



Prostopadłość i równoległość na powierzchni kuli

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film edukacyjny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Prostopadłość i równoległość na powierzchni kuli

Źródło: dostępny w internecie: [PIRO4D](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Z lekcji geografii oraz ćwiczeń z globusem wykonywanych w różnych okolicznościach pamiętamy, że na globusie są południki i równoleżniki. Ich położenie względem siebie jest bardzo łatwe do określenia, nawet tylko na podstawie obserwacji, bez dokonywania pomiarów. Czy określając ich położenie możemy użyć jakichś terminów matematycznych?

W tym materiale zajmiemy się prostopadłością i równoległością na płaszczyźnie i na powierzchni kuli. Materiał zawarty w tej lekcji jest materiałem nadobowiązkowym, więc jeśli nie interesuje Cię ta tematyka, możesz po prostu lekcję pominąć.

Twoje cele

- Przypomnisz sobie wiadomości o prostych prostopadłych i prostych równoległych na płaszczyźnie.
- Określisz proste prostopadłe na sferze.
- Poznasz własności prostych sferycznych prostopadłych.
- Porównasz własności prostych prostopadłych na płaszczyźnie i własności prostopadłych prostych sferycznych.
- Poszukasz prostych sferycznych równoległych.
- Sformułujesz odpowiednik piątego postulat Euklidesa dla sfery.

Przeczytaj

Jak mogą być położone względem siebie dwie proste na płaszczyźnie?

Przykład 1

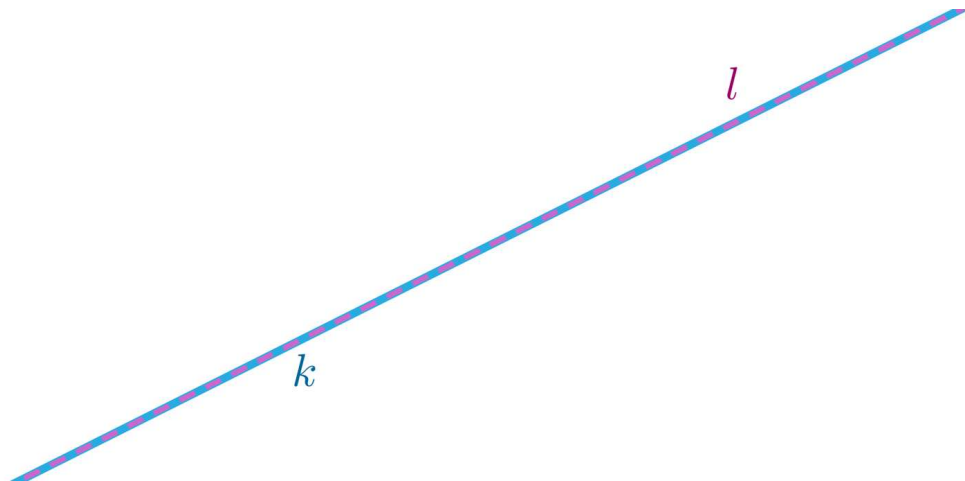
Dwie proste na płaszczyźnie mogą pokrywać się, jak proste k i l przedstawione na poniższych ilustracjach.

Co to oznacza na płaszczyźnie bez układu współrzędnych?

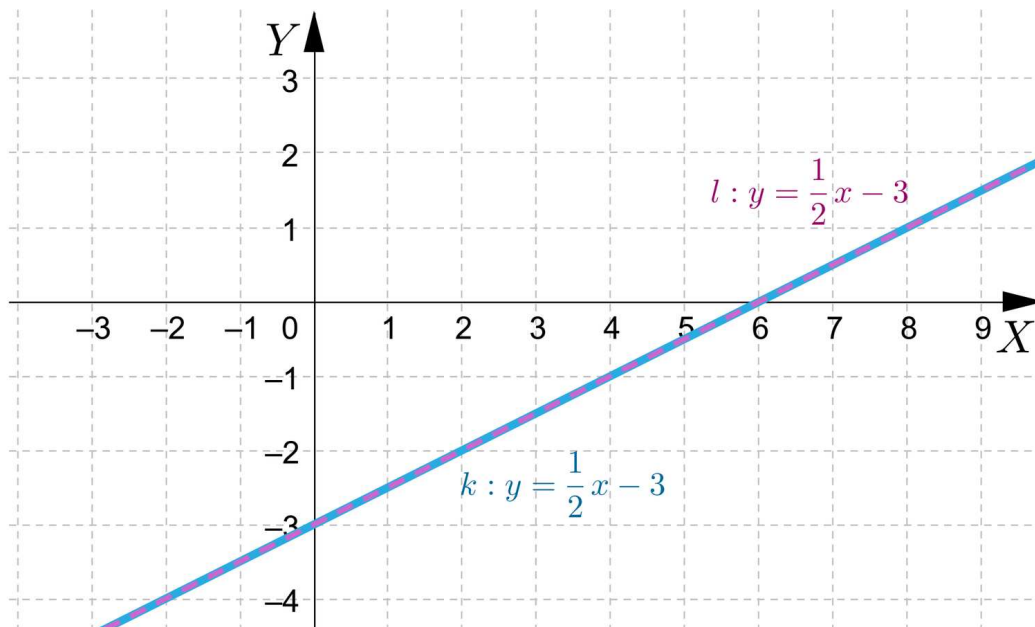
Co to oznacza na płaszczyźnie z układem współrzędnych?

Rozwiązanie

Proste pokrywające się mają wszystkie punkty wspólne. Czasami przyjmujemy je za jedną prostą, jeśli zagadnienie, w którym występują nie wymaga ich odróżnienia.



Na płaszczyźnie kartezjańskiej (z układem współrzędnych) posługujemy się równaniami prostych. Proste pokrywające się mają takie same równania:



Przykład 2

Dwie proste na płaszczyźnie mogą mieć jeden punkt wspólny.

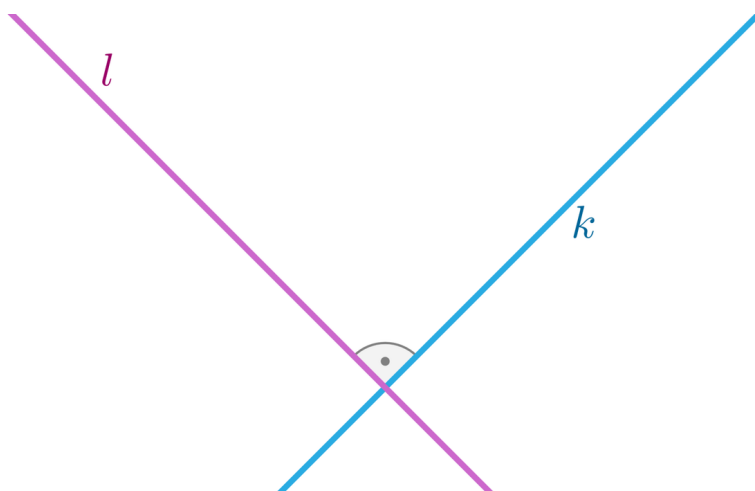
Co to oznacza na płaszczyźnie bez układu współrzędnych?

Co to oznacza na płaszczyźnie z układem współrzędnych?

Czy w tym przypadku wyróżniamy jakieś szczególne położenie prostych względem siebie?

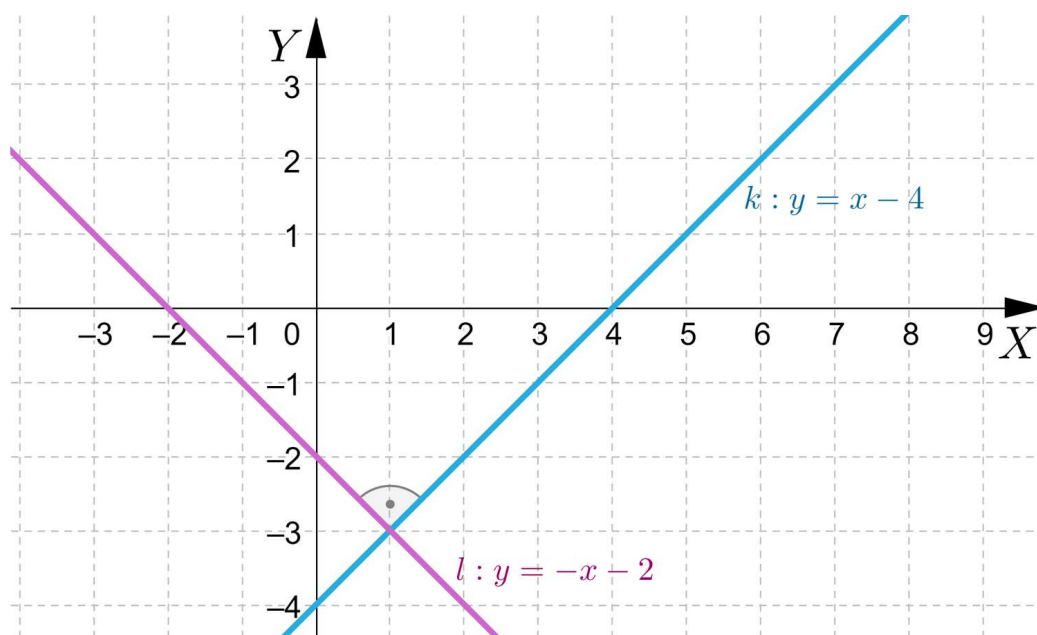
Rozwiązanie

Proste, które mają jeden punkt wspólny, przecinają się. Jeżeli przecinają się pod kątem prostym, nazywamy je prostymi prostopadłymi. Bardziej formalnie możemy powiedzieć, że proste są prostopadłe, jeśli tworzą przystające kąty przyległe:



Na płaszczyźnie kartezjańskiej możemy określić na podstawie ich równań, czy są do siebie **prostopadłe**. Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ i

$y = a_2x + b_2$ są do siebie prostopadłe, jeśli iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy (-1) : $a_1a_2 = -1$. Przykład widać poniżej:



Przykład 3

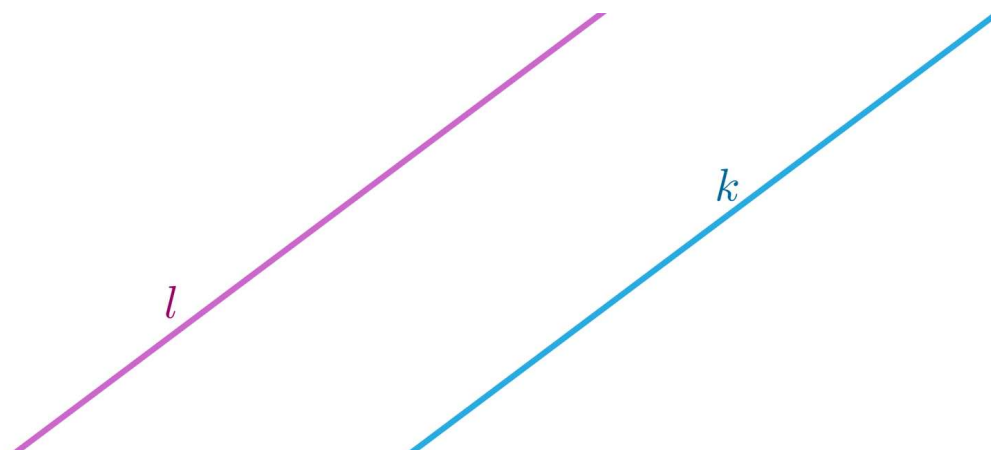
Dwie proste na płaszczyźnie mogą nie mieć punktów wspólnych.

Co to oznacza na płaszczyźnie bez układu współrzędnych?

Co to oznacza na płaszczyźnie z układem współrzędnych?

Rozwiązanie

Proste, które nie mają punktu wspólnego, nazywamy równoległymi:

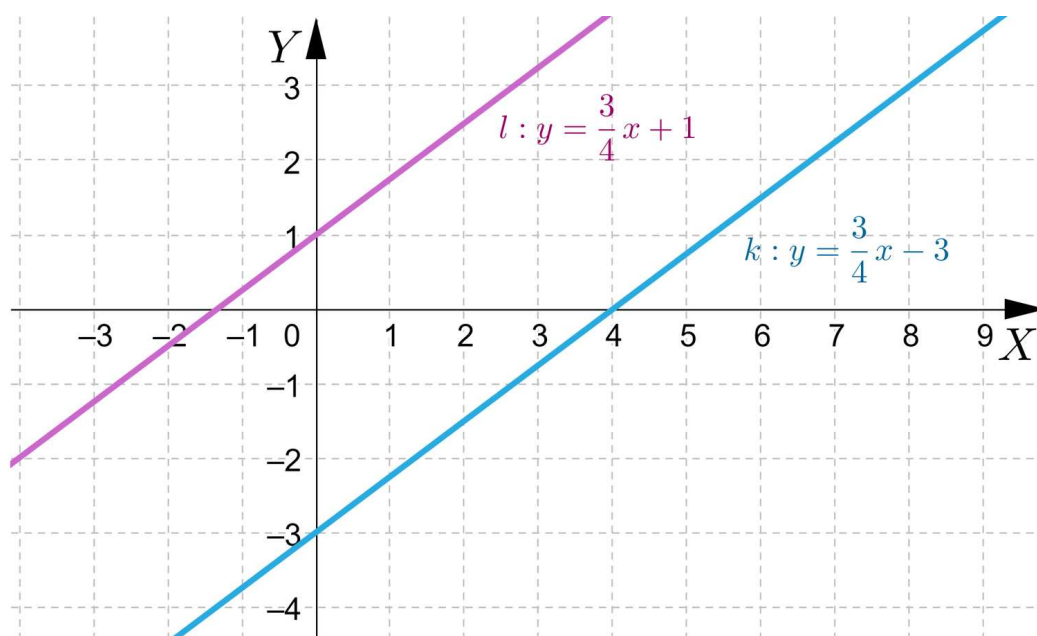


Jednocześnie jednak proste pokrywające się uznajemy za szczególny przypadek prostych równoległych.

Euklides, sławny grecki matematyk, sformułował swój sławny aksjomat dotyczący **równoległości** i na podstawie tego **aksjomatu** każdy uczeń wie, że:

Przez dany punkt nie leżący na danej prostej można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do danej prostej.

Na płaszczyźnie kartezjańskiej możemy określić na podstawie równań prostych, czy są one do siebie równoległe. Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są do siebie równoległe, jeśli ich współczynniki kierunkowe są równe: $a_1 = a_2$. Przykład poniżej:



Czy na powierzchni kuli istnieją proste sferyczne prostopadłe i równoległe?

Jakie mają własności?

Geometria sferyczna zajmuje się działem geometrii dotyczącym badania właściwości figur należących do powierzchni kuli. Rolę prostych odgrywają koła wielkie sfery (czyli powierzchni kuli).

Przykład 4

Wyobraźmy sobie, że szyny kolejowe pewnej prostoliniowej trasy mogłyby być przedłużone i prowadzić dookoła kuli ziemskiej. Czy mogłyby być one uważane za równoległe proste sferyczne?

Zilustrujemy postawiony problem na sferze (np. na globusie).



Możesz przyjąć za początek torów miejsce swojego zamieszkania. „Wybudujemy” tory przez morza i oceany.

Oczywiście, musimy zrezygnować z rzeczywistej proporcji pomiędzy rozstawem szyn a promieniem sfery, jeśli chcemy narysować dwie szyny, które można odróżnić od siebie.

Odpowiedzmy na pytania:

1. Jak muszą być położone względem siebie szyny kolejowe, aby mógł po nich jechać pociąg?
2. Czy skonstruowane na sferze tory składają się z dwóch sferycznych prostych?

Rozwiązanie

ad 1) Szyny muszą być równoległe, odległość między nimi w każdym miejscu musi być taka sama.

ad 2) Tory na sferze nie składają się z dwóch prostych sferycznych, ponieważ nawet jeśli jeden tor pokrywa się z okręgiem wielkim, to ten drugi, równo od pierwszego oddalony, nie jest okręgiem wielkim.

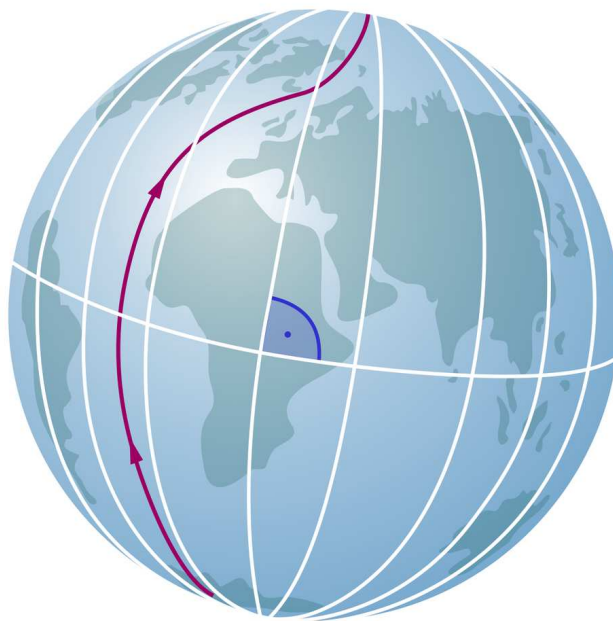
Przykład 5

Wyobraźmy sobie, że startujemy z Bieguna Południowego i podążamy prosto na północ, ponieważ chcemy dotrzeć do Bieguna Północnego jak najkrótszą drogą.

Czy w swojej wędrówce przetniemy równik? Jeśli tak, to pod jakim kątem?

Rozwiązanie

Oczywiście przetniemy równik, ponieważ jest on położony pomiędzy dwoma biegunami.



Jeżeli chcemy poruszać się najkrótszą drogą pomiędzy biegunami (idealizując oczywiście sytuację), to równik przetniemy pod kątem prostym.

Słownik

prostopadłość

relacja (czyli w tym przypadku wzajemne położenie) między dwiema prostymi, dwiema płaszczyznami lub prostą i płaszczyzną

proste prostopadłe

proste, które tworzą przystające kąty przyległe

równoległość

relacja (czyli w tym przypadku wzajemne położenie) między obiektami takimi jak proste, płaszczyzny, odcinki, półproste

proste równoległe

proste, które nie mają punktu wspólnego lub pokrywają się

Euklides

żyjący na przełomie IV i III w. p.n.e. sławny grecki matematyk, który jako pierwszy uporządkował pojęcia geometrii na płaszczyźnie; w swoim dziele “Elementy” sformułował **aksjomaty**, czyli oczywiste, przyjmowane bez dowodu prawa geometrii

piąty postulat Euklidesa

piąty aksjomat, dotyczący równoległości prostych, który z nauki w szkole znamy w następującym brzmieniu: „Przez dany punkt nie leżący na danej prostej można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do danej prostej”

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem edukacyjnym. Postaraj się odpowiedzieć na stawiane pytania, zanim lektor poda odpowiedź.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dum148br1>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej zagadnienia prostopadłości i równoległości prostych sferycznych.

Polecenie 2

Narysuj lub zaznacz na powierzchni swojej kulki dwie prostopadłe proste sferyczne. Ile istnieje sferycznych prostych prostopadłych do obu?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Na podstawie konstrukcji globusa uzupełnij poniższy tekst, przeciągając prawidłowe zwroty.

Równoleżnik, który nie jest równikiem, sferyczną prostą, ponieważ okręgiem wielkim. Taki równoleżnik powierzchni kuli na dwie części. Równik i dowolny inny równoleżnik być uznane za równoległe sferyczne proste.

nie jest

jest

mogą

nie jest

jest

dzieli

nie mogą

nie dzieli

przystające

Ćwiczenie 2



Statek płynie przez Pacyfik w odległości 50 km od równika. Wyjaśnij, dlaczego nie jest to najkrótsza droga między dwoma dowolnymi punktami położonymi w odległości 50 km od równika.

Ćwiczenie 3



Zaznacz czy zdanie jest prawdziwe czy fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Na płaszczyźnie można skonstruować trzy proste a , b , c tak położone, że każde dwie sąsiednie (włączając c i a) są prostopadłe do siebie.	☐	☐

Ćwiczenie 4



Czy można na sferze skonstruować trzy sferyczne proste a , b , c tak, że każde dwie sąsiednie (włączając c i a) są prostopadłe do siebie? Użyj dowolnych kulistych przedmiotów, aby zbadać ten problem.

Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Tak, można.

☐ Nie można.



Poniższe zdjęcie przedstawia nowoczesną budowlę.



Źródło: Ricardo Gomez Angel, dostępny w internecie: www.unsplash.com, domena publiczna.

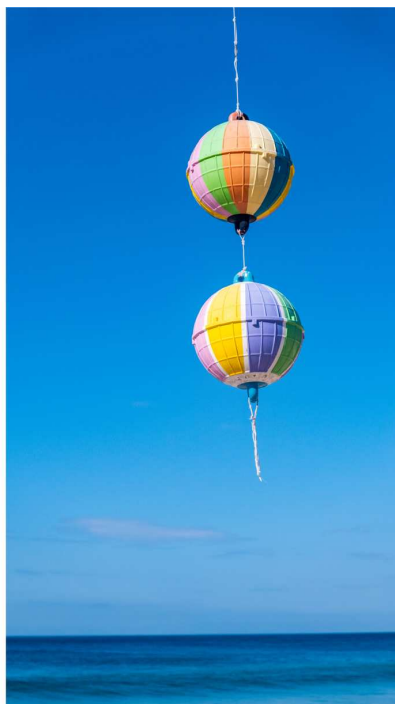
Popatrz na figury geometryczne tworzące szkielet tej budowli i wskaż poniżej wszystkie prawdziwe według Ciebie zdania:

- ☐ Szkielet ma postać siatki, której elementy są czworokątami.
- ☐ Budowla ma kształt kuli.
- ☐ Szkielet budowli tworzą odcinki sferyczne („ćwiartki prostych sferycznych”) i okręgi.
- ☐ Odcinki sferyczne są prostopadłe do okręgów.

Ćwiczenie 6



Na poniższym zdjęciu widzisz elementy figur geometrycznych na sferze.



Źródło: Sangga Rima Roman Selia, dostępny w internecie: www.unsplash.com, domena publiczna.

Ile sferycznych prostych widzisz na powierzchni każdej z kul? Jakie jeszcze figury widzisz? Czy są na tych sferach części sferycznych prostych? Jak są położone w stosunku do sferycznej prostej?

Ćwiczenie 7



Piąty postulat Euklidesa w wersji zawartej w „Elementach” ma brzmienie:

„Jeżeli prosta przecina dwie proste, tworząc dwa kąty wewnętrzne po tej samej stronie o sumie mniejszej niż dwa kąty proste, to te dwie proste przecinają się po tej stronie, po której znajdują się owe kąty wewnętrzne.”

W szkole uczymy się następującej wersji tego postulatu:

„Przez dany punkt nie leżący na danej prostej można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do danej prostej.”

Wykaż równoważność tych dwóch wersji.

Ćwiczenie 8



- a) Sformułuj postulat równoległości dla sfery zastępując słowo “prosta” słowami “okrąg wielki”. Wykonaj na sferze konstrukcję podobną do tej, którą wykonujemy, ilustrując piąty postulat Euklidesa na płaszczyźnie. Wyjaśnij, czy piąty aksjomat Euklidesa na sferze ma sens.
- b) Zapisz swój własny postulat równoległości, który jest prawdziwy w geometrii na sferze.

Dla nauczyciela

Autor: Anna Rybak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Prostopadłość i równoległość na powierzchni kuli

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje.

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- pogłębia wiadomości o prostych prostopadłych i prostych równoległych na płaszczyźnie;
- bada wzajemne położenie prostych na sferze;
- określa własności prostych sferycznych prostopadłych;
- porównuje własności prostych prostopadłych na płaszczyźnie i własności prostopadłych prostych sferycznych;

- poszukuje prostych sferycznych równoległych;
- formułuje odpowiednik piątego postulatu Euklidesa dla sfery.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- strategia czynnościowego nauczania matematyki;
- strategia porównawcza.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- dyskusja;
- eksperyment;
- ćwiczenia.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputer z dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- globusy, kulki styropianowe, wykałaczki, gumki recepturki, nitki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Prostopadłość i równoległość na powierzchni kuli”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj” i przypominają wiadomości o wzajemnym położeniu prostych na płaszczyźnie.
2. Uczniowie zapoznają się z filmem z sekcji „Film edukacyjny”, podczas jego trwania wykonują wskazane czynności na płaszczyźnie i na kulistym przedmiocie, starają się odpowiedzieć na postawione pytania, zanim zrobi to lektor (czyli wykonują Polecenie 1). Wykonują indywidualnie Polecenie 2 z tej sekcji. Dyskutują nad swoimi rozwiązaniami.
3. Uczniowie wykonują wspólnie Ćwiczenia 1 – 6 z sekcji „Sprawdź się”, omawiają wspólnie swoje rozwiązania, uzasadniając odpowiedzi.

4. Dyskutują nad piątym postulatem Euklidesa, jego „podwójnym” sformulowaniem. Podczas burzy mózgów generują pomysły na wykazanie równoważności tych sformułowań. Wspólnie wykazują tę równoważność.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel zadaje uczniom pytania: Co było w lekcji trudne? Co było w lekcji interesujące? Odnosi się do elementów wskazanych jako trudne.
2. Uczniowie krótko podsumowują swoje osiągnięcia, rozwijając zdanie: Na dzisiejszych zajęciach najważniejsze dla mnie było...

Praca domowa:

Uczniowie wykonują Ćwiczenie 8 – sformułowanie własnego postulatu równoległości dla sfery z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Proste i odcinki prostopadłe i równoległe](#)
- [Proste i odcinki równoległe](#)

Wskazówki metodyczne:

- W tej lekcji występuje strategia czynnościowego nauczania matematyki i strategia porównawcza.
- Najważniejsza w lekcji jest własna praca badawcza uczniów i samodzielne odkrywanie przez nich wiedzy.
- Film (zwłaszcza pierwszą jego część poświęconą prostopadłości i równoległości prostych na płaszczyźnie) można też wykorzystać do powtórzenia wiadomości z zakresu tych zagadnień. Drugą część filmu, poświęconą prostopadłości i równoległości na sferze można wykorzystać przy omawianiu zagadnień związanych z kulą. Będzie to dobre uzupełnienie wiadomości, które zawarte są w podstawie programowej o te spoza podstawy z matematyki. Podczas omawiania wniosku o nieistnieniu równoległości na sferze można nawiązać do historii matematyki, zwłaszcza do postulatów Euklidesa.