



Rozwiązywanie nierówności wielomianowych zapisanych w postaci iloczynowej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozwiązywanie nierówności wielomianowych zapisanych w postaci iloczynowej

Źródło: [3D Animation Production Company](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Często zdarza się, że skomplikowana nierówność wyższego stopnia daje się sprowadzić do iloczynu wyrażeń pierwszego stopnia lub kwadratowych. Jest to bardzo wygodna postać, ponieważ aby iloczyn kilku czynników równał się zero wystarczy, aby jeden z tych czynników był równy zero.

W tym materiale utrwalimy i rozszerzymy umiejętności dotyczące rozwiązywania nierówności wielomianowych zapisanych w postaci iloczynowej.

Twoje cele

- Rozwiążesz nierówności zapisane w postaci iloczynowej.
- Wybierzesz nierówność, która posiada określony zbiór rozwiązań.
- Określisz krotność pierwiastka równania.
- Sprowadzisz nierówność wyższego stopnia do postaci iloczynowej i podasz jej zbiór rozwiązań.

Przeczytaj

Definicja: Nierówność wielomianowa

Nierównością wielomianową stopnia n nazywamy każdą z nierówności postaci:

$$W(x) > 0 \text{ lub } W(x) \geq 0 \text{ lub } W(x) < 0 \text{ lub } W(x) \leq 0$$

gdzie:

W – jest wielomianem stopnia n .

Zapisanie nierówności w postaci iloczynowej polega na zapisaniu jej za pomocą iloczynu sum algebraicznych, w których niewiadoma jest jak najmniejszego stopnia.

Aby rozwiązać **nierówność wielomianową** postępujemy podobnie, jak podczas rozwiązywania równań.

Jeżeli wielomian jest przedstawiony w postaci iloczynowej, obliczamy jego pierwiastki, a następnie za pomocą siatki znaków lub metodą graficzną odczytujemy, dla jakich x wielomian przyjmuje żądane wartości.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność $x(x - 5)(x + 2) > 0$.

Lewa strona nierówności jest wielomianem zapisanym w postaci iloczynowej

$$W(x) = x(x - 5)(x + 2).$$

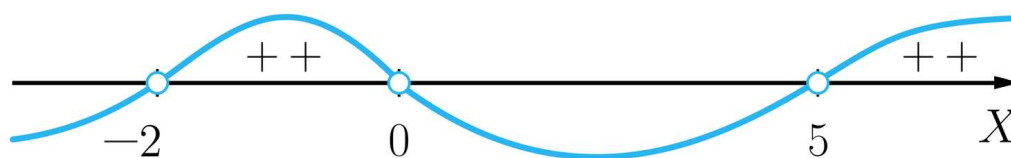
Obliczamy pierwiastki wielomianu.

$$x(x - 5)(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x - 5 = 0 \text{ lub } x + 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 5 \text{ lub } x = -2$$

Szkicujemy wykres wielomianu.



Zbiór rozwiązań nierówności tworzą wszystkie liczby x takie, że $x \in (-2, 0) \cup (5, \infty)$.

Przykład 2

Obliczymy zbiór rozwiązań nierówności $x^4 - 4x^3 + 3x^2 \geq 0$.

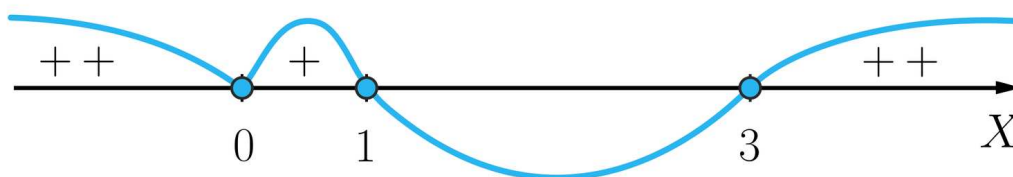
Wyłączymy x^2 przed nawias, aby otrzymać [postać iloczynową nierówności](#)

$$x^2(x^2 - 4x + 3) \geq 0$$

Ze wzorów Viete'a łatwo zauważymy, że liczby 1 i 3 są miejscami zerowymi trójmianu kwadratowego $x^2 - 4x + 3$.

$$x^2(x - 1)(x - 3) \geq 0.$$

Szkicujemy wykres wielomianu $W(x) = x^2(x - 1)(x - 3)$, a następnie z wykresu odczytamy dla jakich x wartość wielomianu $W(x)$ jest nieujemna.



Zauważymy, że $x = 0$ jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Zatem wykres wielomianu nie przecina osi X , ale jest do niej styczny.

$$x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$$

Zbiór rozwiązań nierówności to $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność $-(x - 1)^2(x + 3)^3(x^2 - 4) < 0$.

Zapišemy nierówność w postaci iloczynowej.

$$-(x-1)^2(x+3)^3(x-2)(x+2) < 0$$

Podamy teraz miejsca zerowe wielomianu $W(x) = -(x-1)^2(x+3)^3(x-2)(x+2)$.

$$(x-1)^2 = 0 \text{ lub } (x+3)^3 = 0 \text{ lub } x-2 = 0 \text{ lub } x+2 = 0$$

$$x = 1 \text{ lub } x = -3 \text{ lub } x = 2 \text{ lub } x = -2$$

Określmy krotność pierwiastków:

(-3) – pierwiastek trzykrotny

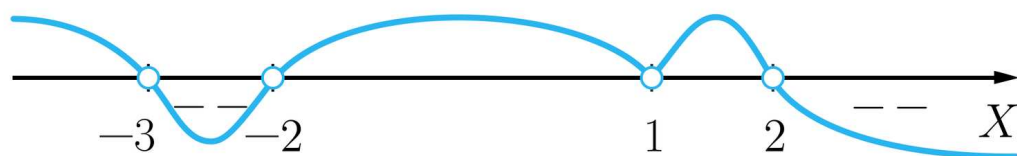
(-2) – pierwiastek jednokrotny

1 – pierwiastek dwukrotny

2 – pierwiastek jednokrotny

Wykres szkicujemy od prawej strony i od dołu, ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze x jest ujemny ($a_7 = -1$).

Zauważymy, że dla pierwiastka dwukrotnego $x = 1$ wykres wielomianu jest styczny do osi X , natomiast dla pierwiastka trzykrotnego $x = -3$ wykres wielomianu przecina oś X .



$$x \in (-3, -2) \cup (2, \infty)$$

Zbiór rozwiązań nierówności to $(-3, -2) \cup (2, \infty)$.

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność $3 \cdot (x+2) \leq x(x+2)$.

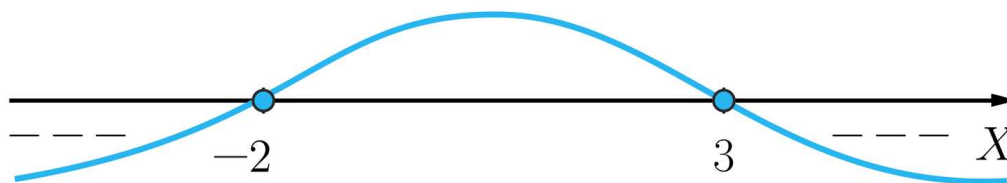
$$3 \cdot (x+2) - x(x+2) \leq 0$$

$$(x+2)(3-x) \leq 0$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 3$$

$$a_2 = -1$$

Wykres funkcji wielomianowej $y = (x + 2)(3 - x)$ zaczniemy rysować od prawej strony i od dołu.



Wielomian jest stopnia 2, więc potrafimy już naszkicować jego wykres.

Jest to parabola, której ramiona są skierowane „do dołu”.

$$x \in (-\infty, -2) \cup \langle 3, \infty)$$

Zbiór rozwiązań nierówności to $(-\infty, -2) \cup \langle 3, \infty)$.

Przykład 5

Rozwiążemy nierówność $(x^3 - 27)(x^2 - 9)(x^3 + 3x^2) < 0$.

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia i wyłączania wspólnego czynnika przed nawias otrzymamy:

$$(x - 3)(x^2 + 3x + 9)(x - 3)(x + 3)x^2(x + 3) < 0$$

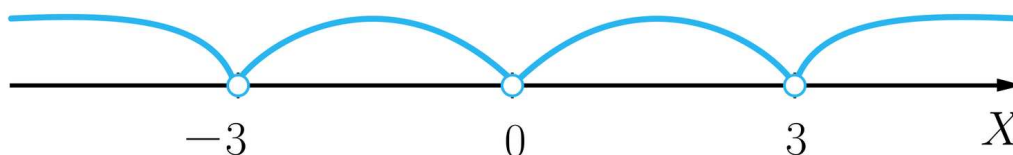
Obliczymy miejsce zerowe wielomianu

$$W(x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)(x - 3)(x + 3)x^2(x + 3)$$

$$x^2(x - 3)^2(x + 3)^2(x^2 + 3x + 9) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ lub } (x - 3)^2 = 0 \text{ lub } (x + 3)^2 = 0 \text{ lub } x^2 + 3x + 9 = 0$$

$x = 0$ (podwójny) lub $x = 3$ (podwójny) lub $x = -3$ (podwójny) lub $\Delta = -27 < 0$ (brak pierwiastków)



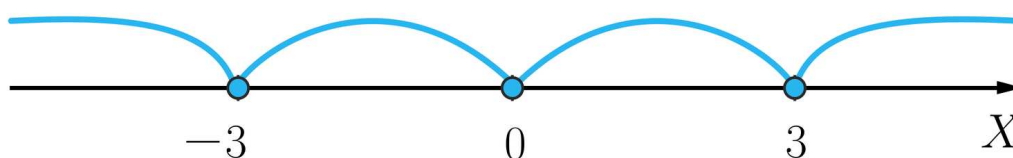
$$x \in \emptyset$$

Nierówność nie posiada rozwiązania.

Przykład 6

Rozwiążemy nierówność $(x^3 - 27)(x^2 - 9)(x^3 + 3x^2) \leq 0$.

Korzystając z rozwiązania z przykładu 5 możemy naszkicować wykres.



$$x \in \{-3, 0, 3\}.$$

Słownik

nierówność wielomianowa

każda z nierówności postaci:

$$W(x) > 0 \text{ lub } W(x) \geq 0 \text{ lub } W(x) < 0 \text{ lub } W(x) \leq 0$$

gdzie:

W – jest wielomianem stopnia n

postać iloczynowa nierówności

zapisanie nierówności za pomocą iloczynu sum algebraicznych, w których niewiadoma jest jak najniższego stopnia

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać przykłady, a następnie sprawdź poprawność rozwiązania, analizując metody przedstawione w samouczku.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DLqx5E9ki>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej nierówności wielomianowych w postaci iloczynowej.

Polecenie 2

Dany jest wielomian $W(x) = -x^2(x + 2)(x - 6)^4$. Rozwiąż nierówności $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$. Uzupełnij tabelę. Przeciągnij poprawne rozwiązania w odpowiednie miejsca.

$W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$

$W(x)$	Rozwiązanie	
$W(x) > 0$		
$W(x) \geq 0$		
$W(x) < 0$		
$W(x) \leq 0$		

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wskaż zbiór rozwiązań nierówności

$$-2 \cdot (x - 3)(x + 1)(x^2 + 1) \geq 0.$$

☐ $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$

☐ $(-1, 3)$

☐ $\langle -1, 3 \rangle$

☐ $\langle -1, 1 \rangle \cup \langle 1, 3 \rangle$

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wskaż nierówność, której zbiorem rozwiązań jest $(4, \infty)$.

☐ $x^2(x^2 - 16)(x + 4) > 0$

☐ $x^2(x^2 - 16)(x - 4) > 0$

☐ $x(x^2 - 16)(x + 4) > 0$

☐ $x^2(x^2 - 4)^2(x - 16) < 0$

Ćwiczenie 3



Wybierz i przeciągnij odpowiednią sumę algebraiczną, aby nierówność nie posiadała rozwiązania.

$$-(x-3)^2 \cdot (x^2-1) \cdot \boxed{} > 0$$

$(x+1)$

(x^2-1)

$(x+3)$

$(x-3)$

Ćwiczenie 4



Wpisz brakujące liczby, aby rozwiązaniem nierówności $(x-2)(x+3)(x-5)^2(x-1)^4 \geq 0$ był zbiór

$$(-\infty, \boxed{}) \cup \langle \boxed{}, \infty).$$

Ćwiczenie 5



Połącz nierówność z odpowiadającym jej zbiorem rozwiązań.

$$(x^2-16)(x+1)(x+4) \geq 0$$

$$(-\infty, -1) \cup \langle 4, \infty)$$

$$(x+4)^2(x^2-1) \geq 0$$

$$(-\infty, -1) \cup \langle 1, \infty)$$

$$(x+1)^2(x^2-16) \geq 0$$

$$(-\infty, -4) \cup \langle 4, \infty) \cup \{-1\}$$

$$(x+4)(x-4)^2(x-1) \geq 0$$

$$(-\infty, -4) \cup \langle 1, \infty)$$

Ćwiczenie 6



Wybierz wszystkie nierówności, których zbiorem rozwiązań jest zbiór liczb rzeczywistych.

☐ $(x+2)^2(x+1)^2 > 0$

☐ $(x - \sqrt{5})^8 \geq 0$

☐ $(x^2 - 4)(x - 2)(x^3 + 2x^2) \geq 0$

☐ $(x+1)^4(x-1)^3 \geq 0$

☐ $[x+0, (3)]^7 \leq 0$

☐ $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 6x + 5) \geq 0$

☐ $-2 \cdot (x-2)(x-3)(x^2 - 5x + 6) \leq 0$

☐ $3 \cdot (x-5)^2(x + \sqrt{2})^2 \geq 0$

☐ $-(x+2)^2(x+1)^2 \leq 0$

Ćwiczenie 7



Uzupełnij zbiór rozwiązań nierówności $2(x-1) \leq x(x-1) + 2x^2 - 2x$ przez przeciągnięcie wybranych zbiorów w odpowiednie miejsca.

$x \in$ $\cup$

☐ $\langle \frac{2}{3}, 1 \rangle$

☐ $\langle 0, \infty \rangle$

☐ $\langle -1, \infty \rangle$

☐ $(-\infty, -\frac{2}{3})$

☐ $\langle 1, \infty \rangle$

☐ $\langle -1, -\frac{2}{3} \rangle$

☐ $(-\infty, \frac{2}{3})$

Ćwiczenie 8



Zbiorem rozwiązań nierówności $(x - a)(x - b)^2(x - c)^3 \geq 0$ dla $a < b < c$ jest $(-\infty, 1) \cup \langle 3, \infty) \cup \{2\}$. Oblicz a, b, c . Wpisz poprawne liczby.

$a =$

$b =$

$c =$

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie nierówności wielomianowych zapisanych w postaci iloczynowej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

1) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu $W(x) > 0$, $W(x) \geq 0$, $W(x) < 0$, $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje nierówności zapisane w postaci iloczynowej
- wybiera nierówność, która posiada określony zbiór rozwiązań
- określa krotność pierwiastka równania
- sprowadza nierówności wyższych stopni do postaci iloczynowej i podaje ich zbiór rozwiązań
- tworzy algorytmy rozwiązywania nierówności różnych typów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- stoliki zadaniowe
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej przez nauczyciela uczniowie podają przykłady prostych nierówności zapisanych w postaci iloczynu. Uczniowie podają rozwiązania tych nierówności.

Faza realizacyjna:

1. Każdy uczeń otrzymuje od nauczyciela do rozwiązania 10 przykładów prostych nierówności zapisanych w postaci iloczynowej typu: $(x + 7)x > 0$, $x^2 - 1 > 0$, $x^2 + 2 < 0$. Następnie stara się podzielić nierówności na grupy, według własnych kryteriów.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 4 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują dokonane podziały. Wskazują zbiór rozwiązań nierówności.
3. Przykłady rozwiązań nierówności znajdujące się w części Przeczytaj uczniowie analizują w parach. Wspólne z nauczycielem wyjaśniają wątpliwości.
4. Uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem.
5. Uczniowie w parach rozwiązują zadania metodą stolików zadaniowych. Każdy stół zawiera 2 zadania interaktywne. Warunkiem przejścia do następnego stolika jest poprawne rozwiązanie danych zadań. Para, która najszybciej rozwiąże wszystkie zadania otrzymuje stopień bardzo dobry.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące sposobów rozwiązywania nierówności zapisanych w postaci iloczynowej.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie, którym nie udało się zakończyć rozwiązywania zadań rozwiązują pozostałe zadania w domu.

Materiały pomocnicze:

[Pierwiastki równań](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być pomocna w rozwiązywaniu nierówności kwadratowych.