



## Wyznaczanie rozwiązań równania kwadratowego w zależności od parametru

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Wyznaczanie rozwiązań równania kwadratowego w zależności od parametru

Źródło: Volker Glätsch, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale wkraczamy w zaawansowaną analizę równań kwadratowych z parametrem.

Będziemy wyznaczać rozwiązania równania kwadratowego w zależności od parametru. Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia ustalimy wartości parametrów, dla których spełnione są określone warunki.

### Twoje cele

- Wyznaczysz rozwiązania równania spełniające podane warunki w zależności od parametru występującego w równaniu.
- Znajdziesz wszystkie takie rzeczywiste parametry, aby rozwiązania równania spełniały określony warunek.

# Przeczytaj

## Wzory Viete'a

Jeżeli równanie kwadratowe  $ax^2 + bx + c = 0$ , gdzie  $a \neq 0$ , ma pierwiastki  $x_1, x_2$ , to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

oraz

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

**Wzory Viete'a** są bardzo często wykorzystywane podczas rozwiązywania równań kwadratowych z parametrem.

Na przykład, aby obliczyć wartość bezwzględną różnicy pierwiastków, przekształcimy odpowiednio dane wyrażenie.

$$\begin{aligned}|x_1 - x_2| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \\ &= \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}}\end{aligned}$$

Aby obliczyć sumę sześcianów pierwiastków równania kwadratowego wykonamy odpowiednie przekształcenia.

$$\begin{aligned}x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right] = \\ &= \left(-\frac{b}{a}\right)\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3 \cdot \frac{c}{a}\right]\end{aligned}$$

### Przykład 1

Obliczymy, dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 + (2m - 1)x + 2 - m = 0$  ma dwa różne rozwiązania  $x_1, x_2$ , dla których spełniony jest warunek  $|x_1 - x_2| = 3$ .

Rozpatrzmy następujące warunki:

$$\begin{cases} 1. a \neq 0 \\ 2. \Delta > 0 \\ 3. |x_1 - x_2| = 3 \end{cases}$$

$$1. a = 1 \neq 0$$

$$\begin{aligned}2. \Delta &= (2m - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - m) = 4m^2 - 4m + 1 - 8 + 4m = 4m^2 - 7 \\ \Delta > 0 &\Leftrightarrow 4m^2 - 7 > 0\end{aligned}$$

$$(2m - \sqrt{7})(2m + \sqrt{7}) = 0$$

$$m = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ lub } m = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \infty\right)$$

$$3. |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2}$$

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2} = \sqrt{(2m - 1)^2 - 4 \cdot (2 - m)} = \sqrt{4m^2 - 7}$$

$$\sqrt{4m^2 - 7} = 3 \quad |()^2$$

$$4m^2 - 7 = 9$$

$$4m^2 - 16 = 0 \quad | : 4$$

$$m^2 - 4 = 0$$

$$m = 2 \text{ lub } m = -2$$

$$-2 \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \infty\right)$$

$$2 \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, +\infty\right)$$

Zatem równanie ma dwa różne rozwiązania spełniające warunek  $|x_1 - x_2| = 3$  dla  $m \in \{-2, 2\}$ .

## Przykład 2

Wyznamy takie wartości parametru  $p$ , dla których równanie  $x^2 - (p - 1)x + 2 = 0$  ma dwa różne rozwiązania  $x_1, x_2$  spełniające warunek  $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 = 10$ .

Aby były spełnione warunki zadania musimy uwzględnić następujące założenia:

$$\begin{cases} 1. a \neq 0 \\ 2. \Delta > 0 \\ 3. x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 10 \end{cases}$$

$$1. a = 1 \neq 0$$

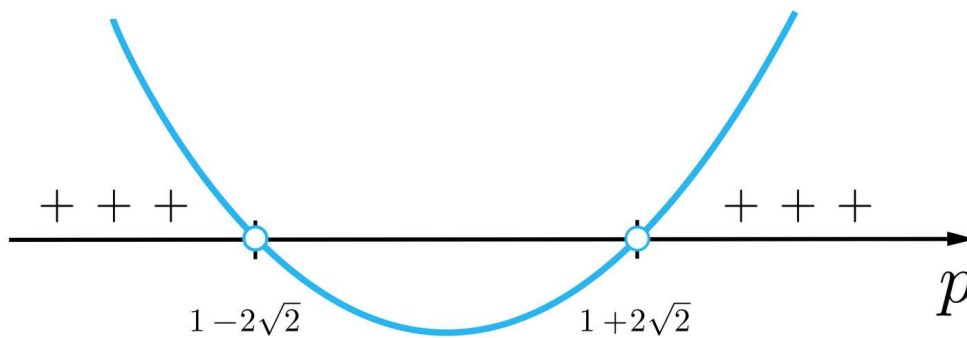
$$2. \Delta = [-(p - 1)]^2 - 4 \cdot 2 = p^2 - 2p + 1 - 8 = p^2 - 2p - 7$$

$$\Delta_p = (-2)^2 - 4 \cdot (-7) = 4 + 28 = 32$$

$$\sqrt{\Delta_p} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$p_1 = \frac{2 - 4\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sqrt{2}$$

$$p_2 = \frac{2 + 4\sqrt{2}}{2} = 1 + 2\sqrt{2}$$



$$p \in (-\infty, 1 - 2\sqrt{2}) \cup (1 + 2\sqrt{2}, \infty)$$

$$3. x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 = 10$$

$$x_1 \cdot x_2(x_1 + x_2 + 2) = 10$$

Z wzorów Viete'a otrzymujemy:

$$2(p - 1 + 2) = 10$$

$$2(p + 1) = 10$$

$$p + 1 = 5$$

$$p = 4 \in (-\infty, 1 - 2\sqrt{2}) \cup (1 + 2\sqrt{2}, \infty)$$

Aby różne rozwiązania równania spełniały warunek  $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 = 10$  parametr  $p = 4$ .

### Przykład 3

Zbadamy, dla jakich wartości parametru  $z$  wykresy funkcji  $y = x^2 + (z + 1)x$  oraz  $y = zx^2 + z + 5$  przecinają się w jednym punkcie.

Aby obliczyć, dla jakiego  $z$  wykresy funkcji przecinają się w jednym punkcie, musimy rozwiązać równanie.

$$x^2 + (z + 1)x = zx^2 + z + 5$$

$$(z - 1)x^2 - (z + 1)x + z + 5 = 0$$

Równanie ma posiadać jedno rozwiązanie, więc wyróżnik trójmianu kwadratowego musi być równy zero.

$$\Delta = (z + 1)^2 - 4(z - 1)(z + 5) = z^2 + 2z + 1 - 4(z^2 + 4z - 5) =$$

$$= -3z^2 - 14z + 21$$

$$\Delta_z = 196 + 252 = 448$$

$$\sqrt{\Delta_z} = 8\sqrt{7}$$

$$z_1 = \frac{14-8\sqrt{7}}{-6} = \frac{-7+4\sqrt{7}}{3}$$

$$z = \frac{14+8\sqrt{7}}{-6} = \frac{-7-4\sqrt{7}}{3}$$

Aby wykresy funkcji przecinały się w jednym punkcie  $z = \frac{-7-4\sqrt{7}}{3}$  lub  $z = \frac{-7+4\sqrt{7}}{3}$ .

#### Przykład 4

Obliczymy, dla jakich wartości parametru  $z$  różne rozwiązania  $x_1, x_2$  równania  $x^2 - (2z + 1)x + z^2 = 0$  spełniają warunek  $x_1 = 2x_2$

Rozpatrzmy warunki:

$$\begin{cases} 1. \Delta > 0 \\ 2. x_1 = 2x_2 \end{cases}$$

$$\Delta = 4z^2 + 4z + 1 - 4z^2 = 4z + 1 \quad \Delta > 0 \Leftrightarrow 4z + 1 > 0 \Leftrightarrow z > -\frac{1}{4}$$

$$2. x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_1$$

$$\text{Czyli } x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{2}x_1 = \frac{3}{2}x_1$$

Korzystając z Wzorów Viète'a, otrzymujemy:

$$x_1 + x_2 = 2z + 1$$

$$\frac{3}{2}x_1 = 2z + 1$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \cdot (2z + 1)$$

$$2x_2 = \frac{2}{3} \cdot (2z + 1)$$

$$x_2 = \frac{1}{3} \cdot (2z + 1)$$

$$x_1 \cdot x_2 = z^2$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{3} \cdot (2z + 1) \cdot \frac{1}{3} \cdot (2z + 1)$$

Czyli otrzymujemy równanie:

$$\frac{2}{9} \cdot (2z + 1)^2 = z^2$$

$$2 \cdot (4z^2 + 4z + 1) = 9z^2$$

$$8z^2 + 8z + 2 - 9z^2 = 0$$

$$-z^2 + 8z + 2 = 0$$

$$\Delta = 64 + 8 = 72$$

$$\sqrt{\Delta} = 6\sqrt{2}$$

$$z_1 = \frac{-8-6\sqrt{2}}{-2} = 4 + 3\sqrt{2}$$

$$z_2 = \frac{-8+6\sqrt{2}}{-2} = 4 - 3\sqrt{2}$$

Aby rozwiązania równania spełniały warunek  $z = 4 - 3\sqrt{2}$   $z = 4 + 3\sqrt{2}$ .

## Słownik

wzory Viète'a

jeżeli równanie kwadratowe  $ax^2 + bx + c = 0$ , gdzie  $a \neq 0$ , ma pierwiastki  $x_1, x_2$ , to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

oraz

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

# Galeria zdjęć interaktywnych

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć i przeanalizuj sposób obliczania, dla jakich wartości parametru  $m$  równanie kwadratowe ma dwa różne rozwiązania mniejsze od  $(-1)$ .

## Polecenie 2

Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 + (m - 1)x + 1 = 0$  ma dwa różne pierwiastki większe od 2?



# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 + (m - 3)x + 2m = 0$  ma dwa różne rozwiązania  $x_1$  i  $x_2$  spełniające warunek  $|x_1 - x_2| = 1$ ?

Dopasuj rozwiązanie do warunku.

$$|x_1 - x_2| = 1$$

$$m \in (-\infty, 7 - 2\sqrt{10}) \cup (7 + 2\sqrt{10}, \infty)$$

$$a \neq 0$$

$$m = 7 - \sqrt{41}, m = 7 + \sqrt{41}$$

$$\Delta > 0$$

$$m \in \mathbb{R}$$

## Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Liczby  $x_1$  i  $x_2$  są pierwiastkami równania kwadratowego  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ . Wtedy:

☐  $x_1^3 + x_2^3 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \left[ \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3\frac{c}{a} \right]$

☐  $x_1^3 + x_2^3 = \left(-\frac{b}{a}\right) \left[ \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3\frac{c}{a} \right]$

☐  $x_1^3 + x_2^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 \left[ \left(-\frac{b}{a}\right) - 3\frac{c}{a} \right]$

### Ćwiczenie 3



Przenieś w wyznaczone miejsce odpowiednie wyrażenie algebraiczne.

Równanie  $x^2 + (p-1)x + p^2 - 4 = 0$  ma dwa różne rozwiązania  $x_1, x_2$ , które spełniają warunek  $x_1^3 + x_2^3 = 2x_1x_2$ . Zatem:

$$- \boxed{\phantom{000}} \cdot \left[ (p-1)^2 - 3 \cdot \boxed{\phantom{000}} \right] = 2 \cdot (p^2 - 4)$$

### Ćwiczenie 4



### Ćwiczenie 5



Funkcja kwadratowa  $f(x) = -x^2 + bx + c$  ma dwa miejsca zerowe  $x_1 = 2$  i  $x_2 = -1$ . Oblicz i przeciągnij w wyznaczone miejsce największą wartość funkcji  $f$ .

$$f_{\max} = \boxed{\phantom{000}}$$

### Ćwiczenie 6



Wybierz wszystkie poprawne odpowiedzi. Liczby  $x_1$  i  $x_2$  są pierwiastkami równania kwadratowego  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ . Wtedy:

☐  $x_1^4 + x_2^4 = \left[ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 \right] + 2 \cdot (x_1 \cdot x_2)$

☐  $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 + 2x_1^2 \cdot x_2^2$

☐  $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2$

☐  $x_1^4 + x_2^4 = \left[ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \right] - 2(x_1x_2)^2$

## Ćwiczenie 7



Wybierz poprawną odpowiedź. Dla jakich wartości parametru  $t$  wykresy funkcji  $y = x^2 + tx$  oraz  $y = tx^2 + 1$  przecinają się w jednym punkcie?

☐  $t = 1$

☐  $t \in \emptyset$

☐  $t = 2$

☐  $t \in \mathbb{R}$

## Ćwiczenie 8



Wykaż, że równanie  $x^2 + (k + 2)x + k = 0$  ma rozwiązania dla dowolnej wartości parametru  $k$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Jolanta Schilling

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Wyznaczanie rozwiązań równania kwadratowego w zależności od parametru

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- wyznacza rozwiązania równania spełniające podane warunki w zależności od parametru występującego w równaniu
- znajduje wszystkie wartości rzeczywiste parametru, aby rozwiązania równania spełniały określony warunek
- przeprowadza rozumowania związane z analizą równania kwadratowego z parametrem, formułuje wnioski i uzasadnia ich poprawność

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

## **Metody i techniki nauczania:**

- stoliki zadaniowe
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem galerii zdjęć interaktywnych

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości i umiejętności związane ze sposobami rozwiązywania równań kwadratowych.

### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o samodzielne rozwiązanie trzech przykładów z sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują rozwiązania.
3. Następnie wspólnie omawiają kolejne przykłady.
4. Uczniowie analizują galerię zdjęć interaktywnych wraz z nauczycielem.
5. Uczniowie w parach rozwiązują zadania metodą stolików zadaniowych. Na każdym stoliku zadaniowym znajdują się 2 zadania interaktywne. Warunkiem przejścia do następnego stolika jest poprawne rozwiązanie zadań. Para, która najszybciej rozwiąże wszystkie zadania otrzymuje stopień bardzo dobry.

### **Faza podsumowująca:**

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

**Praca domowa:**

Uczniowie wykonują Przykład 2 umieszczony pod Galerią zdjęć interaktywnych.

**Materiały pomocnicze:**

[Równanie kwadratowe](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Przykład zawarty w galerii zdjęć interaktywnych uczniowie mogą wykorzystać na zajęciach podsumowujących sposoby rozwiązywania równań kwadratowych.