Asymptota ukośna wykresu funkcji

Źródło: Patrick Robert Doyle, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Apoloniusz z Pergi (ok. 260 p.n.e. – ok. 190 p.n.e.), który jako pierwszy wprowadził pojęcie asymptoty, był greckim matematykiem i astronomem. Już w starożytności nazywany był „Wielkim Geometrą”. Pojęcie asymptoty pojawia się w jego dziele *Κωνικά (Stożkowa)* poświęconym krzywym stożkowym. Imieniem Apoloniusza nazwany jest również krater znajdujący się na wschodniej stronie Księżyca, widzianej z Ziemi.

W tym materiale wprowadzimy pojęcie asymptoty ukośnej wykresu funkcji i przedstawimy metody jej wyznaczania.

Twoje cele

- Poznasz definicję asymptoty ukośnej wykresu funkcji.
- Wyznaczysz równania asymptot ukośnych wykresu funkcji.
- Wykorzystasz poznane definicje i twierdzenia do rozwiązania zadań.

Przeczytaj

Asymptoty wykresów funkcji pozwalają lepiej wyobrazić sobie ich kształt. Asymptoty nie są częścią wykresu, stanowią jedynie linie pomocnicze przy szkicowaniu wykresów.

Są trzy rodzaje asymptot:

- pionowe,
- poziome,
- ukośne.

W poniższym materiale omówimy asymptoty ukośne.

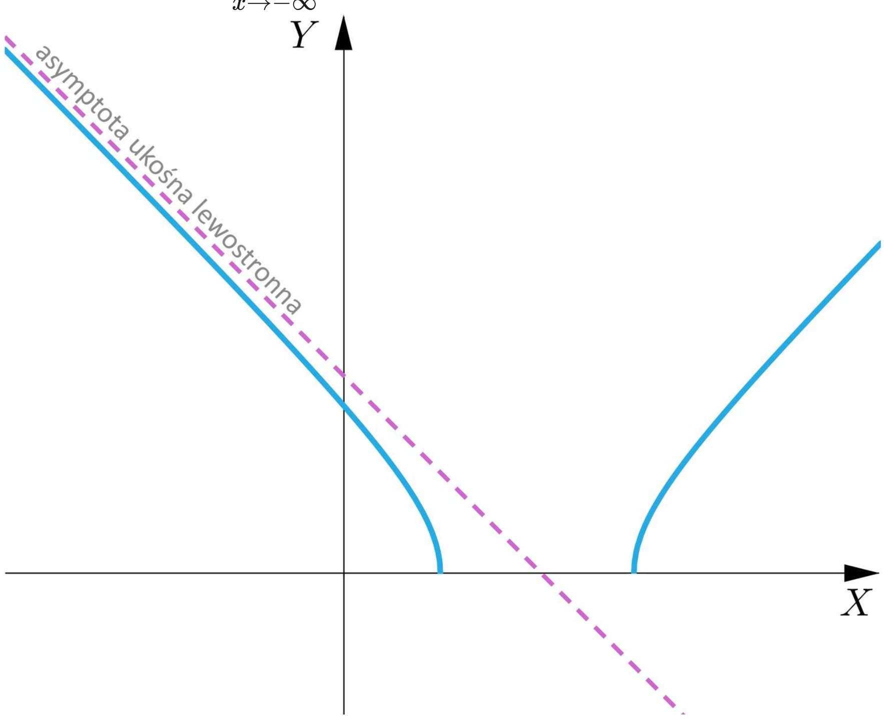
Asymptota ukośna lewostronna wykresu funkcji

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(-\infty, c)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$.

Definicja: Asymptota ukośna lewostronna wykresu funkcji

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli granica różnicy wartości funkcji f i funkcji liniowej $y = ax + b$ dla x dążącego do $(-\infty)$ jest równa zero:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$



Z definicji asymptoty ukośnej lewostronnej wynika, że wykres funkcji dla x dążącego do $(-\infty)$ coraz bardziej zbliża się do asymptoty.

Twierdzenie: Asymptota ukośna lewostronna

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą lewostronną ukośną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ oraz } b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax]$$

i granice te są właściwe.

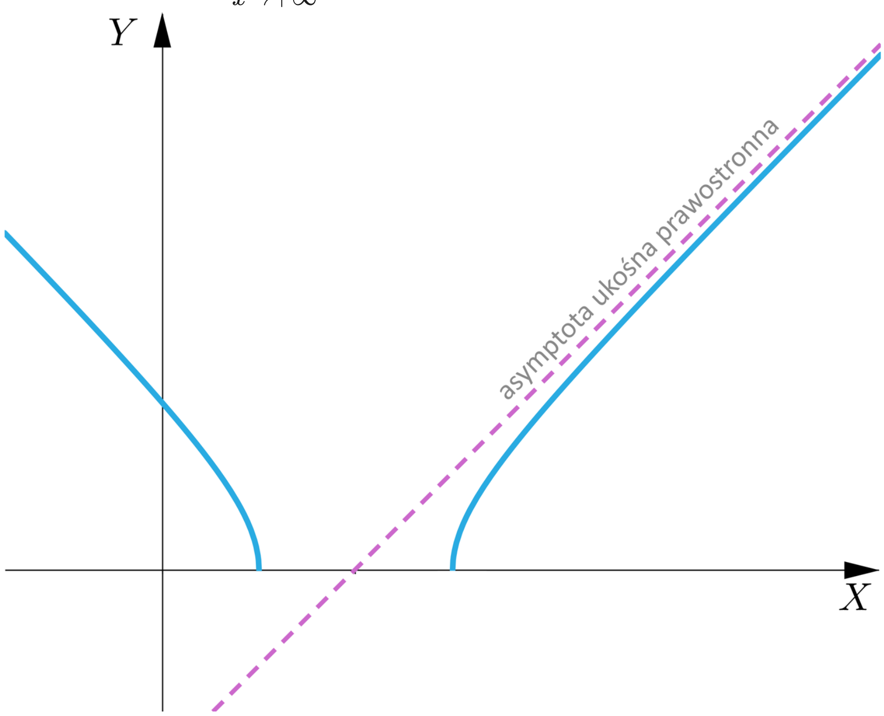
Asymptota ukośna prawostronna wykresu funkcji

Niech funkcja f będzie określona w przedziale (c, ∞), gdzie $c \in \mathbb{R}$.

Definicja: Asymptota ukośna prawostronna wykresu funkcji

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli granica różnicy wartości funkcji f i funkcji liniowej $y = ax + b$ dla x dążącego do $+\infty$ jest równa zero:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$



Z definicji asymptoty ukośnej prawostronnej wynika, że wykres funkcji wraz ze wzrostem argumentów coraz bardziej zbliża się do asymptoty.

Twierdzenie: Asymptota ukośna prawostronna

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą prawostronną ukośną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ oraz } b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$$

i granice te są właściwe.

Dowód

Jeżeli prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną krzywej o równaniu $y = f(x)$, to zgodnie z definicją asymptoty ukośnej mamy:

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, zatem: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (ax+b)}{x} = 0$.

Wyrażenie: $\frac{f(x)}{x}$ zapisujemy następująco: $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - \frac{ax+b}{x} + \frac{ax+b}{x}$.

Ponieważ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ax+b}{x} = a$, to, korzystając z twierdzenia o granicy sumy dwóch granic, z których każda ma granicę właściwą, otrzymujemy:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{ax+b}{x} + \frac{ax+b}{x} \right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (ax+b)}{x} + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ax+b}{x} = 0 + a = a$.

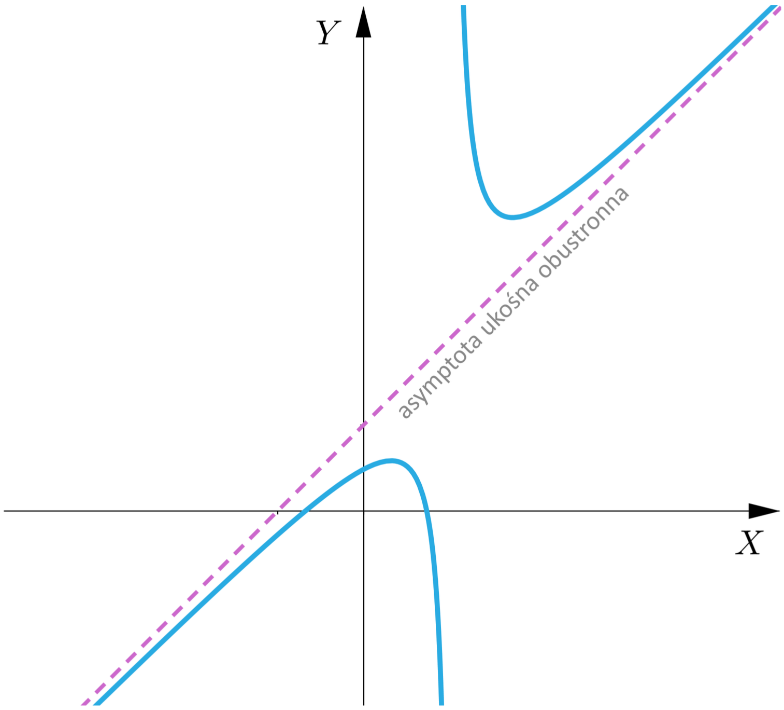
Aby otrzymać drugą z granic, skorzystamy z równości $\lim\limits_{x \to +\infty} b = b$ oraz z twierdzenia o granicy sumy funkcji:

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] + \lim\limits_{x \to +\infty} b = 0 + b$, więc $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b) + b] = b$, czyli $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax - b + b] = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$.

Z udowodnionego twierdzenia wynika, że istnienie granic właściwych $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ oraz $b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby prosta $y = ax + b$ była asymptotą ukośną prawostronną krzywej $y = f(x)$.

Podobnie można udowodnić, że istnienie granic właściwych $a = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ oraz $b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - ax]$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby prosta $y = ax + b$ była asymptotą ukośną lewostronną krzywej $y = f(x)$.

Jeżeli prosta $y = ax + b$ jest jednocześnie asymptotą ukośną prawostronną i lewostronną, to nazywamy ją asymptotą obustronną wykresu funkcji f.



Jeżeli współczynnik kierunkowy asymptoty ukośnej wynosi zero, to asymptotę ukośną $y = b$ nazywamy asymptotą poziomą.

Asymptota pozioma jest szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej, dlatego też jeśli istnieje asymptota pozioma lewostronna lub prawostronna, to nie badamy istnienia asymptoty ukośnej.

Twierdzenie: o wyznaczaniu asymptot ukośnych

- Jeżeli funkcja $y = f(x)$ daje się przedstawić w postaci $y = ax + b + g(x)$, przy czym spełniony jest warunek:
  $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$, to prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lewostronną krzywej $y = f(x)$.
- Jeżeli funkcja $y = f(x)$ daje się przedstawić w postaci $y = ax + b + g(x)$, przy czym spełniony jest warunek:
  $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, to prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną krzywej $y = f(x)$.

Przykład 1

Sprawdzimy, czy prosta o równaniu: $y = \frac{7}{3}x - \frac{19}{9}$ jest asymptotą ukośną obustronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{7x^2 - 4x + 2}{3x+1}$.

Rozwiązanie

Sprawdzamy, czy prosta $y = \frac{7}{3}x - \frac{19}{9}$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{7x^2 - 4x + 2}{3x+1}$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{7x^2-4x+2}{3x+1}-\left(\frac{7}{3}x-\frac{19}{9}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{9(7x^2-4x+2)-21x(3x+1)+19(3x+1)}{9(3x+1)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{63x^2-36x+18-63x^2-21x+57x+19}{9(3x+1)}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{37}{9(3x+1)}\right]=0$$

Sprawdzamy teraz, czy prosta $y=\frac{7}{3}x-\frac{19}{9}$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji $f(x)=\frac{7x^2-4x+2}{3x+1}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{7x^2-4x+2}{3x+1}-\left(\frac{7}{3}x-\frac{19}{9}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{9(7x^2-4x+2)-21x(3x+1)+19(3x+1)}{9(3x+1)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{63x^2-36x+18-63x^2-21x+57x+19}{9(3x+1)}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{37}{9(3x+1)}\right]=0$$

Zatem prosta o równaniu $y=\frac{7}{3}x-\frac{19}{9}$ jest asymptotą ukośną obustronną wykresu funkcji $f(x)=\frac{7x^2-4x+2}{3x+1}$

Przykład 2

Wyznaczymy równanie asymptoty ukośnej lewostronnej wykresu funkcji $f(x)=\frac{2x^3+2x}{5x^2-4}$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy asymptoty ze wzoru: $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+2x}{5x^3-4x}=\frac{2}{5}$$

Wyznaczamy współczynnik b ze wzoru: $b=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3+2x}{5x^2-4}-\frac{2}{5}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{5(2x^3+2x)-2x(5x^2-4)}{5(5x^2-4)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{18x}{5(5x^2-4)}=0$$

Zatem równanie asymptoty ukośnej lewostronnej wykresu funkcji f ma postać: $y=\frac{2}{5}x$

Przykład 3

Wyznaczymy równanie asymptoty ukośnej prawostronnej wykresu funkcji $f(x)=\frac{-3x^4+2x^3+1}{2x^3-3x}$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy asymptoty ze wzoru: $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^4+2x^3+1}{2x^4-3x^2}=-\frac{3}{2}$$

Wyznaczamy współczynnik b ze wzoru: $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3x^4+2x^3+1}{2x^3-3x}+\frac{3}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2(-3x^4+2x^3+1)+3x(2x^3-3x)}{b=2(2x^3-3x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-9x^2+2}{2(2x^3-3x)}=1$$

Zatem równanie asymptoty ukośnej prawostronnej wykresu funkcji f ma postać:
$y = -\frac{3}{2}x + 1$
Przykład 4

Wyznaczymy równania asymptot ukośnych wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{2(x-4)}$.

Rozwiązanie

Równania asymptot ukośnych wyznaczymy na dwa sposoby.

Sposób 1

Funkcja jest określona, gdy $x - 4 \neq 0$, więc dziedziną tej funkcji jest zbiór $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą lewostronną ukośną wtedy i tylko wtedy, gdy

$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ oraz $b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax]$ i granice te są właściwe.

Obliczamy granice:

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{2(x-4)}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2(x-4)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x}}{2(\frac{x}{x} - \frac{4}{x})} = \frac{1}{2(1+0)} = \frac{1}{2}.$$

Zatem:

$a = \frac{1}{2}$.

Mamy teraz: $b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2}{2(x-4)} - \frac{1}{2}x\right]$.

Ponieważ

$$\frac{x^2}{2(x-4)} - \frac{1}{2}x = \frac{x^2}{2(x-4)} - \frac{1}{2}x \cdot \frac{x-4}{x-4} = \frac{x^2}{2(x-4)} - \frac{x(x-4)}{2(x-4)} =$$

$$= \frac{x^2}{2(x-4)} - \frac{x^2-4x}{2(x-4)} = \frac{4x}{2(x-4)} = \frac{2x}{x-4},$$

to $b = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2}{2(x-4)} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{(x-4)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{(\frac{x}{x} - \frac{4}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{(1-\frac{4}{x})} = 2.$

Prosta o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 2$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{2(x-4)}$.

Analogicznie wyznaczamy równanie asymptoty ukośnej prawostronnej:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{2(x-4)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2(x-4)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{2(\frac{x}{x} - \frac{4}{x})} = \frac{1}{2(1+0)} = \frac{1}{2}$$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{2(x-4)} - \frac{1}{2}x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{(x-4)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\left(\frac{x}{x}-\frac{4}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(1-\frac{4}{x}\right)} = 2.$

Prosta o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 2$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{2(x-4)}$.

Odpowiedź

Prosta o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 2$ jest asymptotą ukośną obustronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{2(x-4)}$.

Sposób 2

Rozwiążemy teraz ten przykład korzystając z twierdzenia o wyznaczaniu asymptot ukośnych.

Ponieważ licznik funkcji $f(x) = \frac{x^2}{2(x-4)}$ jest stopnia wyższego niż mianownik, dzielimy licznik przez mianownik:

$$
\begin{array}{l}
\ \ \left(x^2+0x+0\right) : (2x-8) = \frac{1}{2}x+2 \\
-\left(\underline{x^2-4x}\right) \\
\qquad 0+4x+0 \\
\qquad\ \ -(4x-16) \\
\hline
\qquad\qquad 0+16 \text{ reszta}
\end{array}
$$

Możemy więc funkcję $f(x) = \frac{x^2}{2(x-4)}$ zapisać w postaci $y = ax + b + g(x)$, czyli

$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 + \frac{16}{2(x-4)}$.

Oznaczmy przez $g(x) = \frac{16}{2(x-4)}$ i zauważmy, że $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{16}{2(x-4)} = 0$, więc prosta $y = \frac{1}{2}x + 2$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{2(x-4)}$.

Podobnie pokazujemy, że prosta $y = \frac{1}{2}x + 2$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu tej funkcji.

Odpowiedź

Prosta $y = \frac{1}{2}x + 2$ jest asymptotą ukośną obustronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{2(x-4)}$.
Przykład 5

Wyznaczymy równania asymptot wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$.

Rozwiązanie

Funkcja jest określona dla $x \neq 2$, zatem: $D_f = (-\infty,\ 2) \cup (2,\ \infty)$.

Zauważmy, że $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-3}{x-2} = \left[\frac{4-3}{0^-}\right] = -\infty$ oraz $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-3}{x-2} = \left[\frac{4-3}{0^+}\right] = \infty$, więc prosta $x = 2$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$.

Ponieważ licznik funkcji $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$ jest stopnia wyższego niż mianownik, dzielimy licznik przez mianownik:

$$\begin{array}{l}
\quad\left(x^2 + 0x - 3\right) : (x-2) = x + 2 \\
-\left(\underline{x^2 - 2x}\right) \\
\quad\; 0 + 2x - 3 \\
\qquad - (2x - 4) \\
\hline
\qquad\quad 0 + 1 \text{ reszta}
\end{array}$$

Funkcję $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$ zapisujemy w postaci $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-2}$.

Prosta $y = x + 2$ jest asymptotą ukośną obustronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$ ponieważ $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2} = 0$ i $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$.

Słownik

asymptota ukośna lewostronna wykresu funkcji

prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli granica różnicy wartości funkcji f i funkcji liniowej $y = ax + b$ dla $x \to -\infty$ jest równa zero

asymptota ukośna prawostronna wykresu funkcji

prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji $y = f$, jeżeli granica różnicy wartości funkcji $f(x)$ i funkcji liniowej $y = ax + b$ dla $x \to +\infty$ jest równa zero

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem prezentującym metody wyznaczania równań asymptot ukośnych wykresu funkcji a następnie rozwiąż polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DVrNRglzf

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej asymptoty ukośnej.

Polecenie 2

Zbadaj istnienie asymptot ukośnych wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

Polecenie 3

Zapisując funkcję $f(x) = \frac{x^3-7x-8}{x^2-x-6}$ w postaci $f(x) = ax + b + g(x)$, podaj równanie asymptoty ukośnej wykresu tej funkcji.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Asymptota ukośna wykresu funkcji

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna definicje asymptoty ukośnej lewostronnej, prawostronnej wykresu funkcji
- zna twierdzenia umożliwiające wyliczenie równania asymptot ukośnych wykresu funkcji
- podaje równania asymptoty ukośnej lewostronnej, prawostronnej i obustronnej wykresu funkcji
- oblicza granice funkcji w nieskończoności korzystając z poznanych własności o granicach
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania
- przedstawia pełny tok rozwiązania zadania wraz z uzasadnieniem

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny
- burza mózgów
- pokaz multimedialny

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- tablica interaktywna/rzutnik multimedialny
- e–podręcznik

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają definicję asymptoty pionowej wykresu funkcji.
2. Uczniowie podają metody wyznaczania granicy funkcji w nieskończoności.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy 3 – osobowe.
2. Każda grupa ma zapoznać się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”.
3. Na podstawie przeczytanego materiału uczniowie przygotowują przykład funkcji, której wykres ma asymptotę ukośną a następnie jej wykres sporządzają w programie geogebra.
4. Chętni przedstawiciele grup prezentują na tablicy szkice wykresów funkcji z zaznaczeniem asymptoty ukośnej i pionowej – jeśli wykres taką posiada.
5. Metodą burzy mózgów uczniowie określają etapy wyznaczenia równania asymptoty ukośnej.
6. Uczniowie formułują wnioski, w których określają jak otrzymać równanie asymptoty ukośnej.
7. Nauczyciel prezentuje film samouczek i omawia go z uczniami, następne uczniowie samodzielnie rozwiązują zadania pod filmem.
8. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela.

9. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek i zwracając uwagę na staranność zapisów.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych.
2. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień.
3. Uczniowie sporządzają notatkę w zeszycie: definicje i twierdzenia o asymptocie ukośnej wykresu funkcji.
4. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie pozostałych ćwiczeń interaktywnych z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Wykres funkcji

Wskazówki metodyczne:

Materiały zawarte w filmie samouczku uczniowie mogą przeanalizować jako pracę własną przed lekcją. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.