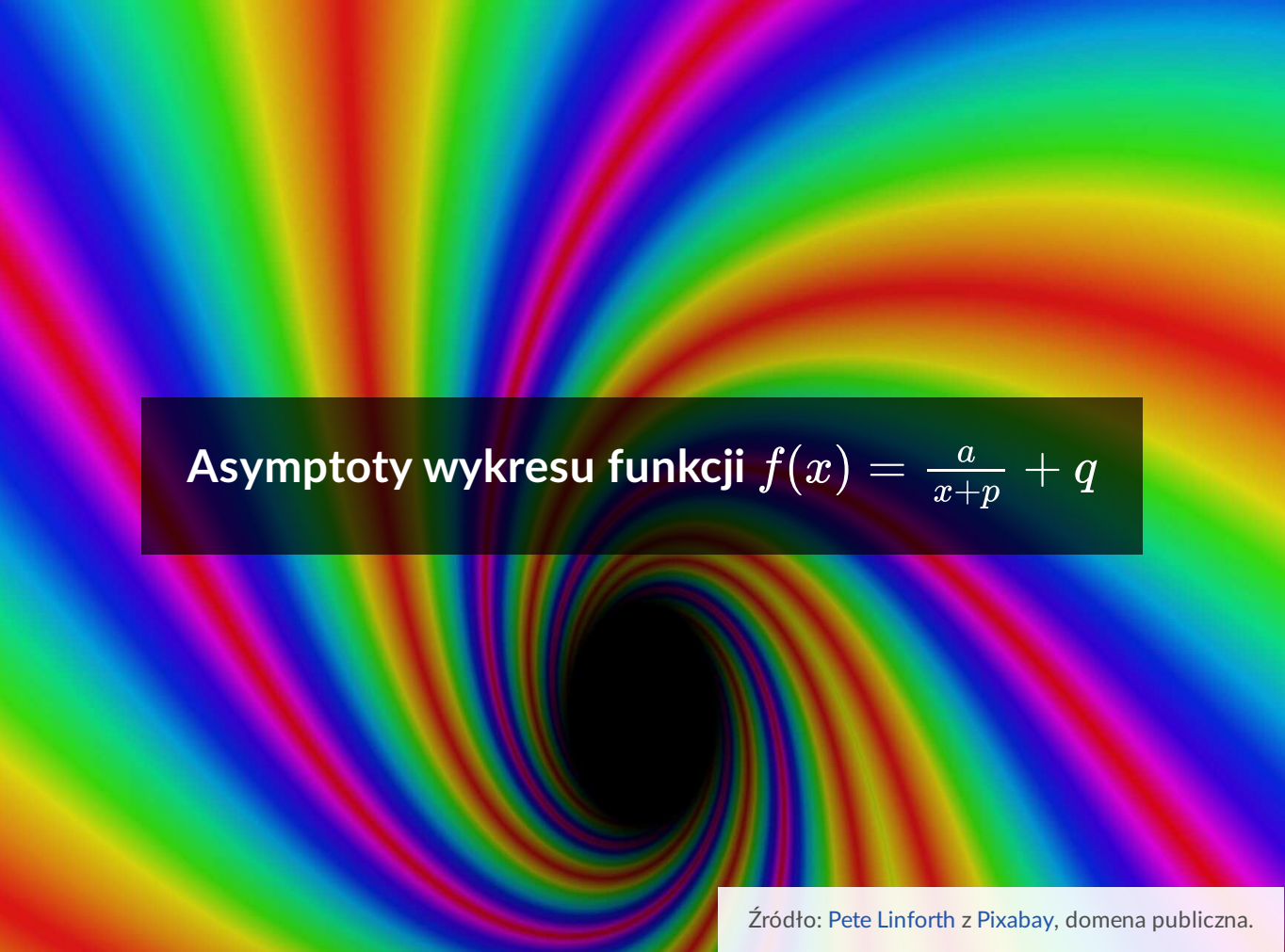




Asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$

Źródło: [Pete Linforth](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Przyglądając się wykresowi hiperboli można zauważyć, że gałęzie hiperboli zbliżają się do pewnych prostych, lecz nigdy tych prostych nie przecinają. Proste te noszą nazwę asymptot. W tym materiale dowiesz się, czym są asymptoty oraz jak je wyznaczać na podstawie wykresu oraz wzoru funkcji.

### Twoje cele

- Podasz definicję asymptoty.
- Wyznaczysz asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ ,  $x \neq 0$  na podstawie wykresu tej funkcji.
- Wyznaczysz asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ ,  $x \neq 0$  na podstawie wzoru funkcji.
- Wyznaczysz asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$  na podstawie wzoru funkcji.
- Wyznaczysz asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$  na podstawie wykresu funkcji.

# Przeczytaj

## Definicja: Asymptota pionowa

Funkcja  $f(x)$  ma asymptotę pionową prawostronną w  $x = a$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \text{ lub } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

Funkcja  $f(x)$  ma asymptotę pionową lewostronną w  $x = a$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \text{ lub } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty.$$

## Definicja: Asymptota ukośna

Funkcja  $f(x)$  ma asymptotę ukośną lewostronną  $y = ax + b$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ i } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Funkcja  $f(x)$  ma asymptotę ukośną prawostronną  $y = ax + b$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ i } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

## Definicja: Asymptota pozioma

Funkcja  $f(x)$  ma asymptotę poziomą prawostronną  $y = b$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

Funkcja  $f(x)$  ma asymptotę poziomą lewostronną  $y = b$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

Powyższe definicje wykraczają poza zakres tego tematu. Podjemy je jako ciekawostkę. Dla naszego wywodu możemy przyjąć poniższą definicję asymptoty.

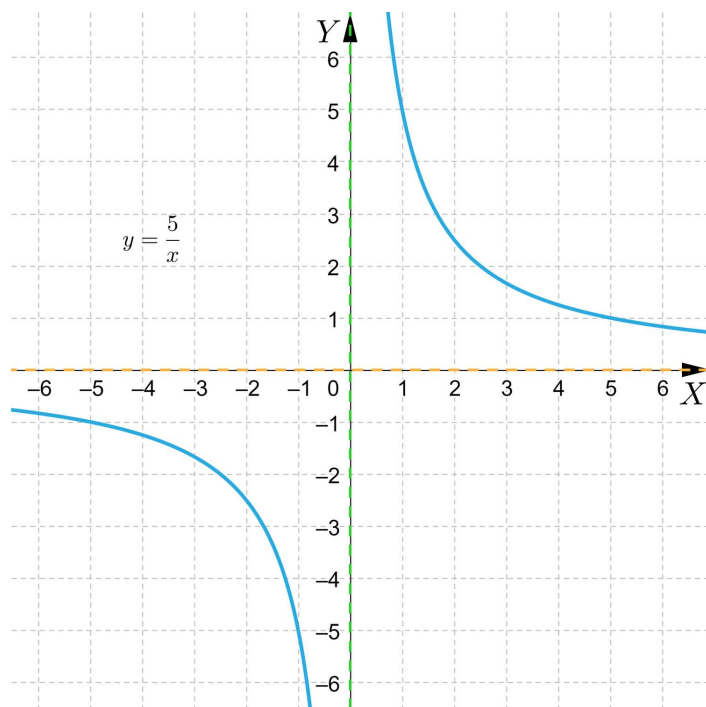
## Definicja: Asymptota krzywej

Prosta jest asymptotą danej krzywej, jeśli dla punktu oddalającego się nieograniczenie wzdłuż krzywej odległość tego punktu od prostej dąży do zera. Asymptota funkcji to asymptota krzywej stanowiącej wykres funkcji.

Intuicyjnie można przyjąć, że asymptota wykresu funkcji, to prosta, do której wykres się zbliża, jeśli oddalamy się od początku układu współrzędnych.

## Przykład 1

Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji  $f(x) = \frac{5}{x}$ . Wyznamy równania asymptot.

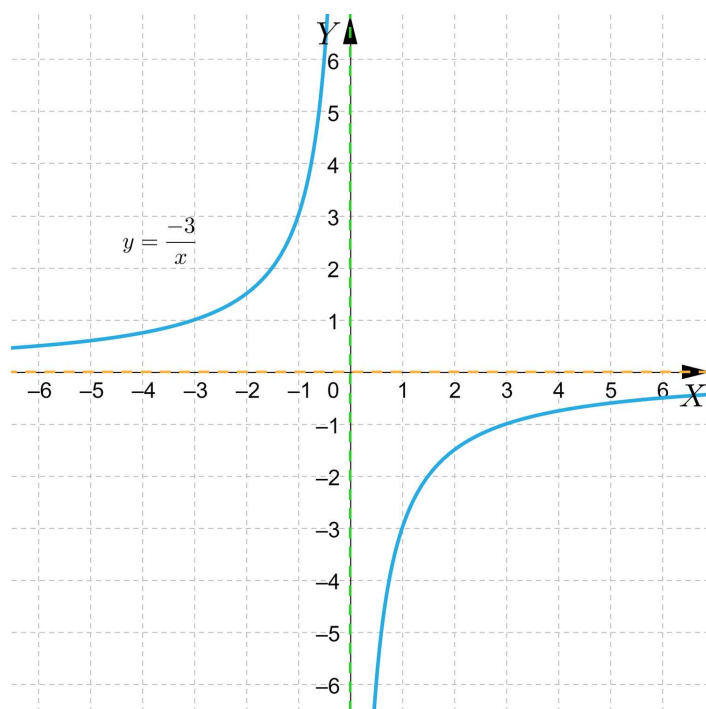


### Rozwiązanie

Wykres funkcji posiada dwie asymptoty – pionową – o równaniu  $x = 0$  (zielona przerywana linia), oraz poziomą – o równaniu  $y = 0$  (żółta przerywana linia).

### Przykład 2

Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji  $f(x) = -\frac{3}{x}$ . Wyznaczymy równania asymptot.



## Rozwiązanie

Wykres funkcji posiada dwie asymptoty – pionową – o równaniu  $x = 0$  (zielona przerywana linia), oraz poziomą – o równaniu  $y = 0$  (żółta przerywana linia).

### Przykład 3

Wyznamy dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ ,  $a \neq 0$ .

## Rozwiązanie

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$ZW_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Zauważmy, że funkcja nie jest określona dla  $x = 0$  i właśnie prosta o równaniu  $x = 0$  jest asymptotą pionową. Podobnie funkcja nie przyjmuje wartości  $y = 0$  i prosta  $y = 0$  jest asymptotą poziomą.

### Przykład 4

Wyznamy równania asymptot wykresu funkcji  $f(x) = \frac{2}{x-1}$ .

## Rozwiązanie

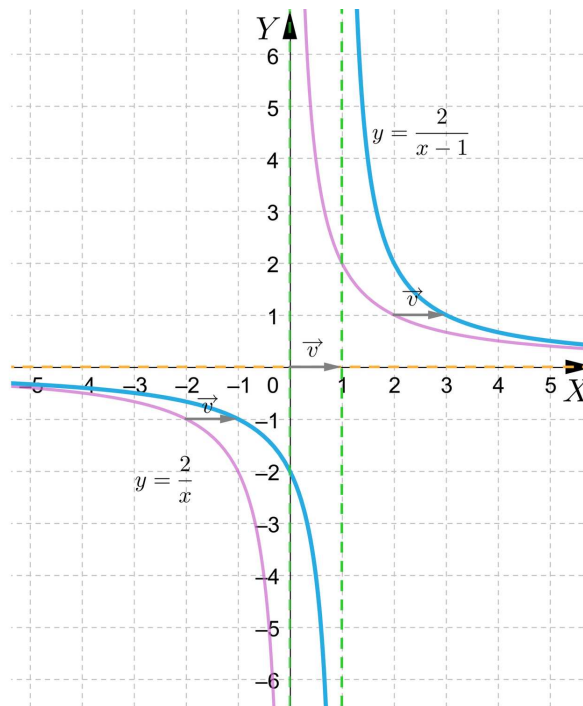
Wykres funkcji  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  powstaje w wyniku [translacji](#) wykresu funkcji  $g(x) = \frac{2}{x}$  o wektor  $\vec{v} = [1, 0]$ . Przesunięciu ulegają również asymptoty. Zauważmy, że równanie asymptoty poziomej nie zmieni się, natomiast asymptota pionowa będzie miała inne równanie.

Odpowiedź:

Równanie asymptoty pionowej:  $x = 1$

Równanie asymptoty poziomej:  $y = 0$

Poniższy rysunek przedstawia opisaną sytuację.



Zauważmy, że zmianie uległa dziedzina funkcji, tzn.  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , oraz przedziały monotoniczności funkcji, funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów:  $(-\infty, 1)$ ,  $(1, \infty)$ .

### Przykład 5

Wyznamy równania asymptot wykresu funkcji  $f(x) = -\frac{1}{x} - 2$ .

### Rozwiązanie

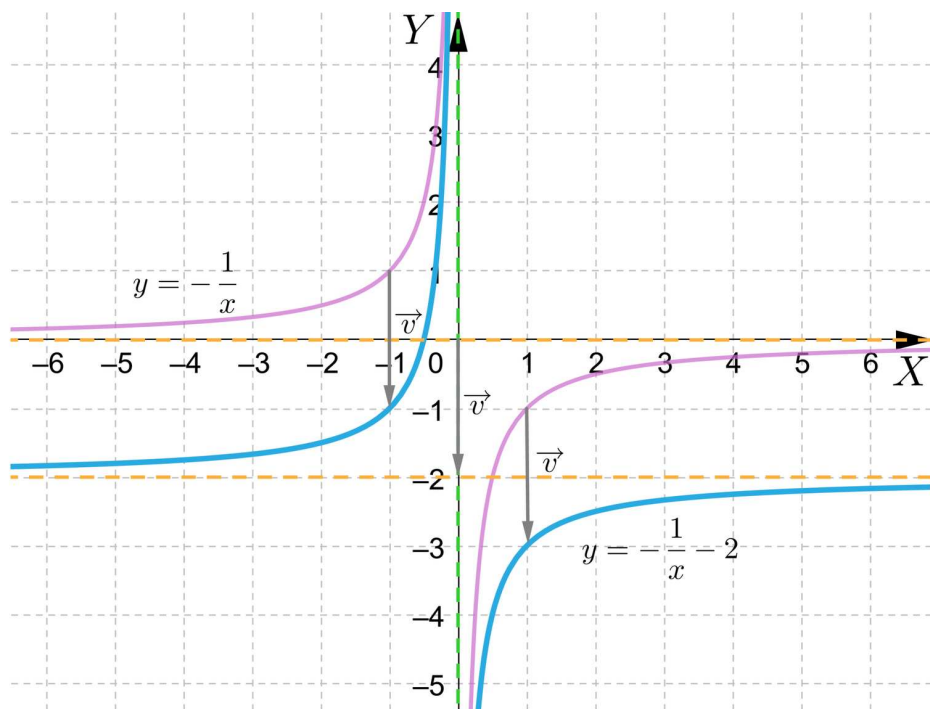
Wykres funkcji  $f(x) = -\frac{1}{x} - 2$  powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji  $g(x) = \frac{-1}{x}$  o wektor  $\vec{v} = [0, -2]$ . Przesunięciu ulegają również asymptoty. Zauważmy, że równanie asymptoty pionowej nie zmieni się, natomiast asymptota pozioma będzie miała inne równanie.

Odpowiedź:

Równanie asymptoty pionowej:  $x = 0$

Równanie asymptoty poziomej:  $y = -2$

Poniższy rysunek przedstawia opisaną sytuację.



Zauważmy, że zmianie uległ zbiór wartości funkcji, tzn.  $ZW_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .

### Przykład 6

Wyznaczmy równania asymptot wykresu funkcji  $f(x) = \frac{3}{x+2} + 4$ .

### Rozwiązanie

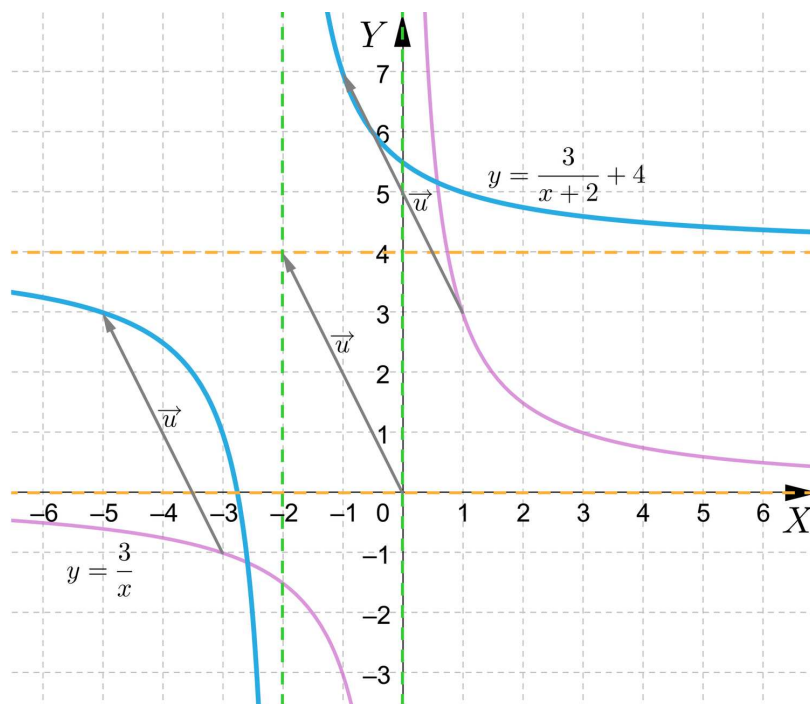
Wykres funkcji  $f(x) = \frac{3}{x+2} + 4$  powstaje w wyniku translacji wykresu funkcji  $g(x) = \frac{3}{x}$  o wektor  $\vec{u} = [-2, 4]$ . Przesunięciu ulegają również asymptoty.

Odpowiedź:

Równanie asymptoty pionowej:  $x = -2$

Równanie asymptoty poziomej:  $y = 4$

Poniższy rysunek przedstawia opisaną sytuację.



Zauważmy, że wraz z przesunięciem wykresu funkcji zmianie uległa dziedzina i zbiór wartości funkcji, więc i asymptoty.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$ZW_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

## Słownik

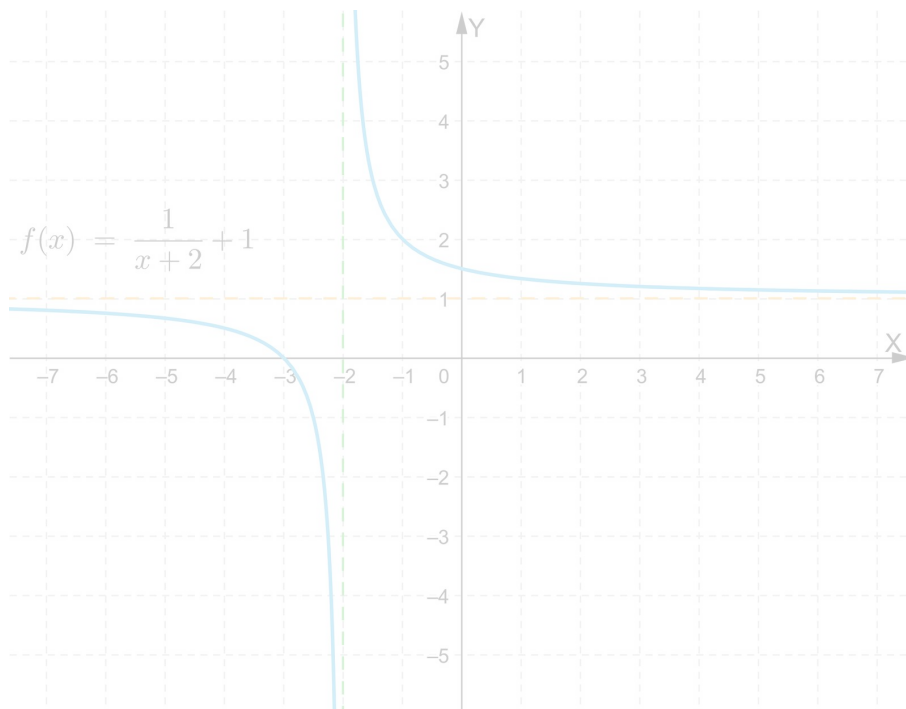
### translacja

przesunięcie każdego punktu figury bądź przestrzeni o tę samą odległość w ustalonym kierunku

# Symulacja interaktywna

## Polecenie 1

Zapoznaj się z symulacją interaktywną. Zwróć uwagę jak zmieniają się równania asymptot wykresu funkcji wraz ze zmianą współczynników  $p$  oraz  $q$ . Czy zmiana współczynnika  $a$  ma wpływ na równania asymptot wykresu funkcji? Odpowiedz na te pytania w poleceniu 2.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dag3i1BeY>

## Polecenie 2

Na podstawie powyższej symulacji interaktywnej połącz fragmenty zdań w pary, aby uzyskać zdania prawdziwe dotyczące wpływu współczynników  $a$ ,  $p$  oraz  $q$  na równania asymptot wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$ .

Współczynnik  $a$

ma wpływ na równanie asymptoty poziomej.

Współczynnik  $p$

nie ma wpływu na równania asymptot.

Współczynnik  $q$

ma wpływ na równanie asymptoty pionowej.

### Polecenie 3

Przyporządkuj równania asymptot do danej funkcji, przenosząc je do odpowiedniego pola.

$$f(x) = \frac{5}{x+2}$$

$y = 2$

$x = 0$

$y = 0$

$x = -2$

$$f(x) = \frac{-5}{x} + 2$$

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Jakie równanie ma asymptota pionowa wykresu funkcji  $f(x) = \frac{3}{x}$ ? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐  $y = 0$

☐ Wykres funkcji nie posiada asymptoty pionowej

☐  $x = 0$

## Ćwiczenie 2



Jakie równanie ma asymptota pozioma wykresu funkcji  $f(x) = -\frac{4}{x}$ ? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ Wykres funkcji nie posiada asymptoty poziomej

☐  $y = 0$

☐  $x = 0$

### Ćwiczenie 3



Połącz w pary wzory funkcji ze wzorami asymptot wykresów tych funkcji.

$$f(x) = -\frac{1}{x} - 2$$

$$y = 2$$

$$f(x) = -\frac{1}{x-2}$$

$$x = 2$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2$$

$$x = -2$$

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$y = -2$$

### Ćwiczenie 4



Zaznacz prawidłowe zakończenia zdania. Jeśli wykres funkcji  $g$ , powstały w wyniku przesunięcia wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ ,  $a > 0$ , ma asymptoty o równaniach  $x = 5$  oraz  $y = 0$  to:

☐  $ZW_g = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ .

☐ funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów:  $(-\infty, 5)$ ,  $(5, \infty)$ .☐ funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów:  $(-\infty, 5)$ ,  $(5, \infty)$ .☐ miejscem zerowym funkcji jest liczba 5.

☐  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ .

## Ćwiczenie 5



Zaznacz prawidłowe zakończenia zdania. Jeśli wykres funkcji  $g$ , powstałej w wyniku przesunięcia wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ ,  $a < 0$ , ma asymptoty o równaniach:  $x = 0$ ,  $y = -3$ , to:

☐ funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów:  $(-\infty, -3)$ ,  $(-3, \infty)$ .

☐ miejscem zerowym funkcji jest liczba  $(-3)$ .

☐ funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów:  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, \infty)$ .

☐  $ZW_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ .

☐  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ .

## Ćwiczenie 6



Wskaż wszystkie proste będące asymptotami wykresu funkcji  $f(x) = -\frac{3}{x+4} + 5$ .

☐  $x = -3$

☐  $x = -4$

☐  $x = 4$

☐  $y = -3$

☐  $y = 5$

☐  $y = -5$

## Ćwiczenie 7



Wyznacz równania asymptot wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$  wiedząc, że  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ , a  $ZW_f = \mathbb{R} \setminus \{-6\}$ .

## Ćwiczenie 8



Oblicz pole figury ograniczonej osiami układu współrzędnych i prostymi będącymi asymptotami wykresu funkcji  $f(x) = \frac{3}{x-3} - 4$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Gabriela Pendyk

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

13) posługuje się funkcją  $f(x) = \frac{a}{x}$ , w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- rysuje wykres funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ ;
- rysuje asymptoty wykresu funkcji określonej wzorem;
- wyznacza asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ ,  $x \neq 0$  na podstawie wykresu tej funkcji;
- wyznacza asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ ,  $x \neq 0$  na podstawie wzoru funkcji;
- wyznacza asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$  na podstawie wzoru funkcji;
- wyznacza asymptoty wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$  na podstawie wykresu funkcji.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm.

### **Metody i techniki nauczania:**

- burza mózgów;
- praca z tekstem ;

### **Formy pracy:**

- praca całego zespołu klasowego;
- praca indywidualna.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu;
- projektor multimedialny;
- tablica interaktywna/tablica, pisaki/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Uczniowie zapoznają się z materiałem sekcji „Wprowadzenie”.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.
3. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają najważniejsze informacje dotyczące funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ .

#### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zawartymi w sekcji „Przeczytaj”.
2. Następnie nauczyciel omawia przykłady. Uczniowie rysują w zeszycie wykres z przykładu 6. W razie potrzeby nauczyciel wyjaśnia niejasności (np. przypomina przesunięcie wykresu funkcji o wektor).
3. Następnie uczniowie pracują indywidualnie – zapoznają się z symulacją interaktywną oraz wykonują wskazane polecenia. W razie pytań nauczyciel wyjaśnia niejasności.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń 1 – 4.
2. Uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, ocenia aktywność uczniów.

#### **Praca domowa:**

Uczniowie mają za zadanie wykonać ćwiczenia 5 – 8 w sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

- Przesunięcia wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych
- Wykres funkcji  $y = \frac{a}{x}$

**Wskazówki metodyczne:**

- Symulację interaktywną można wykorzystać podczas powtarzania i utrwalania wiadomości z funkcji homograficznej.
- Można symulację wykorzystać na zajęciach poświęconych rysowaniu wykresu funkcji homograficznej,