład 2

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym, którego przeciwprostokątna jest równa 8 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej stożka.

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym, którego przeciwprostokątna jest równa 8 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej stożka.

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym. Przyprostokątne trójkąta są jednocześnie tworzącymi stożka. Wynika z tego, że przekrój osiowy jest trójkątem równoramiennym.

Przeciwprostokątna jest równa średnicy podstawy stożka.

Zatem  $8 = 2r$ , czyli  $r = 4$  cm.

Z własności trójkąta prostokątnego równoramiennego wynika, że

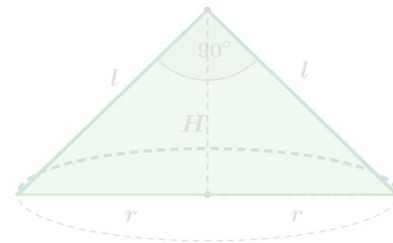
$$H = r = 4 \text{ cm} \quad \text{oraz} \quad l = r\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Objętość stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 4 = \frac{64}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

a pole powierzchni bocznej

$$P_b = \pi r l = \pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\pi\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PCtDj8hvt>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Przykład 3

Pole podstawy stożka jest równe  $48\pi \text{ cm}^2$ , a jego tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $\alpha$  takim, że  $\text{tg } \alpha = \frac{4}{7}$ . Oblicz objętość stożka.

krok 5 z 5


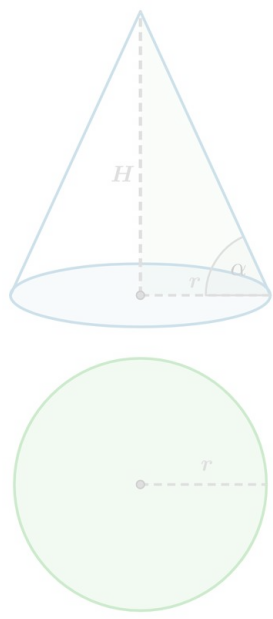
Pole podstawy stożka jest równe  $48\pi \text{ cm}^2$ , a jego tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $\alpha$ , takim, że  $\text{tg } \alpha = \frac{4}{7}$ . Oblicz objętość stożka.

Pole podstawy jest równe  $P_p = 48\pi \text{ cm}^2$ ,  
czyli  $\pi r^2 = 48\pi$ , zatem  $r = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$ .

Z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym otrzymujemy  
 $\text{tg } \alpha = \frac{H}{r}$ , czyli  $\frac{4}{7} = \frac{H}{4\sqrt{3}}$ .

Wynika z tego, że  $H = \frac{16\sqrt{3}}{7} \text{ (cm)}$ .

Obliczmy objętość stożka  
 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \pi (4\sqrt{3})^2 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{7} = \frac{768\sqrt{3}}{21} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$ .

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PCtDj8hvt>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

#### Przykład 4

Oblicz objętość stożka, którego powierzchnia boczna jest wycinkiem koła stanowiącym  $\frac{2}{3}$  koła o promieniu 9 cm.

krok 7 z 7


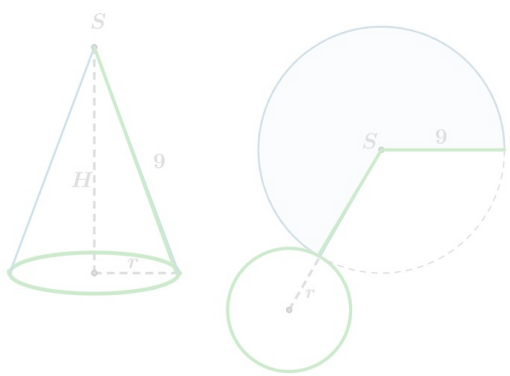
Oblicz objętość stożka, którego powierzchnia boczna jest wycinkiem koła stanowiącym  $\frac{2}{3}$  koła o promieniu 9 cm.

$r = 6 \text{ cm}$

Promień wycinka koła jest jednocześnie tworzącą stożka.

Z twierdzenia Pitagorasa obliczymy wysokość stożka:  
 $9^2 = 6^2 + H^2$ , czyli  $H = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ (cm)}$ .

Objętość stożka jest równa  
 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{5} = 36\pi\sqrt{5} \text{ (cm}^3\text{)}$ .

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/PCtDj8hvt>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 1



Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu  $48\sqrt{3} \text{ dm}^2$ . Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość tego stożka. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

$P_b = 94\pi \text{ dm}^2, V = 198\pi \text{ dm}^3$

$P_b = 98\pi \text{ dm}^2, V = 196\pi \text{ dm}^3$

$P_b = 92\pi \text{ dm}^2, V = 194\pi \text{ dm}^3$

$P_b = 96\pi \text{ dm}^2, V = 192\pi \text{ dm}^3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 2



Trójkąt o przeciwprostokątnej długości  $8\sqrt{3} \text{ cm}$  obrócono wokół prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych. Kąt rozwarcia otrzymanego w ten sposób stożka jest równy  $60^\circ$ . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

$V = 196\pi \text{ cm}^3, P_c = 142\pi \text{ cm}^2$

$V = 190\pi \text{ cm}^3, P_c = 140\pi \text{ cm}^2$

$V = 194\pi \text{ cm}^3, P_c = 148\pi \text{ cm}^2$

$V = 192\pi \text{ cm}^3, P_c = 144\pi \text{ cm}^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 3



Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyźnie jest półkolem o promieniu 14 cm. Oblicz objętość stożka. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

$V = \frac{334\sqrt{2}}{4}\pi \text{ cm}^3$

$V = \frac{343\sqrt{2}}{3}\pi \text{ cm}^3$

$V = \frac{334\sqrt{3}}{4}\pi \text{ cm}^3$

$V = \frac{343\sqrt{3}}{3}\pi \text{ cm}^3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 4



Koło o średnicy 24 cm podzielono na dwa wycinki koła w ten sposób, że jeden z nich stanowi  $\frac{1}{5}$  pola powierzchni drugiego. Z obu wycinków utworzono powierzchnie boczne stożków. Niech  $V_1$  oznacza objętość stożka utworzonego z większego wycinka,  $V_2$  - objętość stożka utworzonego z mniejszego wycinka. Wyznacz stosunek  $\frac{V_1}{V_2}$ . Uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Stosunek  $\frac{V_1}{V_2} =$

$\frac{5\sqrt{583}}{5}$

$\frac{5\sqrt{385}}{7}$

$\frac{5\sqrt{355}}{5}$

$\frac{5\sqrt{358}}{7}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



## Ćwiczenie 5



Podstawą stożka jest koło o polu  $12\pi \text{ cm}^2$ . Pole powierzchni bocznej jest 2 razy większe od pola podstawy. Oblicz sinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 6



Walec i stożek mają równe promienie podstawy  $r$  i wysokości  $H$ . Oblicz stosunek pola powierzchni bocznej walca do pola powierzchni bocznej stożka.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 7



Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 3 cm i 4 cm obraca się wokół przeciwprostokątnej. Oblicz objętość otrzymanej w ten sposób bryły. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

$V = \frac{46}{10}\pi \text{ cm}^3$

$V = \frac{48}{5}\pi \text{ cm}^3$

$V = \frac{42}{7}\pi \text{ cm}^3$

$V = \frac{44}{5}\pi \text{ cm}^3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8



Stożek o promieniu podstawy 2 cm i wysokości 8 cm przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy, przechodzącą przez środek wysokości stożka. Oblicz stosunek objętości brył, na jakie został podzielony stożek. Uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Stosunek objętości wynosi .

$\frac{1}{8}$

$\frac{1}{7}$

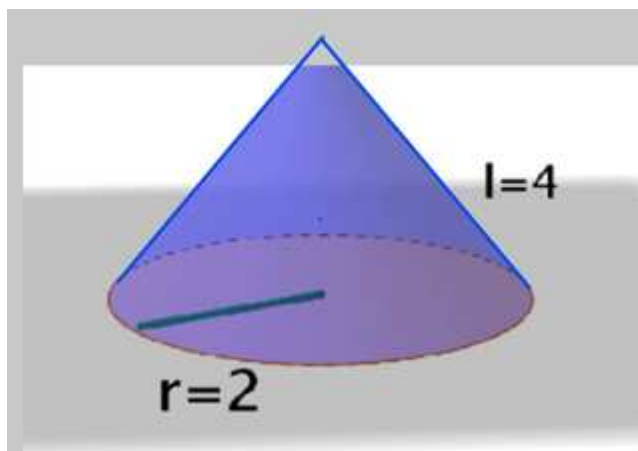
$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{6}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 9

Oblicz długość  $H$  wysokości stożka, objętość  $V$  oraz pole powierzchni całkowitej  $P_c$ .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przeciągnij w luki odpowiednie liczby.

$$H = \boxed{\phantom{00}} \boxed{\phantom{00}}$$
$$V = \boxed{\phantom{00}} \boxed{\phantom{00}} \pi$$
$$P_c = \boxed{\phantom{00}} \pi$$

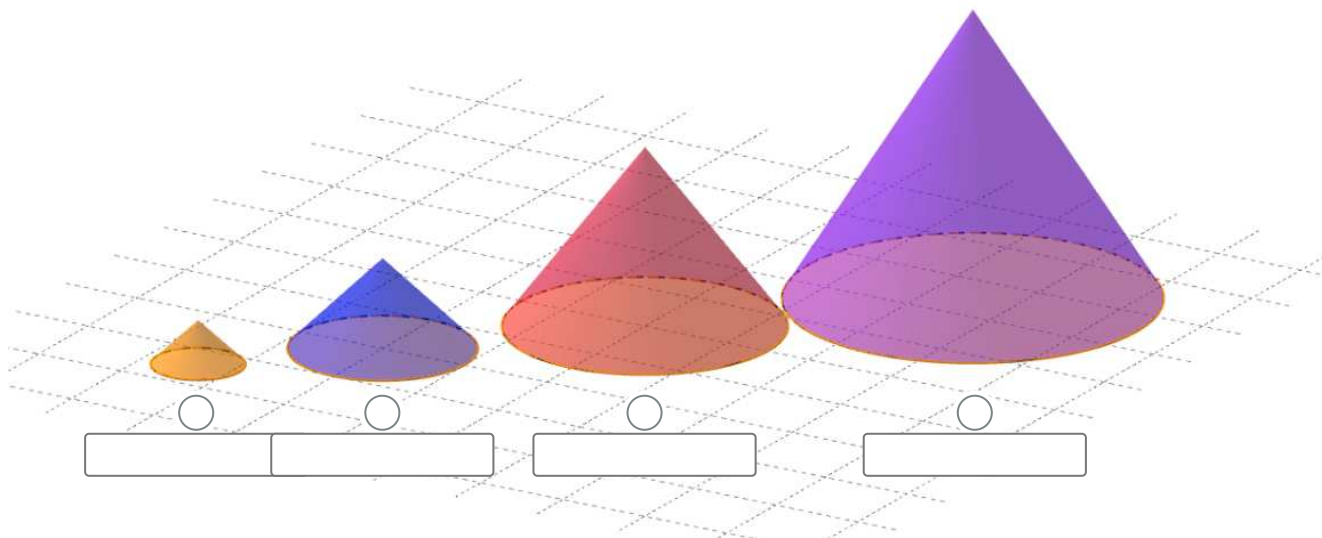
- 65   10    $\sqrt{4}$     $\sqrt{5}$     $\frac{12}{3}$     $\frac{4}{3}$    12   2    $\sqrt{3}$     $\sqrt{4}$    11    $\frac{8}{3}$     $\sqrt{5}$    18
- $\sqrt{3}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 10

Długość promienia podstawy i długość wysokości najmniejszego ze stożków wynosi 1 cm, a każdy kolejny stożek ma długość promienia podstawy i długość wysokości o 1 cm większą.

Przeciągnij i upuść objętości stożków.



$\frac{4}{3}\pi \text{ cm}^3$

$\frac{14}{3}\pi \text{ cm}^3$

$\frac{16}{3}\pi \text{ cm}^3$

$\frac{1}{3}\pi \text{ cm}^3$

$\frac{64}{3}\pi \text{ cm}^3$

$9\pi \text{ cm}^3$

$\pi \text{ cm}^3$

$\frac{17}{3}\pi \text{ cm}^3$

$\frac{8}{3}\pi \text{ cm}^3$

$\frac{10}{3}\pi \text{ cm}^3$

$\frac{2}{3}\pi \text{ cm}^3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.