



Bryły obrotowe - stożek

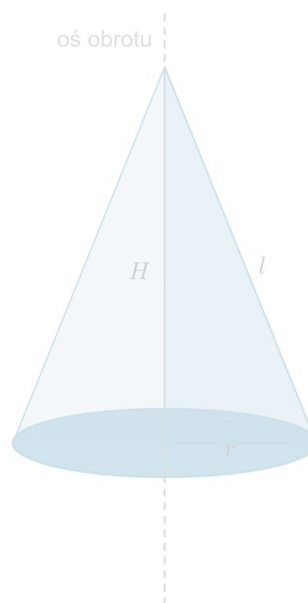
Bryły obrotowe - stożek

Definicja: Stożek

Stożek to bryła, która powstała w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych.

Stożek

Stożek to bryła, która powstaje w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych.



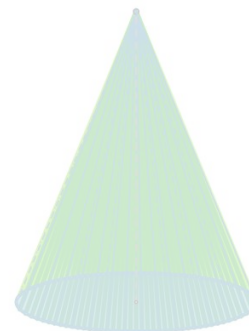
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DqUZ7Hhy6>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

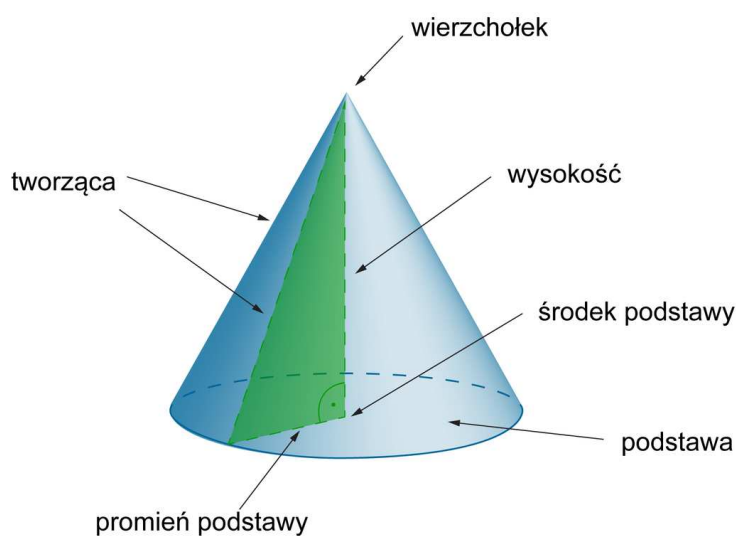
Stożek

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> oś obrotu | <input checked="" type="checkbox"/> tworząca stożka |
| <input checked="" type="checkbox"/> podstawa stożka | <input checked="" type="checkbox"/> wysokość stożka |
| <input type="checkbox"/> promień podstawy stożka | <input checked="" type="checkbox"/> powierzchnia boczna stożka |
| <input type="checkbox"/> średnica stożka | <input type="checkbox"/> przekrój osiowy stożka |
| <input checked="" type="checkbox"/> wierzchołek stożka | <input type="checkbox"/> kąt rozwarcia stożka |
| <input type="checkbox"/> kąt nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy | |

Tworzącą stożka - jest każdy odcinek łączący wierzchołek stożka z punktem na krawędzi podstawy.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zapamiętaj!

- Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe:

$$P_c = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l).$$

- Objętość stożka jest równa:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H.$$

Siatka stożka



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1WqKQ9hUnuUW>

Matematyka_3D_5010

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje stojące na drodze pachołki drogowe w kształcie stożka. Kreślone są krawędzie jednego pachołka - powstaje stożek, który następnie rozkłada się na siatkę stożka.

Siatka stożka



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/RxNRDivwC7nHl](#)

Matematyka_3D_5011

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje siatkę stożka, która następnie składa się w stożek. Stożek zamienia się w pacholek drogowy. Na drodze stoją cztery pacholki.

Przykład 1

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 cm i 9 cm obraca się wokół dłuższego boku. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość otrzymanego w ten sposób stożka.

krok 8 z 8

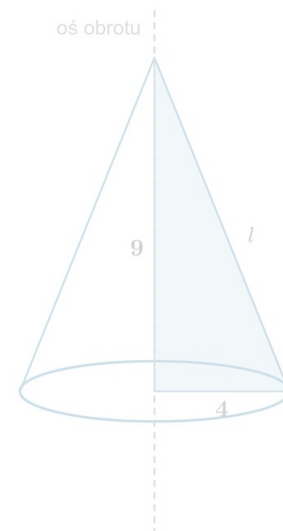

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 cm i 9 cm obraca się wokół dłuższego boku.
Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość otrzymanego w ten sposób stożka.

$$H = 9 \text{ cm}, \quad r = 4 \text{ cm}, \quad l = \sqrt{97} \text{ cm}$$

Wynika z tego, że objętość stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} 4^2 \cdot 9 \cdot \pi = 48\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Pole powierzchni całkowitej jest równe

$$P_c = \pi r(r + l) = \pi \cdot 4(4 + \sqrt{97}) = 4\pi(4 + \sqrt{97}) \text{ (cm}^2\text{)}.$$


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DqUZ7Hhy6>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 2

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym, którego przeciwprostokątna jest równa 8 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej stożka.

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym, którego przeciwprostokątna jest równa 8 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej stożka.

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym. Przyprostokątne trójkąta są jednocześnie tworzącymi stożka. Wynika z tego, że przekrój osiowy jest trójkątem równoramiennym.

Przeciwprostokątna jest równa średnicy podstawy stożka.

Zatem $8 = 2r$, czyli $r = 4$ cm.

Z własności trójkąta prostokątnego równoramiennego wynika, że

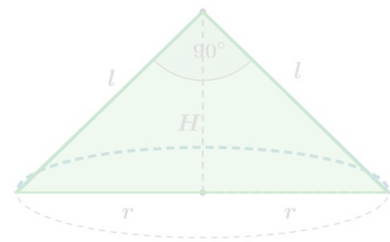
$$H = r = 4 \text{ cm} \quad \text{oraz} \quad l = r\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Objętość stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 4 = \frac{64}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

a pole powierzchni bocznej

$$P_b = \pi r l = \pi \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\pi\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DqUZ7Hhy6>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 3

Pole podstawy stożka jest równe $48\pi \text{ cm}^2$, a jego tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\text{tg } \alpha = \frac{4}{7}$. Oblicz objętość stożka.

Pole podstawy stożka jest równe $48\pi \text{ cm}^2$, a jego tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α , takim, że $\text{tg } \alpha = \frac{4}{7}$. Oblicz objętość stożka.

Pole podstawy jest równe $P_p = 48\pi \text{ cm}^2$,

czyli $\pi r^2 = 48\pi$, zatem $r = 4\sqrt{3}$ (cm).

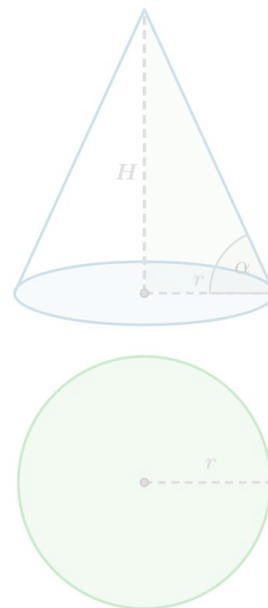
Z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym otrzymujemy

$$\text{tg } \alpha = \frac{H}{r}, \quad \text{czyli} \quad \frac{4}{7} = \frac{H}{4\sqrt{3}}.$$

Wynika z tego, że $H = \frac{16\sqrt{3}}{7}$ (cm).

Obliczmy objętość stożka

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \pi (4\sqrt{3})^2 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{7} = \frac{768\sqrt{3}}{21} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DqUZ7Hhy6>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 4

Oblicz objętość stożka, którego powierzchnia boczna jest wycinkiem koła stanowiącym $\frac{2}{3}$ koła o promieniu 9 cm.

Oblicz objętość stożka, krok 7 z 7
którego powierzchnia boczna jest wycinkiem koła stanowiącym $\frac{2}{3}$ koła o promieniu 9 cm.


$r = 6$ cm

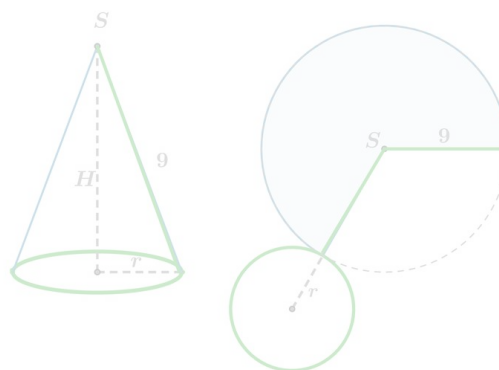
Promień wycinka koła jest jednocześnie tworzącą stożka.

Z twierdzenia Pitagorasa obliczymy wysokość stożka:
 $9^2 = 6^2 + H^2$, czyli $H = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ (cm).

Objętość stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot H = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{5} = 36\pi\sqrt{5} \text{ (cm}^3\text{)}.$$





Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DqUZ7Hhy6>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 1



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Walec i stożek mają równe promienie podstawy r i wysokości H . Oblicz stosunek pola powierzchni bocznej walca do pola powierzchni bocznej stożka.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

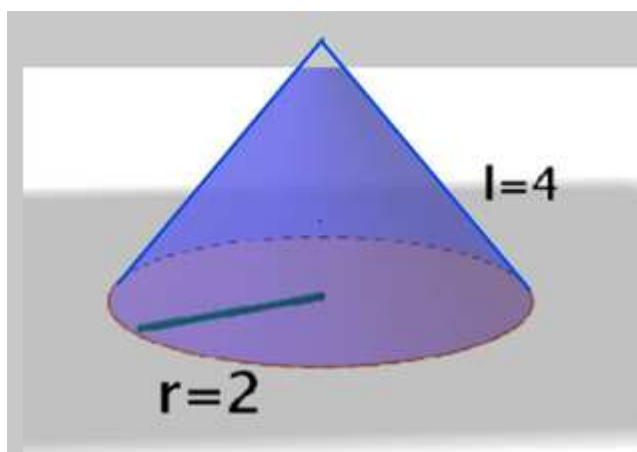
Ćwiczenie 8



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9

Oblicz długość H wysokości stożka, objętość V oraz pole powierzchni całkowitej P_c .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.