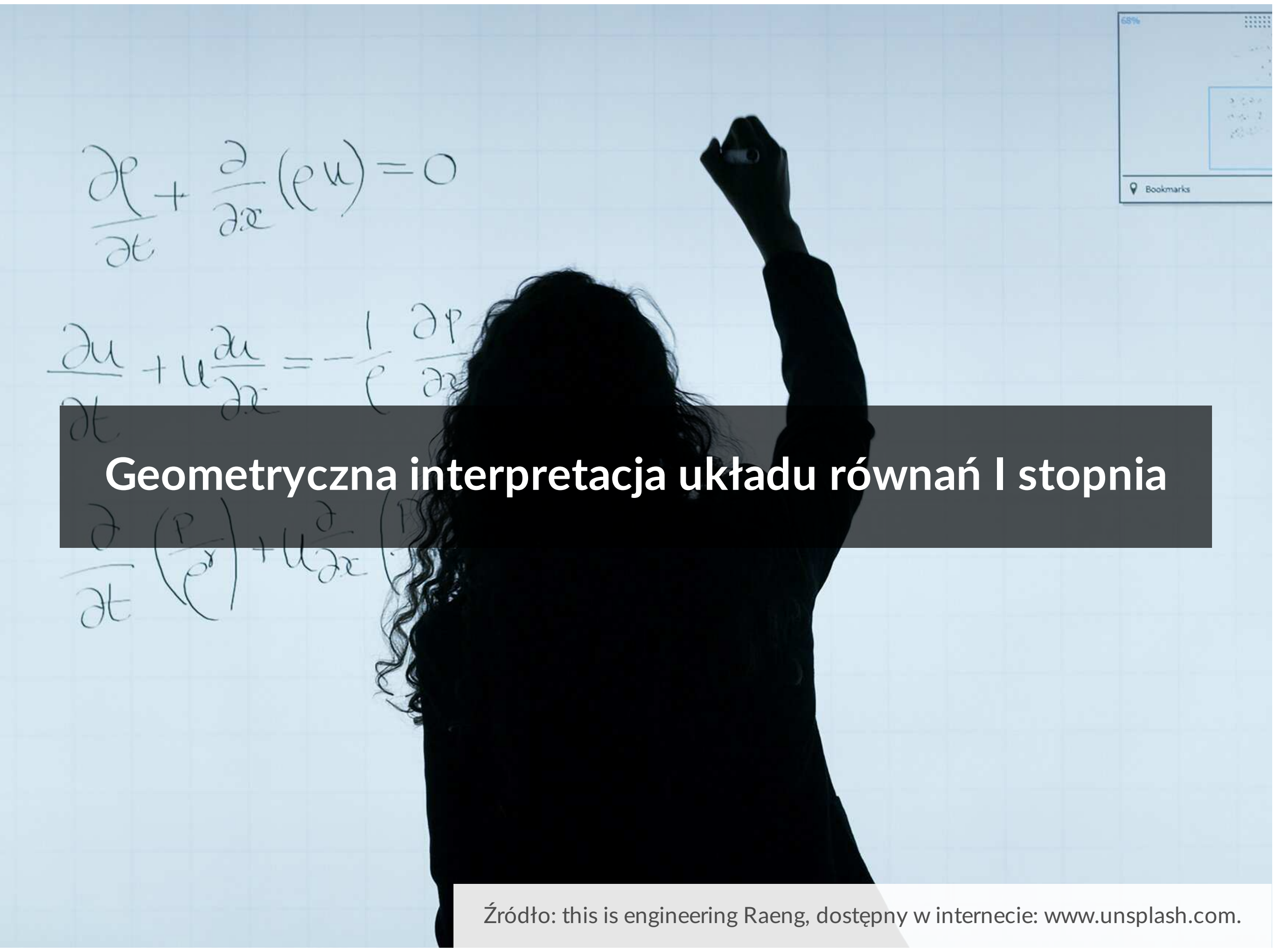
Geometryczna interpretacja układu równań I stopnia

Geometryczna interpretacja układu równań I stopnia



Źródło: this is engineering Raeng, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Jak myślisz, czy układy równań pierwszego stopnia można rozwiązywać w inny sposób niż metodą podstawiania lub przeciwnych współczynników? Odpowiedź na to pytanie brzmi: „Tak, można”.

W tym materiale wykorzystamy geometryczną interpretację układów równań. Skorzystamy z faktu, że równanie liniowe, w którym występują dwie zmienne można zapisać jako równanie prostej. Następnie, rysując te proste w układzie współrzędnych, możemy odpowiednio zinterpretować ich zachowanie względem siebie.

Czy ten sposób jest lepszy niż inne? Czy w łatwy sposób można odczytać rozwiązania w takim podejściu? Na to i inne pytania znajdziesz odpowiedź zapoznając się z dalszą częścią materiału.

> **Twoje cele**
>
> - Rozwiążesz układ równań pierwszego stopnia z dwoma niewiaodmymi korzystając z jego interpretacji geometrycznej.
> - Określisz liczbę rozwiązań układu równań na podstawie wykresów prostych.

Przeczytaj

Równanie linii prostej, która jest wykresem funkcji liniowej, zapisywaliśmy dotąd w postaci:

$$y = ax + b.$$

Postać taką nazywamy **postacią kierunkową**, bowiem od razu widzimy, jaki jest współczynnik kierunkowy rozważanej prostej.

W postaci kierunkowej nie można jednak zapisać równań prostych równoległych do osi Y, gdyż ich współczynnik kierunkowy nie jest określony. Dlatego, aby móc rozważać jednocześnie wszystkie rodzaje prostych na płaszczyźnie, używamy często zapisu równania prostej w postaci ogólnej:

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie A, B oraz C są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Oczywiście, jeśli dana prosta jest wykresem funkcji liniowej, to jej równanie zawsze można zapisać w obu postaciach.

> **Przykład 1**
>
> Równanie prostej zapisane w postaci ogólnej:
> $3x - 2y + 1 = 0$
> możemy zapisać w postaci kierunkowej:
> $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.
>
> **Przykład 2**
>
> Równanie prostej zapisane w postaci kierunkowej:
> $y = \frac{3}{4}x - 2$
> możemy zapisać w postaci ogólnej:
> $3x - 4y - 8 = 0$.

Zapis równania prostej w postaci ogólnej lub kierunkowej często pojawia się w układach równań liniowych. Sposoby rozwiązywania takich układów to np. metoda podstawiania lub przeciwnych współczynników. Pokażemy, że rozwiązywanie układu równań liniowych można zinterpretować jako poszukiwanie punktu przecięcia pewnych prostych w układzie współrzędnych.

> **Przykład 3**
>
> Rozwiążemy metodą podstawiania układ równań: $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x - y = -5 \end{cases}$.

Z drugiego równania wyznaczamy y w zależności od x, a następnie otrzymane wyrażenie podstawiamy do pierwszego równania:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ y = 4x + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3(4x + 5) = 1 \\ y = 4x + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14x = -14 \\ y = 4x + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \cdot (-1) + 5 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest więc para liczb $x = -1$ oraz $y = 1$.

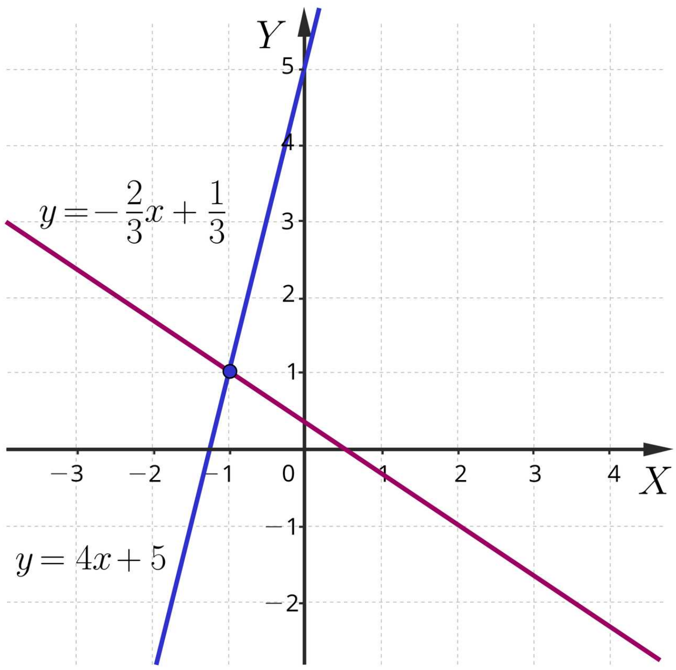
Zobaczymy teraz, że ten sam wynik możemy uzyskać, rysując pewne proste w układzie współrzędnych.

Przykład 4

Rozwiążemy ten sam układ równań metodą graficzną. W tym celu przekształcamy oba równania do postaci kierunkowej:

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \\ y = 4x + 5 \end{cases}.$$

Aby odczytać rozwiązanie powyższego układu, poszukujemy punktu, który należy jednocześnie do prostej $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ oraz do prostej $y = 4x + 5$. Z rysunku odczytujemy, że obie proste przecinają się w punkcie $(-1, 1)$. Zatem metodą graficzną otrzymujemy to samo, co metodą algebraiczną, rozwiązanie układu równań : $x = -1$ oraz $y = 1$.



Interpretacja geometryczna układu równań liniowych pozwala lepiej zrozumieć, dlaczego układ taki może mieć albo dokładnie jedno rozwiązanie, albo nieskończenie wiele, albo zero rozwiązań. Rozpatrzmy układ równań postaci:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}.$$

Para liczb x oraz y jest rozwiązaniem tego układu wtedy i tylko wtedy, gdy punkt A o współrzędnych (x, y) należy jednocześnie do prostej $y = a_1x + b_1$ i do prostej $y = a_2x + b_2$.

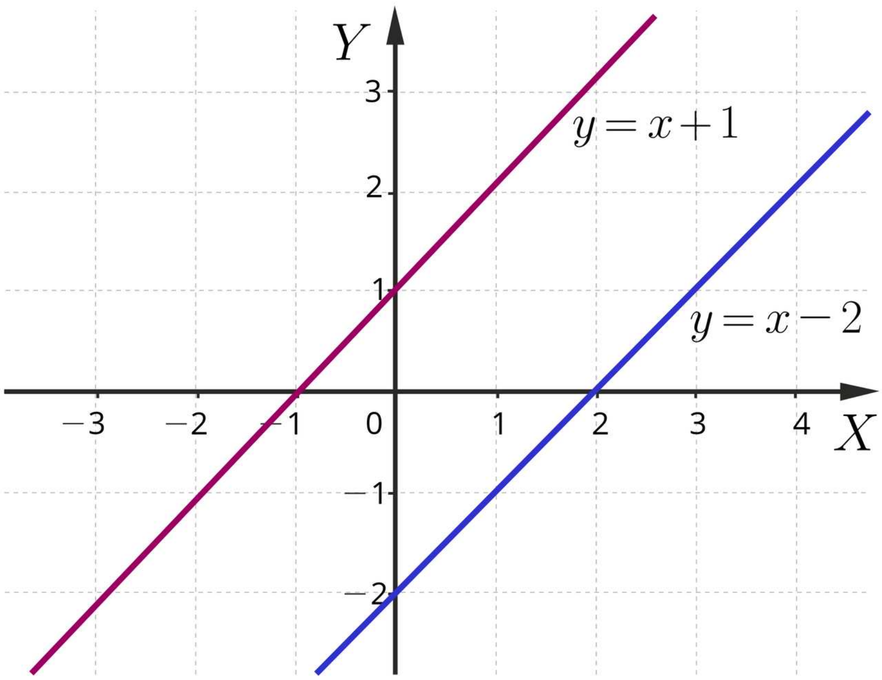
Rozwiązanie układu równań polega na znalezieniu punktów wspólnych dwóch prostych na płaszczyźnie, zatem układ dwóch równań liniowych:

- nie ma rozwiązań, gdy proste są równoległe i się nie pokrywają,
- ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy proste się pokrywają,
- ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy proste się przecinają.

Przykład 5

Układ równań: $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$

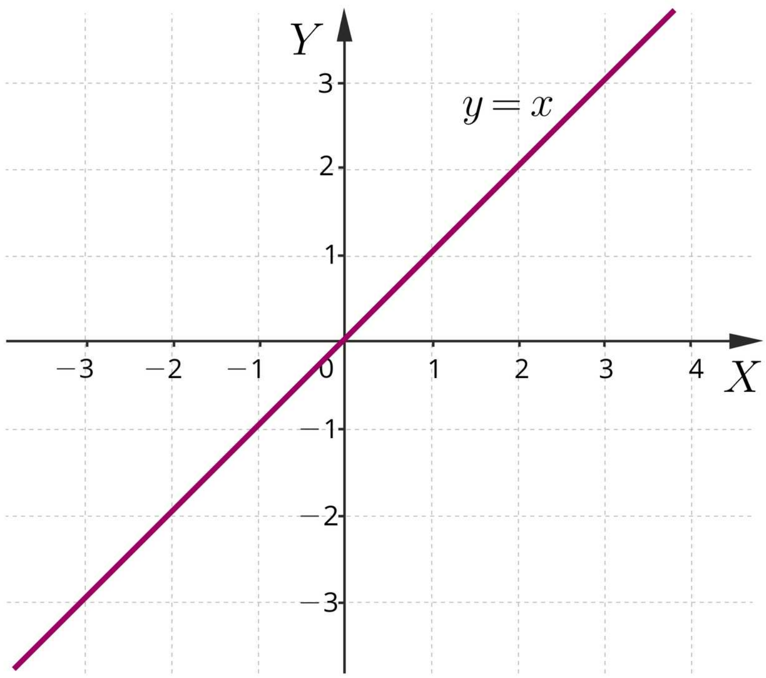
nie ma rozwiązań, ponieważ proste o równaniach $y = x - 2$ oraz $y = x + 1$ są równoległe i nie mają punktów wspólnych.



Przykład 6

Układ równań: $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$

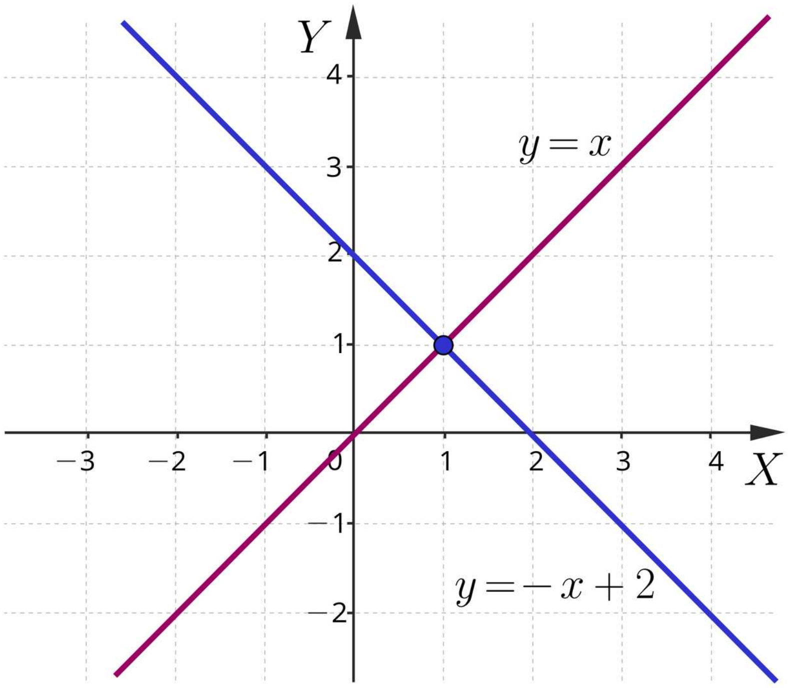
ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdyż wyznaczając z obu równań y, uzyskamy równanie tej samej prostej: $y = x$.



Przykład 7

Układ równań: $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x \end{cases}$

ma dokładnie jedno rozwiązanie, ponieważ proste $y = -x + 2$ oraz $y = x$ przecinają się w punkcie $(1, 1)$. A zatem jedynym rozwiązaniem układu jest para liczb $x = 1, y = 1$.



Ważne!

Należy jeszcze sprawdzić, czy na pewno dobrze odczytaliśmy współrzędne z rysunku:

$$\begin{cases} 1 = -1 + 2 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Słownik

prosta

zbiór punktów opisanych następującym równaniem ogólnym $Ax + By + C = 0$, gdzie A i B nie mogą być równocześnie równe zeru, a C jest dowolną liczbą rzeczywistą

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych, a następnie rozwiąż kolejne polecenia.

Polecenie 2

W którym punkcie przecinają się proste o równaniach:

$y = 2x - 1$ oraz $y = \frac{1}{3}x + 1$?

Polecenie 3

Rozwiąż metodą graficzną układ równań:

$$\begin{cases} y + 3x = 1 \\ y + x = -1 \end{cases}.$$

Polecenie 4

Trzeba zapakować 1310 kg towaru do 30 skrzynek dwóch rodzajów: mniejszych, mieszczących 40 kg, i większych na 50 kg. Ile trzeba wziąć skrzynek mniejszych, a ile większych?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

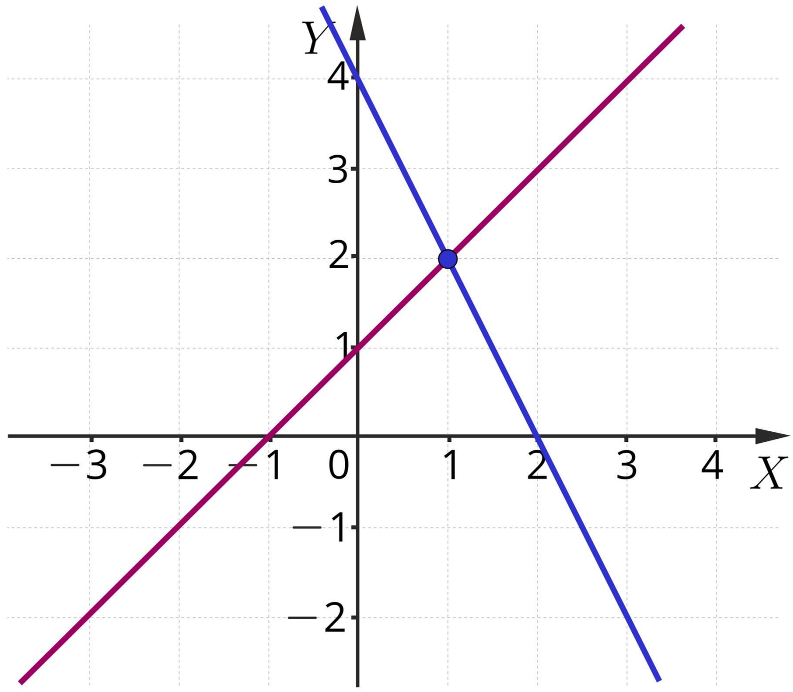
Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Na rysunku znajduje się interpretacja geometryczna układu równań:



Ćwiczenie 9

Ćwiczenie 10

Ćwiczenie 11

Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 5x + 2y = 20 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = -1 \\ 3x + 3y = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + y = -9 \\ 7x - 3y = 8 \end{cases}$

Ćwiczenie 12

Rozwiąż graficznie układy równań:

a) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x - y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - y = -2 \\ 5x + y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ -x - 2y = -8 \end{cases}$

Ćwiczenie 13

Rozwiąż układy równań :

a) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x-y}{4} + \frac{x+y}{6} = 2 \\ \frac{x+4y}{3} - \frac{x-5y}{4} = 3 \end{cases}$

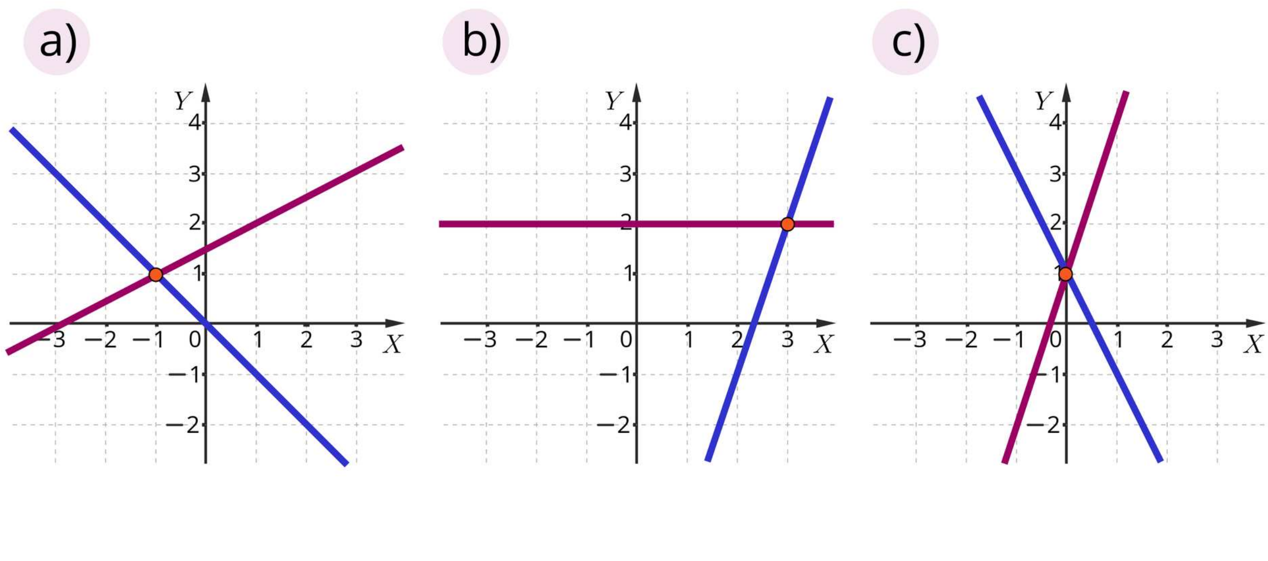
c) $\begin{cases} 4(x-3) + 3(y+1) = -7 \\ 5(x+2) - 2(y-7) = 38 \end{cases}$

Ćwiczenie 14

Oblicz a i b, wiedząc, że wykres funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{8}$ ma nieskończenie wiele punktów wspólnych z prostą o równaniu $f(x) = 0,5x - 3$.

Ćwiczenie 15

Zapisz układy równań, których rozwiązania graficzne są przedstawione na rysunkach:



Ćwiczenie 16

Za 43 zł kupiono $20\ \mathrm{kg}$ jabłek dwóch gatunków: po 2 zł i po $2,50$ zł za kilogram. Ile kilogramów jabłek każdego gatunku zakupiono?

Ćwiczenie 17

Wykresy funkcji $f(x) = ax + 8$ i $g(x) = x + b$ przecinają się w punkcie $P = (2, 2)$. Oblicz a i b.

Ćwiczenie 18

Znajdź równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkty A i B, wiedząc, że:
a) $A = (1, 2)$ i $B = (6, 3)$,
b) $A = (-7, 1)$ i $B = (0, -1)$.

Ćwiczenie 19

Wykresy funkcji $f_1(x) = -2x + 3$, $f_2(x) = 3x - 2$ i $f_3(x) = 5x + b$ przecinają się w jednym punkcie. Oblicz b.

Ćwiczenie 20

Na koncert filharmonii przyszło do szkolnej auli 220 uczniów. Wiadomo, że uczniów, którzy zajęli miejsca siedzące, było 10 razy więcej niż pozostałych. Można było usiąść na krześle lub na czteroosobowej ławce. Zajęto w sumie 65 krzeseł i ławek. Ile krzeseł zajęli uczniowie podczas koncertu?

Ćwiczenie 21

Po zmieszaniu $3\ \mathrm{kg}$ cukierków czekoladowych i $3\ \mathrm{kg}$ cukierków owocowych powstała mieszanka, za kilogram której trzeba zapłacić 10 zł. Gdyby zmieszać $5\ \mathrm{kg}$ cukierków czekoladowych i $3\ \mathrm{kg}$ cukierków owocowych, to jeden kilogram takiej mieszanki kosztowałby $10,50$ zł. Ile kosztuje $1\ \mathrm{kg}$ cukierków czekoladowych, a ile owocowych?

Ćwiczenie 22

Dwaj sąsiedzi, Marek i Andrzej, poświęcają wolny czas na zajęcia organizowane przez Osiedlowy Ośrodek Sportu. Marek w tym tygodniu był tam m.in. dwie godziny na basenie i trzy godziny na siłowni, za co zapłacił 23 zł. Andrzej za pięć godzin spędzonych na basenie i jedną - na siłowni zapłacił o 2 zł więcej niż Marek. Ile trzeba zapłacić za godzinę pobytu na basenie, a ile za godzinę ćwiczeń na siłowni?

Ćwiczenie 23

Przed rokiem Ania była trzy razy starsza od Oli. Za trzy lata Ola będzie dwa razy młodsza od Ani. Ile lat będzie miała Ania, gdy Ola skończy 18 lat?

Ćwiczenie 24

Ojciec i jego trzy córki mają w sumie 94 lata. Cztery lata temu najstarsza córka była dwa razy młodsza od ojca, a dwie młodsze dziewczynki miały razem 21 lat. Ile lat temu najstarsza córka uzyskała pełnoletniość?

Ćwiczenie 25

Marysia zapytała Zosię: *„Ile masz lat?”*. Wtedy Zosia odpowiedziała: *„Gdy ty będziesz w moim wieku, ja będę miała* 28 *lat. Gdy ja byłam w twoim wieku, byłaś ode mnie* 3 *razy młodsza”.* Ile lat ma obecnie każda z nich?

Ćwiczenie 26

Liczba dwucyfrowa jest o 27 większa od liczby, która powstała z zamiany cyfr w danej liczbie. Wiadomo też, że suma cyfr danej liczby jest liczbą złożoną. Wypisz wszystkie liczby dwucyfrowe spełniające podane warunki.

Ćwiczenie 27

Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} 2x - 7y = -3 \\ ax + by = 9 \end{cases}$$

z niewiadomymi x i y. Oblicz wartość wyrażenia $2a + b$, wiedząc, że układ ma jedno rozwiązanie (x, y) takie, że $x - y = 1$.

Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Geometryczna interpretacja układu równań I stopnia

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IV. Układy równań

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi; podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje układ równań pierwszego stopnia korzystając z jego interpretacji geometrycznej,
- określa liczbę rozwiązań na podstawie wykresów prostych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Nauczyciel we współpracy z uczniami wybiera ekspertów, którzy przygotowują informacje na podane przez nauczyciela tematy:

- wykres funkcji liniowej,
- graficzna interpretacja układu równań postaci $\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w parach informacje dotyczące rysowania wykresów funkcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie - eksperci w dowolnej formie przedstawiają przygotowane przez siebie informacje.
2. Pracując w parach metodą analizy przypadku, uczniowie analizują przykłady zawarte w sekcji „Przeczytaj” i galerii zdjęć interaktywnych.
3. Nauczyciel oraz eksperci wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
4. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy, które podchodzą do stacji zadaniowych przygotowanych przez ekspertów. Każda z grup rozwiązuje przygotowane przez nich zadania.
5. Eksperci wspierają pozostałych uczniów, wyjaśniają wątpliwości. Nauczyciel nadzoruje pracę grup.

6. Po wykonaniu zadań z danego zakresu, grupy zadaniowe przechodzą do kolejnej stacji.
7. Uczniowie w parach rozwiązują zadania zawarte w materiale multimedialnym. Rozwiązania zadań uczniowie zapisują w zeszycie, sprawdzając w materiale ich poprawność.

Faza podsumowująca:

1. Przedstawiciele grup krótko omawiają trudności, na jakie natknęli się podczas rozwiązywania zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują polecenia w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”.

Materiały pomocnicze:

- Proste równoległe, proste prostopadłe

Wskazówki metodyczne:

Galerię zdjęć można wykorzystać na lekcji poświęconej zadaniom tekstowym prowadzącym do rozwiązywania układów równań liniowych.