



Równanie prostej prostopadłej do prostej $Ax + By + C = 0$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równanie prostej prostopadłej do prostej

$$Ax + By + C = 0$$

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Proste prostopadłe są spotykane w domu, w szkole, na skrzyżowaniach ulic, czy na planach miast. W podstawowej geometrii prostopadłość oznacza zależność pomiędzy dwiema prostymi, które przecinają się pod kątem prostym. W tej lekcji omówimy taką właśnie relację między dwiema prostymi na płaszczyźnie kartezjańskiej. Proste będą zapisane w postaci równania ogólnego. Opierając się na wyprowadzonym warunku prostopadłości prostych, zapisanych w postaci ogólnej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

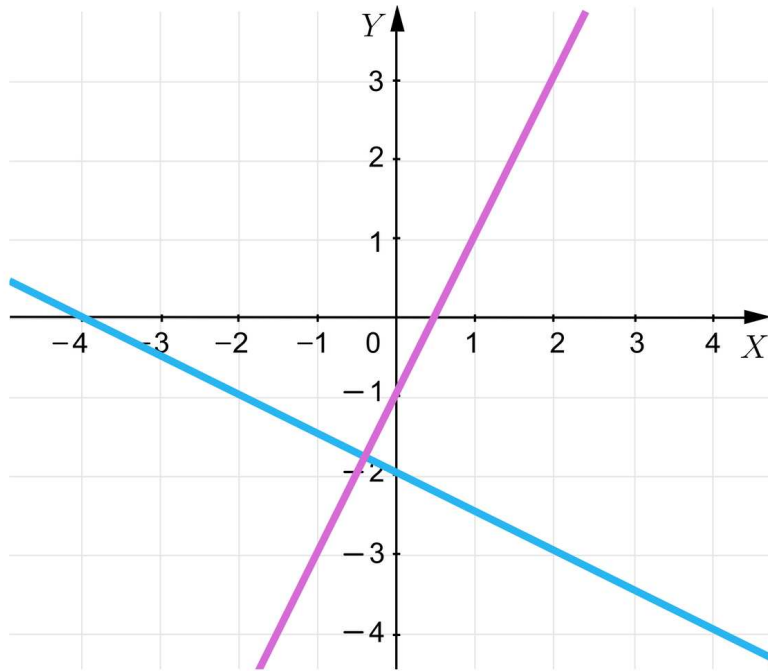
Twoje cele

- Poznasz warunek prostopadłości prostych zapisanych równaniami ogólnymi.
- Dowiesz się, jaki jest warunek prostopadłości prostych zapisanych w postaci kierunkowej.
- Wykorzystasz warunek prostopadłości prostych do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

Już wiesz

Proste o równaniach w postaci kierunkowej $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe, gdy zachodzi warunek: $a_1 \cdot a_2 = -1$ (czyli, gdy ich współczynniki kierunkowe są przeciwne i odwrotne).



Ważne!

Dla dowolnej prostej y i dowolnego punktu A istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej y .

Definicja: równanie ogólne prostej

Równanie $Ax + By + C = 0$ nazywamy równaniem ogólnym prostej, gdy A i B nie są jednocześnie równe 0.

Twierdzenie: warunek prostopadłości prostych

Proste o równaniach w postaci ogólnej $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe, gdy zachodzi warunek:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Dowód

Przekształcimy równania ogólne dwóch prostych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ do postaci kierunkowej.

Otrzymujemy następujące równania kierunkowe prostych: $y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1}$ oraz $y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$.

Wiemy, że dwie proste zadane równaniem kierunkowym są prostopadłe, gdy ich współczynniki kierunkowe są przeciwne i odwrotne.

Zatem otrzymujemy równanie: $-\frac{A_1}{B_1} \cdot \left(-\frac{A_2}{B_2}\right) = -1$, co po przekształceniu daje szukany warunek $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Ważne!

Proste o równaniach ogólnych $A_1x + C_1 = 0$ i $B_1y + C_1 = 0$ są zawsze prostopadłe, gdy $A_1 \neq 0$ i $B_1 \neq 0$.

Przykład 1

Sprawdzimy, czy proste o równaniach $3x + y - 5 = 0$ oraz $-x + 3y + 4 = 0$ są prostopadłe.

Otrzymujemy dane: $A_1 = 3$, $A_2 = -1$, $B_1 = 1$ oraz $B_2 = 3$.

Podstawiamy do równania $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Otrzymujemy, że $3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 0$.

Równanie jest spełnione, zatem proste o podanych równaniach są prostopadłe.

Przykład 2

Wyznamy, dla jakiej wartości parametru m proste o równaniach $3x + (2 - m)y + 1 = 0$ oraz $(2 + m)x - 4y - 3 = 0$ są prostopadłe.

Otrzymujemy dane: $A_1 = 3$, $A_2 = 2 + m$, $B_1 = 2 - m$, $B_2 = -4$.

Podstawiamy do równania $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Otrzymujemy równanie: $3(2 + m) + (2 - m) \cdot (-4) = 0$.

Równanie jest spełnione dla $m = \frac{2}{7}$ i dla takiej wartości parametru m zadane proste są prostopadłe.

Przykład 3

Wyznamy, dla jakiej wartości parametru a proste o równaniach $-4x + y - 3 = 0$ oraz $y = ax + 1$ są prostopadłe.

Przekształcimy drugie równanie do postaci ogólnej: $ax - y + 1 = 0$.

Otrzymujemy dane: $A_1 = -4$, $B_1 = 1$, $A_2 = a$, $B_2 = -1$.

Podstawiając do równania $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ otrzymujemy, że $-4a - 1 = 0$, zatem $a = -\frac{1}{4}$.

Zadane proste są prostopadłe dla $a = -\frac{1}{4}$.

Przykład 4

Wyznamy równanie ogólne prostej prostopadłej do prostej o równaniu $2x - y + 5 = 0$, przechodzącej przez punkt $A = (1, 2)$.

Prostą w postaci ogólnej oznaczmy jako $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Wykorzystamy [warunek prostopadłości](#) $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Otrzymujemy dane: $A_1 = 2$ i $B_1 = -1$.

Po podstawieniu do warunku prostopadłości otrzymujemy, że $2A_2 - B_2 = 0$.

Przekształcając to równanie otrzymujemy: $-\frac{A_2}{B_2} = -\frac{1}{2}$.

Korzystając z dowodu twierdzenia o warunku prostopadłości prostych zauważmy, że jest to wartość współczynnika kierunkowego a dla prostej $y = ax + b$.

Zatem prosta prostopadła jest postaci $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Jeżeli do równania prostej prostopadłej podstawimy punkt $A = (1, 2)$, to otrzymujemy, że $b = \frac{5}{2}$.

Stąd szukana prosta ma postać ogólną $x + 2y - 5 = 0$.

Przykład 5

Wyznamy równanie prostej, która przecina oś X w punkcie o odciętej 2, prostopadłej do prostej $x - 3y + 1 = 0$.

Prosta prostopadła ma równanie $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Wykorzystamy warunek $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Mamy, że $A_1 = 1$, $B_1 = -3$.

Po podstawieniu do równania otrzymujemy, że $A_2 - 3B_2 = 0$, więc współczynnik kierunkowy $a = -\frac{A_2}{B_2} = -3$.

Szukana prosta prostopadła ma postać $y = -3x + b$.

Ponieważ prosta przecina oś X w punkcie o odciętej 2, zatem do wyznaczenia wartości b rozwiązujemy równanie:

$$0 = -3 \cdot 2 + b, \text{ czyli } b = 6.$$

Prosta w postaci kierunkowej opisana jest za pomocą równania $y = -3x + 6$, co po przekształceniu do postaci ogólnej jest równoważne równaniu prostej $3x + y - 6 = 0$.

Słownik

warunek prostopadłości prostych

proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem, a następnie wykonaj polecenie.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DTwQ1zst1>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej równania prostej prostopadłej do prostej $Ax + By + C = 0$.

Polecenie 2

Wyznacz, dla jakich wartości parametru m , proste o równaniach $2x - 5y + 1 = 0$ oraz $(3m - 1)x - (m + 4)y + 2 = 0$ są prostopadłe.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Proste o równaniach $3x + 2y + 1 = 0$ oraz $-2x + 3y + 6 = 0$:

☐ są równoległe

☐ przecinają się pod kątem inny niż prosty

☐ są prostopadłe

Ćwiczenie 2



Połącz w pary równania prostych prostopadłych:

$$x - 2y + 5 = 0$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 4$$

$$2x + y - 1 = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

$$x + 5y - 1 = 0$$

$$y = -2x + 3$$

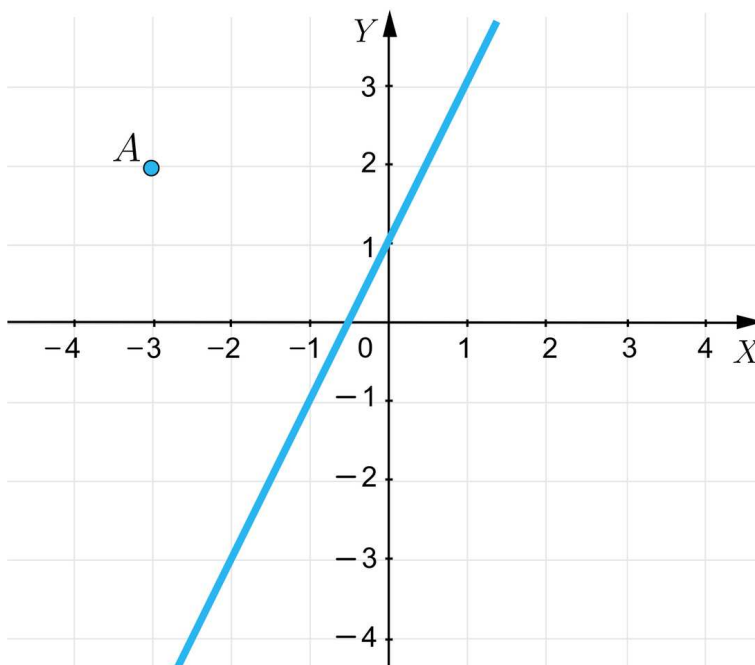
$$2x - 3y + 1 = 0$$

$$y = 5x + 2$$

Ćwiczenie 3



Uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednie równanie lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.



Równanie prostej prostopadłej do prostej z rysunku, przechodzącej przez punkt A jest postaci

☐ $x - 2y + 1 = 0$

☐ $2x + y + 1 = 0$

☐ $x + 2y - 1 = 0$

Ćwiczenie 4



Oceń, czy zadanie jest prawdziwe. Prosta przechodząca przez punkty $A = (0, 1)$ i $B = (1, -2)$ oraz prosta przechodząca przez punkty $C = (0, 2)$ i $D = (-3, 1)$ są prostopadłe. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ Nie.☐ Tak.

Ćwiczenie 5



Proste o równaniach $x - 2y + 3 = 0$ oraz $mx + 2y - 3 = 0$ są prostopadłe, gdy:

☐ $m = 2$

☐ $m = 4$

☐ $m = -\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 6



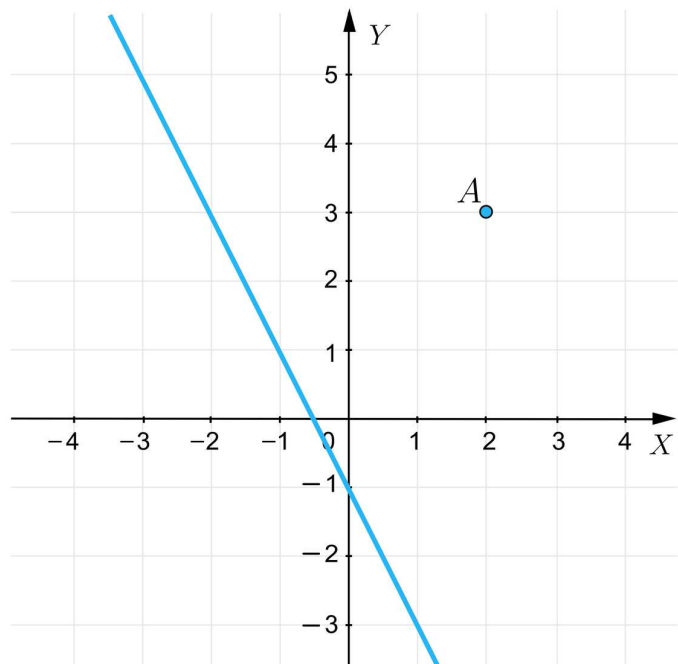
Proste o równaniach $mx - 3y + 2 = 0$ oraz $mx + 3y + 1 = 0$ są prostopadłe, gdy $m =$

lub $m =$.

Ćwiczenie 7



Zapoznaj się z rysunkiem poniżej.



Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi. Prosta prostopadła do prostej z wykresu, przechodząca przez punkt A :

☐ ma równanie $2x - y + 4 = 0$

☐ przechodzi przez punkt $(0, 4)$

☐ przechodzi przez punkt $(0, 2)$

☐ ma równanie $x - 2y + 4 = 0$

Ćwiczenie 8



Wyznacz równanie prostej w postaci ogólnej prostopadłej do prostej o równaniu $x - y + 2 = 0$, przecinającej oś Y w punkcie $(0, -3)$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie prostej prostopadłej do prostej $Ax + By + C = 0$

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

7) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje zależność pomiędzy prostymi prostopadłymi, które są zapisane w postaci ogólnej;
- dobiera odpowiedni model matematyczny do zadania;
- wykorzystuje poznane wiadomości do rozwiązywania zadań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- dyskusja;

- z użyciem e-podręcznika;
- objaśnienie nowej wiedzy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?
Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Film samouczek”, wybrany uczeń czyta treść polecenia nr 1 „Obejrzyj animację, a następnie wykonaj polecenie.”. Po zaznajomieniu się z treściami nauczyciel komentuje, i w razie potrzeby wyjaśnia, najważniejsze etapy realizacji polecenia.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Proste równoległe, proste prostopadłe](#)
- [Równanie prostej w postaci ogólnej oraz w postaci kierunkowej](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Film samouczek” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Równanie prostej prostopadłej do prostej $Ax + By + C = 0$ ”.