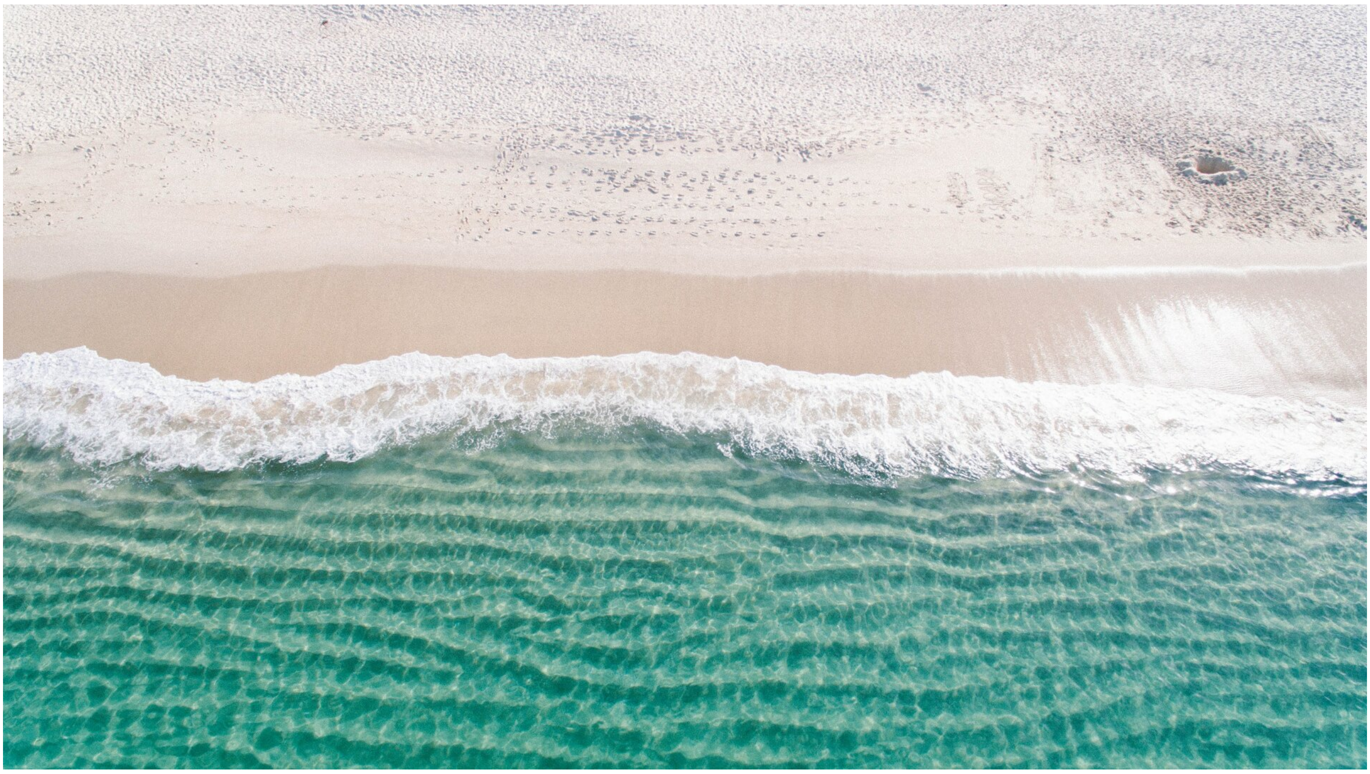

Wartości funkcji trygonometrycznych sumy i różnicy kątów

Wartości funkcji trygonometrycznych sumy i różnicy kątów

Źródło: feezbot2000 wx, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Do tej pory obliczaliśmy wartości funkcji trygonometrycznych dla konkretnego argumentu. W tej lekcji przedstawimy w jaki sposób zapisać funkcje trygonometryczne sumy argumentów x i y za pomocą funkcji trygonometrycznych tych argumentów. Wykorzystamy wzory redukcyjne oraz okresowość funkcji trygonometrycznych.

Twoje cele

- Zapoznasz się ze wzorami na wartości funkcji trygonometrycznych sumy i różnicy argumentów.
- Wykorzystasz poznane wzory do wykonywania obliczeń.

Przeczytaj

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy argumentów

Podstawowym wzorem, z którego będziemy korzystać w tej lekcji, to wzór na sinus sumy argumentów:

> **Twierdzenie: sinus sumy argumentów**
>
> $\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$, dla $x,y\in\mathbb{R}$.

Przedstawimy sposób wykorzystania tego wzoru:

> **Przykład 1**
>
> Obliczymy $\sin 6^\circ\cos 24^\circ+\cos 6^\circ\sin 24^\circ$.
>
> Korzystając ze wzoru $\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$
>
> otrzymujemy:
>
> $\sin 6^\circ\cos 24^\circ+\cos 6^\circ\sin 24^\circ=\sin(6^\circ+24^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.

Korzystając ze wzoru na sinus sumy argumentów wyprowadzimy wszystkie potrzebne wzory na sinus, cosinus, tangens sumy lub różnicy argumentów.

Różnica $x-y$ to inaczej suma $x+(-y)$.

Zatem $\sin(x-y)=\sin(x+(-y))$, i korzystając ze wzoru na sinus sumy otrzymujemy:

$\sin\ (x+(-y))=\sin x\cdot\ \cos\ (-y)+\ \cos x\cdot\ \sin\ (-y)$.

Ponieważ funkcja $f(x)=\sin x$ jest funkcją nieparzystą i funkcja $g(x)=\cos x$ jest funkcją parzystą otrzymujemy:

$\sin x\cdot\ \cos\ (-y)+\ \cos x\cdot\ \sin\ (-y)=\sin x\cdot\ \cos y-\ \cos x\cdot\ \sin y$.

> **Twierdzenie: sinus różnicy argumentów**
>
> $\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$, dla $x,y\in\mathbb{R}$.

Wyznaczymy teraz wzór na cosinus sumy argumentów. W tym celu wykorzystamy wzór redukcyjny: $\cos(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

A zatem:

$\cos(x+y)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-(x+y)\right)=\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-y\right)=$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y.$

> **Twierdzenie: cosinus sumy argumentów**
>
> $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$, dla $x, y \in \mathbb{R}$.

Analogicznie wyprowadzimy wzór na cosinus różnicy:

$\cos(x - y) = \cos(x + (-y)) = \cos x \cdot \cos(-y) - \sin x \cdot \sin(-y) =$

$= \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

> **Twierdzenie: cosinus różnicy argumentów**
>
> $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$, dla $x, y \in \mathbb{R}$.

> **Przykład 2**
>
> Obliczymy $\cos 13^\circ \cos 73^\circ + \sin 167^\circ \sin 433^\circ$.
>
> **Rozwiązanie**
>
> $\cos 13^\circ \cos 73^\circ + \sin 167^\circ \sin 433^\circ =$
>
> $= \cos 13^\circ \cos 73^\circ + \sin 13^\circ \sin 73^\circ =$
>
> $= \cos(13^\circ - 73^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$

> **Przykład 3**
>
> Obliczymy, jaki zbiór wartości ma funkcja $f(x) = 2\cos x + \sin x$.
>
> **Rozwiązanie**
>
> Zauważmy, że dla każdej wartości rzeczywistej x zachodzi równość
>
> $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ oraz że $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$.
>
> Zapiszmy wyrażenie $y = 2\cos x + \sin x$ jako:
>
> $\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin x\right).$
>
> Zauważmy, że liczby $\frac{2}{\sqrt{5}}$ i $\frac{1}{\sqrt{5}}$ mają tę własność, że suma ich kwadratów jest równa 1. Zatem liczby te są odpowiednio sinusem i cosinusem pewnego argumentu α. Wobec tego wzór funkcji można zapisać następująco:
>
> $y = \sqrt{5}(\sin\alpha \cdot \cos x + \cos\alpha \cdot \sin x),$

czyli $y=\sqrt{5}\sin(\alpha+x)$.

Zatem zbiorem ich wartości funkcji $y=2\cos x+\sin x$ jest przedział $\left\langle -\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\rangle$.

Przedstawimy teraz wzory na tangens sumy oraz różnicy argumentów. W odróżnieniu od poprzednich wzorów, niezbędne będą założenia dotyczące wartości argumentów.

Twierdzenie: tangens sumy argumentów

Załóżmy, że $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x+y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$.

Wówczas: $\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}$.

Dowód

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}=$$

$$=\frac{\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x\cos y}}{\frac{1}{\cos x\cos y}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}}{1+\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}.$$

Twierdzenie: tangens różnicy argumentów

Załóżmy, że $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x-y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$.

Wówczas $\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$.

Dowód

$$\operatorname{tg}(x-y)=\operatorname{tg}(x+(-y))=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(-y)}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(-y)}=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y}$$

Przykład 4

Obliczymy $\frac{\operatorname{tg}130^\circ-tg70^\circ}{1+\operatorname{tg}130^\circ\operatorname{tg}70^\circ}$.

Rozwiązanie

Korzystając ze wzoru na tangens sumy argumentów otrzymujemy:

$$\frac{\operatorname{tg}130^\circ-\operatorname{tg}70^\circ}{1+\operatorname{tg}130^\circ\operatorname{tg}70^\circ}=\operatorname{tg}(130^\circ-70^\circ)=\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}.$$

Przykład 5

Uzasadnimy, że $\frac{\operatorname{tg}15^\circ-1}{1+\operatorname{tg}15^\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy fakt, że $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Wówczas zachodzi równość:

$\frac{\operatorname{tg} 15^\circ - 1}{1 + \operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} 15^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \operatorname{tg}(15^\circ - 45^\circ) = \operatorname{tg}(-30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Słownik

sinus sumy

wzór na sinus sumy argumentów, na podstawie którego można wyprowadzić wszystkie wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy argumentów.

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z filmem, a następnie rozwiąż zadania.

Wystąpił błąd

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego równania okręgu, do którego należą dane punkty.

Polecenie 2

Oblicz $\sin 105^\circ$.

Polecenie 3

Oblicz $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wartości funkcji trygonometrycznych sumy i różnicy kątów

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII Trygonometria, zakres podstawowy

Uczeń:

2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora

3) znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej

5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje wzory na wartości funkcji trygonometrycznych sumy i różnicy argumentów,
- wykorzystuje wzory do wykonywania obliczeń,
- szacuje i porównuje wartości wyrażeń zawierajacych funkcje trygonometryczne
- tworzy algorytm obliczajacy sumę lub różnicę funkcji trygonometrycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Film samouczek” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z medium w sekcji „Film samouczek”.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum pięć pytań do tekstu. Uwaga: każde z pytań musi rozpoczynać się od słowa „dlaczego”. Następnie spacerują po klasie i na znak umówionego dźwięku szukają kogoś do pary, zadają i odpowiadają na pytania sformułowane podczas czytania tekstu. Po zakończonym spacerze młodzież wykonuje ćwiczenia nr 1-5 w sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel czyta polecenie numer 3 - „Oblicz $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$” z sekcji „Film samouczek”. Uczniowie zapoznają się treścią materiału, następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 6, 7 i 8, a następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką. Praca indywidualna – implementacja poznanej techniki do rozwiązywania problemów informatycznych – wykonywanie ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Wartości funkcji trygonometrycznych sumy i różnicy kątów”).

Materiały pomocnicze:

- Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego
- Tożsamości trygonometryczne

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Film samouczek” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Wartości funkcji trygonometrycznych sumy i różnicy kątów”.