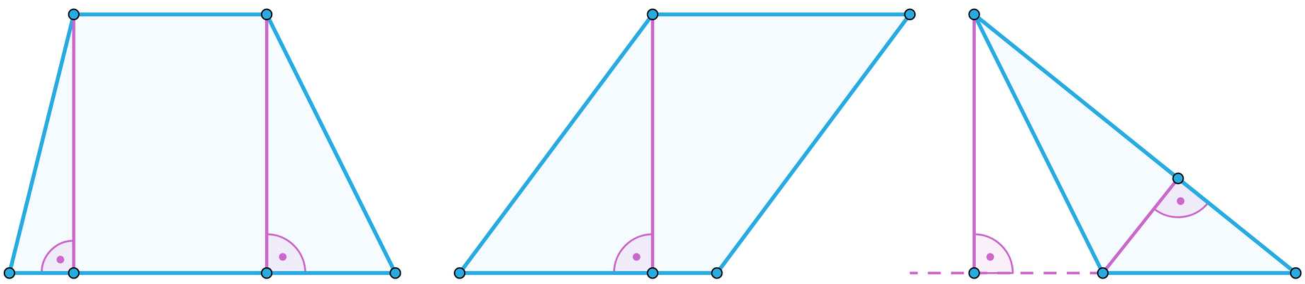
# Cechy podobieństwa trójkątów prostokątnych

# Cechy podobieństwa trójkątów prostokątnych

Źródło: Brett Jordan, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Przy rozwiązywaniu problemów geometrycznych często wykorzystujemy trójkąty prostokątne. Pojawiają się one w sposób naturalny, np. gdy prowadzimy wysokość w jakimś wielokącie; w trapezie, w równoległoboku, czy w trójkącie.



W wielu sytuacjach trójkątów prostokątnych jest kilka i bardzo często niektóre z tych trójkątów są podobne. Dlatego umiejętności wskazywania podobnych trójkątów prostokątnych i wykorzystywania własności takich trójkątów są szczególnie ważne. Tym zagadnieniom poświęcony jest ten temat.

**Twoje cele**

- Poznasz cechy podobieństwa trójkątów prostokątnych.

- Wykorzystasz poznane cechy do rozwiązywania zadań.
- Zastosujesz cechy podobieństwa trójkątów prostokątnych do uzasadniania podobieństwa trójkątów.
- Zastosujesz cechy podobieństwa trójkątów prostokątnych w sytuacjach typowych i problemowych.
- Wykorzystasz cechy podobieństwa trójkątów prostokątnych w dowodach geometrycznych.

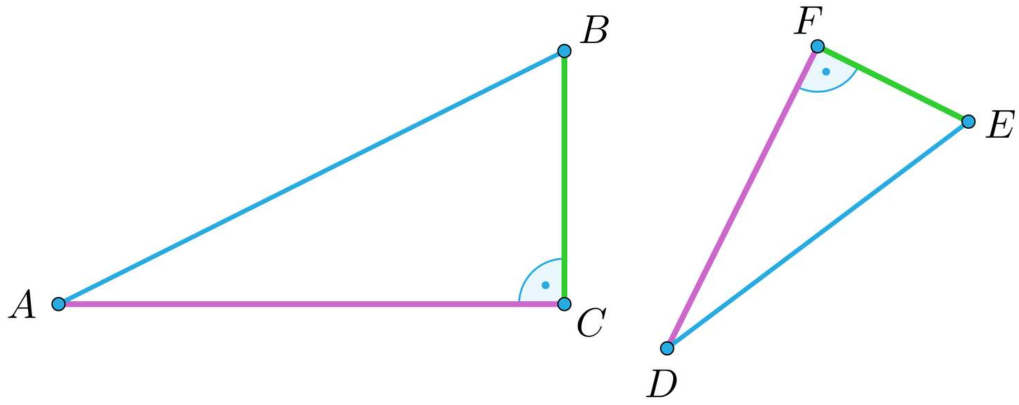
# Przeczytaj

Dwa trójkąty prostokątne mają zawsze jeden kąt taki sam – kąt prosty. Wobec tego w przypadku trójkątów prostokątnych cechy *bbb*, *bkb* i *kkk* podobieństwa trójkątów przyjmują znacznie prostszą postać. Cechy *bbb* oraz *bkb* sprowadzają się do jednej cechy.

Odpowiednikiem cech *bbb* lub *bkb* może być każde z następujących dwóch twierdzeń.

**Twierdzenie: Trójkąty podobne – porównanie przyprostokątnych**

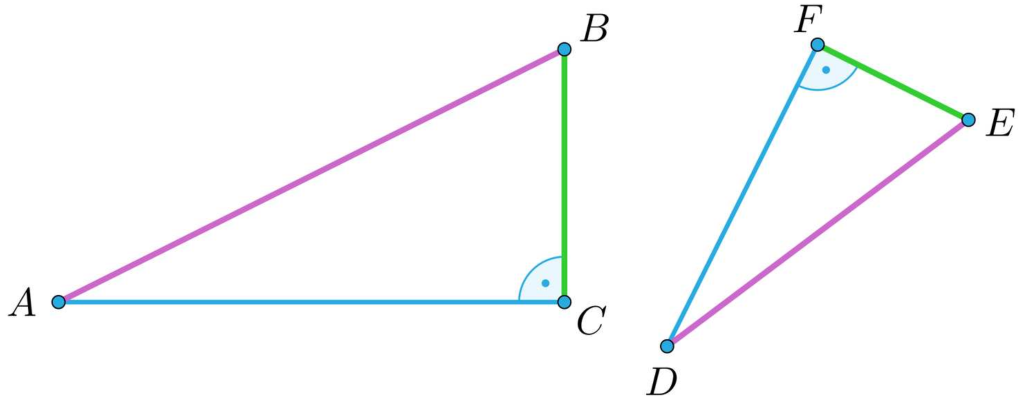
Jeżeli przyprostokątne jednego trójkąta prostokątnego są proporcjonalne do przyprostokątnych drugiego trójkąta prostokątnego, to te trójkąty są podobne.




Jeżeli $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DF|}{|EF|}$, to trójkąt $ABC$ jest podobny do trójkąta $DEF$.

**Twierdzenie: Trójkąty podobne – porównanie przeciwprostokątnych**

Jeżeli przeciwprostokątna oraz jedna z przyprostokątnych jednego trójkąta prostokątnego są proporcjonalne do przeciwprostokątnej oraz jednej z przyprostokątnych drugiego trójkąta prostokątnego, to te trójkąty są podobne.

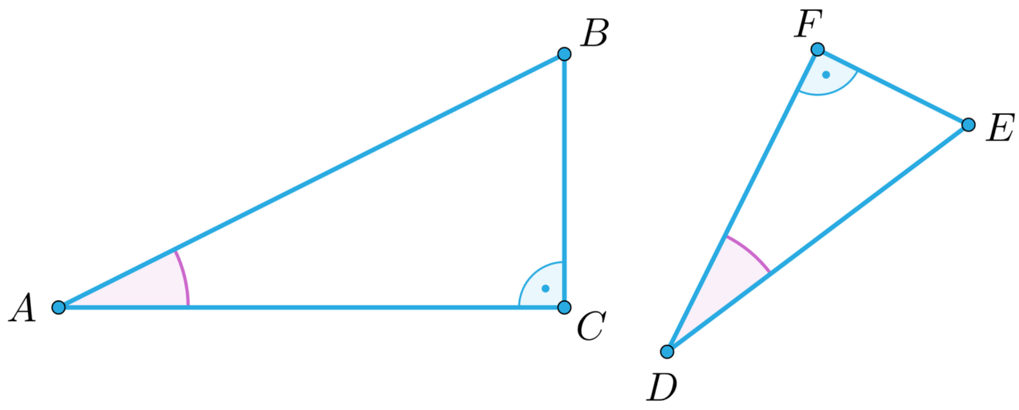


Jeżeli $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$, to trójkąt $ABC$ jest podobny do trójkąta $DEF$.

Odpowiednikiem cechy *kkk* jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie: Trójkąty podobne – porównanie kątów**

Jeżeli kąt ostry jednego trójkąta prostokątnego jest równy kątowi ostremu drugiego trójkąta prostokątnego, to te trójkąty są podobne.

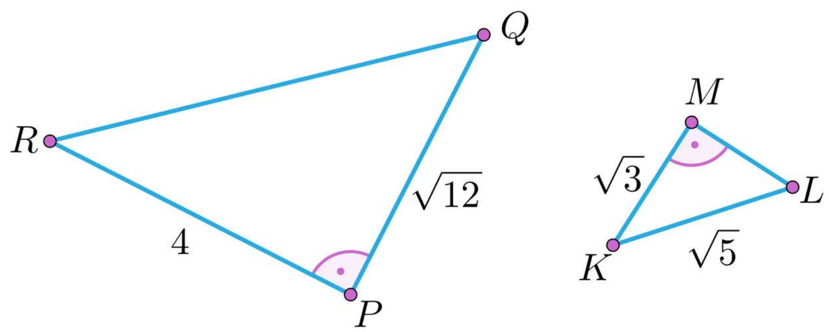



Jeżeli $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, to trójkąt $ABC$ jest podobny do trójkąta $DEF$.

**Przykład 1**

Rozstrzygniemy, czy trójkąty są podobne.

a. Przypadek I:

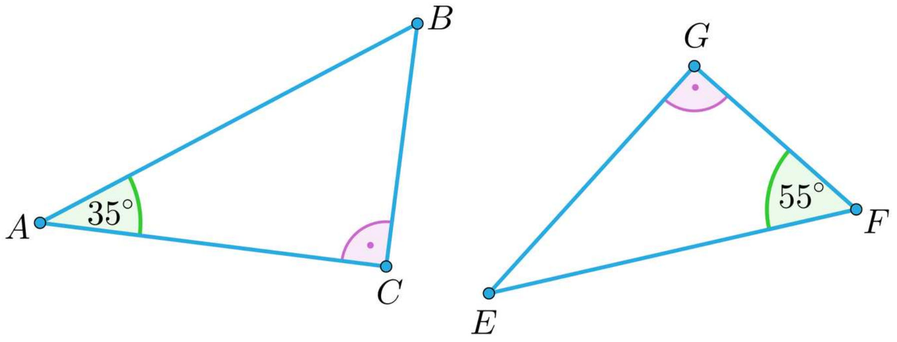



**Rozwiązanie:**
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $PQR$ otrzymujemy
$|QR| = \sqrt{|PR|^2 + |PQ|^2} = \sqrt{4^2 + \left(\sqrt{12}\right)^2} = \sqrt{16+12} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.
W trójkącie $KLM$ obliczmy stosunek długości przyprostokątnej $KM$ do długości przeciwprostokątnej $KL$.
Jest on równy $\frac{|KM|}{|KL|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.
W trójkącie $PQR$ stosunki długości obu przyprostokątnych do długości

przeciwprostokątnej są równe $\frac{|PR|}{|QR|} = \frac{4}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$ oraz $\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{\sqrt{12}}{2\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Ponieważ $\frac{\sqrt{14}}{7} \neq \frac{\sqrt{15}}{5}$ i $\frac{\sqrt{21}}{7} \neq \frac{\sqrt{15}}{5}$, więc trójkąty $PQR$ i $KLM$ nie są podobne.

b. Przypadek II:




**Rozwiązanie:**

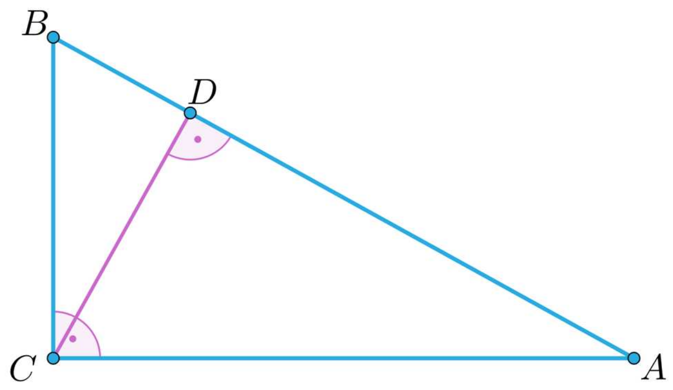
Wyznaczymy kąt ostry przy wierzchołku $B$ w trójkącie $ABC$.

$|\sphericalangle ABC| = 90^\circ - |\sphericalangle BAC| = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

Ponieważ kąty ostre przy wierzchołkach $B$ i $F$ w trójkątach prostokątnych $ABC$ i $EGF$ są równe, więc te trójkąty są podobne.

**Przykład 2**

Trójkąt $ABC$ jest prostokątny. Punkt $D$ jest spodkiem wysokości $CD$ opuszczonej z wierzchołka kąta prostego tego trójkąta.




Wykażemy, że: $|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |BD|}$.

Własność tę nazywamy **twierdzeniem o wysokości trójkąta prostokątnego opuszczonej na przeciwprostokątną**. Możemy ją sformułować następująco:

Długość wysokości trójkąta prostokątnego opuszczonej na przeciwprostokątną jest średnią geometryczną długości odcinków, na jakie spodek tej wysokości dzieli przeciwprostokątną tego trójkąta.

**Rozwiązanie:**

Trójkąty $ABC$ i $ACD$ są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku $A$.

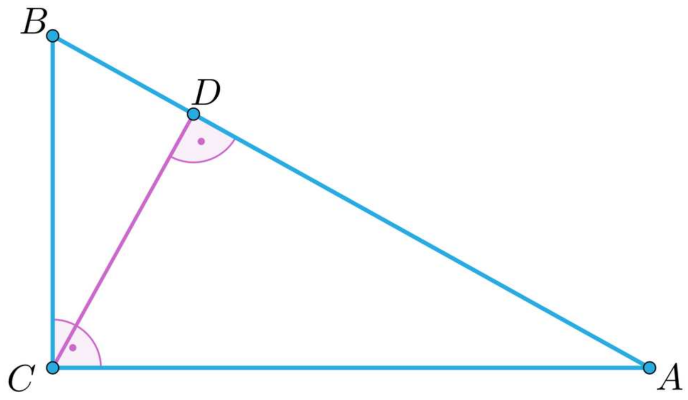
Trójkąty $ABC$ i $CBD$ też są podobne, bo oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku $B$. Zatem trójkąty $ACD$ i $CBD$ są podobne.

Z tego podobieństwa wynika, że $\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|BD|}{|CD|}$.

Stąd $|CD|^2 = |AD| \cdot |BD|$, zatem $|CD| = \sqrt{|AD| \cdot |BD|}$.

To kończy dowód.

Zauważmy ponadto, że w trójkącie $ABC$:




zachodzą również następujące związki:

1. $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$
2. $|BC|^2 = |AB| \cdot |BD|$

Rzeczywiście:

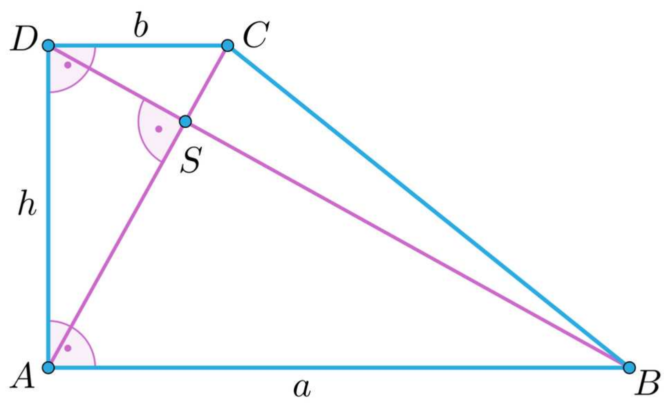
1. z podobieństwa trójkątów $ABC$ i $ACD$ wynika, że $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|}$, co daje $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$
2. z podobieństwa trójkątów $ABC$ i $CBD$ wynika, że $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BD|}{|BC|}$, co daje $|BC|^2 = |AB| \cdot |BD|$

**Przykład 3**

W trapezie prostokątnym przekątne przecinają się pod kątem prostym. Wykaż, że wysokość tego trapezu jest średnią geometryczną długości jego podstaw.

**Rozwiązanie:**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.




Wówczas tezę możemy zapisać w postaci $h = \sqrt{a \cdot b}$.

Trójkąty prostokątne $ACD$ i $ADS$ mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku $A$, więc są to trójkąty podobne.

Trójkąty prostokątne $ADS$ i $BDA$ mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku $D$, więc również są to trójkąty podobne.

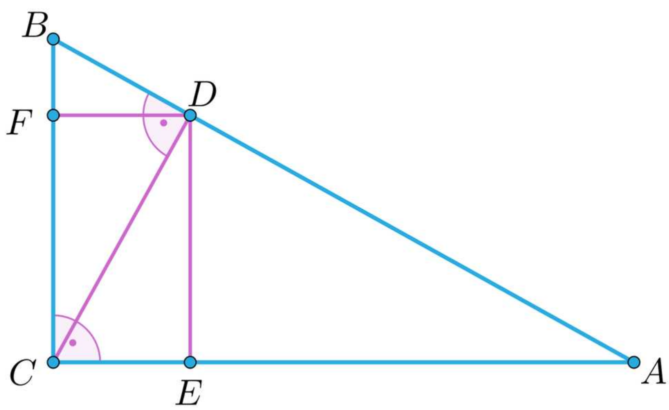
Stąd wynika, że trójkąt $ACD$ jest podobny do trójkąta $BDA$.

Zatem $\frac{|DC|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|AB|}$, czyli $\frac{b}{h} = \frac{h}{a}$. Stąd $h^2 = a \cdot b$, więc $h = \sqrt{a \cdot b}$.

To kończy dowód.

**Przykład 4**

W trójkącie prostokątnym $ABC$ poprowadzono wysokość $CD$ opuszczoną na przeciwprostokątną $AB$. Na przyprostokątnych $AC$ i $BC$ obrano takie punkty – odpowiednio – $E$ i $F$, że czworokąt $CEDF$ jest prostokątem (zobacz rysunek). Pola trójkątów $ADE$ i $CDF$ są równe odpowiednio 16 i 9.




Oblicz pole trójkąta $ABC$.

**Rozwiązanie:**

Trójkąty $ABC$ i $DBF$ są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają równe kąty ostre przy wierzchołkach $A$ i $D$.

Równość kątów $EAD$ i $FDB$ wynika z twierdzenia o kątach odpowiadających.

Trójkąty $DCE$ i $CDF$ są przystające, gdyż czworokąt $CEDF$ jest prostokątem, więc $|CE| = |FD|$ i $|DE| = |FC|$, a bok $CD$ jest wspólnym bokiem tych trójkątów (cecha *bbb*).

Zatem $P_{DCE} = P_{CDF} = 9$.

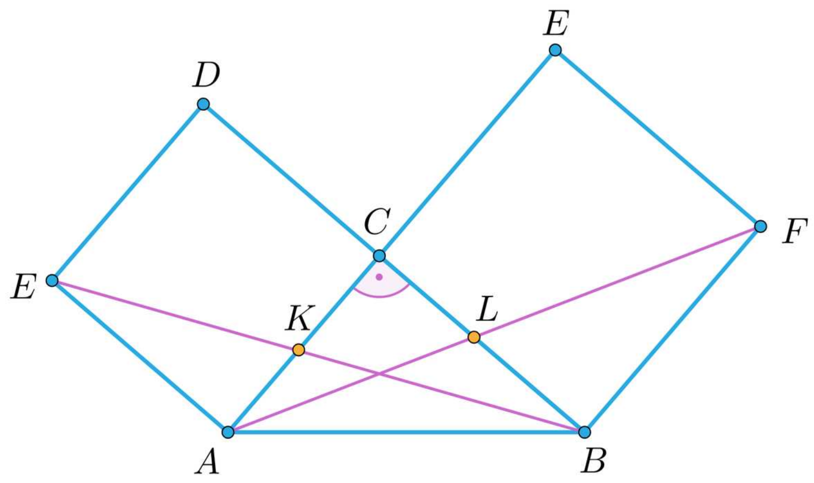
Trójkąty $CDE$ i $ADE$ mają wspólną wysokość $DE$, więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości ich podstaw, czyli $\frac{|CE|}{|AE|} = \frac{9}{16}$, ale $|CE| = |FD|$, więc $\frac{|FD|}{|AE|} = \frac{9}{16}$.

Stosunek $\frac{|FD|}{|AE|}$ to skala podobieństwa trójkąta $DBF$ do trójkąta $ABC$, więc z twierdzenia o stosunku pól figur podobnych otrzymujemy $\frac{P_{DBF}}{P_{ADE}} = \left(\frac{9}{16}\right)^2$, czyli $\frac{P_{DBF}}{16} = \left(\frac{9}{16}\right)^2$.

Stąd $P_{DBF} = \frac{81}{16}$. Wobec tego
$P_{ABC} = P_{DBF} + 2P_{CDF} + P_{ADE} = \frac{81}{16} + 2 \cdot 9 + 16 = 39\frac{1}{16}$.

**Przykład 5**

Na przyprostokątnych $AC$ i $BC$ trójkąta prostokątnego $ABC$ zbudowano, na zewnątrz tego trójkąta, kwadraty $ACDE$ i $BCEF$. Odcinki $BE$ i $AC$ przecinają się w punkcie $K$, a odcinki $AF$ i $BC$ przecinają się w punkcie $L$ (zobacz rysunek).




Udowodnij, że $|KC| = |LC|$.

**Rozwiązanie:**

Niech $|AC| = b$ oraz $|BC| = a$.

Czworokąty $ACDE$ i $BCEF$ to kwadraty, więc $|AC| = |CD| = |DE| = b$ oraz $|BC| = |CE| = |EF| = a$.

Trójkąty $AFE$ i $ALC$ są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku $A$.

Tak samo trójkąty $BDE$ i $BCK$ są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku $B$.

Z tych podobieństw wynika, że

$\frac{|CL|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|AE|}$ oraz $\frac{|KC|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|BD|}$, czyli $\frac{|CL|}{b} = \frac{a}{a+b}$ oraz $\frac{|KC|}{a} = \frac{b}{a+b}$.

Stąd $|CL| = \frac{ab}{a+b}$ oraz $|KC| = \frac{ab}{a+b}$. Zatem $|KC| = |LC|$.

To kończy dowód.

## Słownik

**średnia geometryczna**

średnią geometryczną dwóch liczb nieujemnych $x$ i $y$ nazywamy liczbę $\sqrt{x \cdot y}$; średnią geometryczną $n$ liczb nieujemnych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}$

# Aplet

> **Polecenie 1**
> Uzasadnij, że trójkąty $ABC$, $AKL$, $KNC$ i $NBM$ są podobne.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DnHotXPzx

> **Polecenie 2**
> Zmieniaj położenie punktu $K$, obserwując jak zmienia się długość $x$ odcinka $AK$ oraz pole prostokąta $KLMN$. Sformułuj hipotezę dotyczącą największej wartości pola prostokąta $KLMN$.

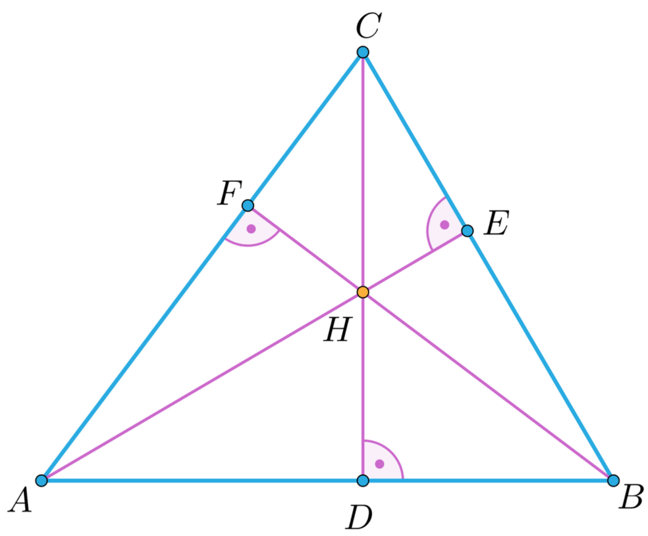
> **Polecenie 3**
> Wyznacz pole prostokąta $KLMN$ jako funkcję zmiennej $x$, podaj dziedzinę tej funkcji i wyznacz jej największą wartość. Porównaj swoje rozwiązanie z podanym.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

**Ćwiczenie 1**

Wysokości trójkąta ostrokątnego $ABC$ przecinają się w punkcie $H$ jak na rysunku.



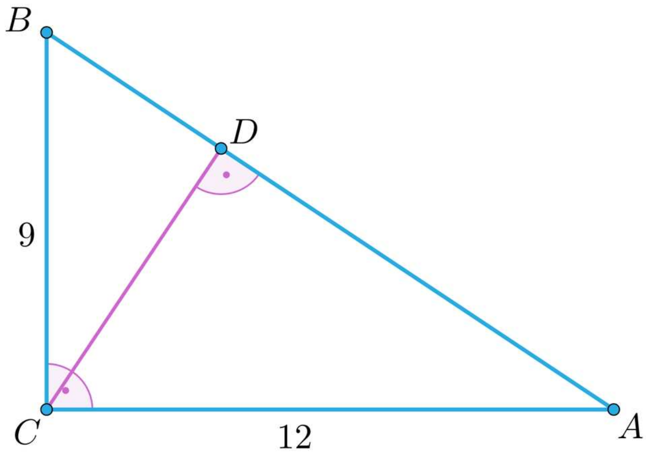

**Ćwiczenie 2**

**Ćwiczenie 3**

**Ćwiczenie 4**

**Ćwiczenie 5**

W trójkącie prostokątnym $ABC$ z wierzchołka kąta prostego $C$ poprowadzono wysokość $CD$ (patrz rysunek).

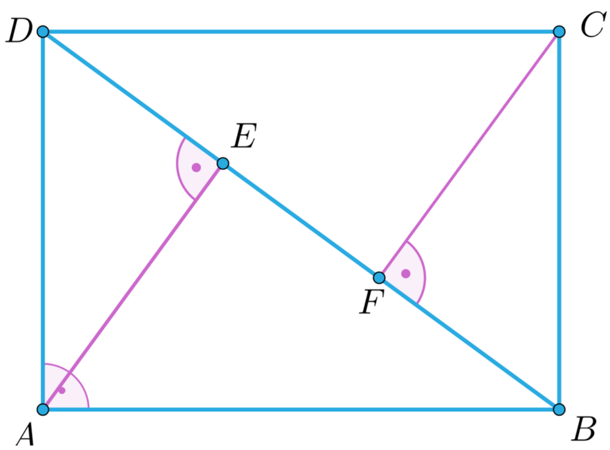



**Ćwiczenie 6**

Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$, którego boki mają długości $|AB| = 10$, $|AC| = |BC| = 13$.

**Ćwiczenie 7**

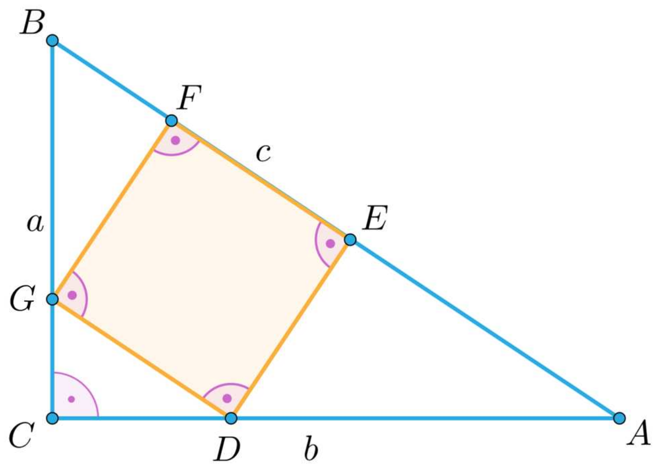
Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym rzuty prostokątne $E$ i $F$ wierzchołków odpowienio $A$ i $C$ na przekątną $BD$ dzielą tę przekatną na trzy równe części.




Obwód prostokąta $ABCD$ jest równy $\sqrt{12} + \sqrt{24}$. Oblicz pole prostokąta $ABCD$.

**Ćwiczenie 8**

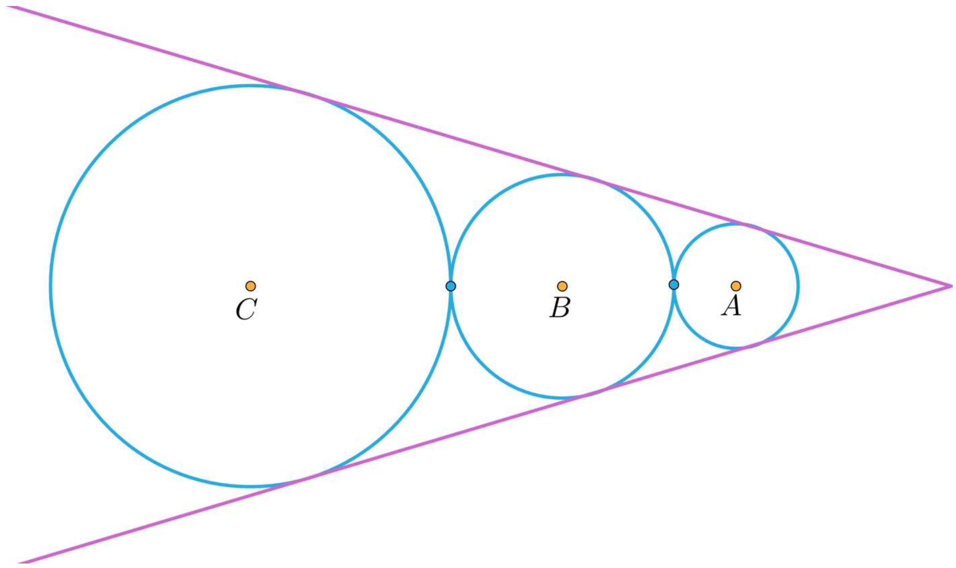
W trójkąt prostokątny $ABC$ o przyprostokątnych długości $|BC| = a$, $|AC| = b$ i przeciwprostokątnej długości $|AB| = c$ wpisano kwadrat $DEFG$ jak na rysunku.




Wykaż, że bok tego kwadratu ma długość równą $\frac{abc}{ab+c^2}$.

**Ćwiczenie 9**

Okręgi o środkach $A$, $B$ i $C$ wpisano w kąt wypukły w ten sposób, że każdy z tych okręgów jest styczny do obu ramion kąta, a okrąg o środku $B$ jest zewnętrznie styczny z każdym z dwóch pozostałych okręgów (zobacz rysunek).




Udowodnij, że promień okręgu o środku $B$ jest średnią geometryczną promieni okręgów o środkach $A$ i $C$.

# Dla nauczyciela

**Autor:** Henryk Dąbrowski

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Cechy podobieństwa trójkątów prostokątnych**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- zna cechy podobieństwa trójkątów prostokątnych
- wykorzystuje poznane cechy do rozwiązywania zadań
- stosuje cechy podobieństwa trójkątów prostokątnych do uzasadniania podobieństwa trójkątów
- stosuje cechy podobieństwa trójkątów prostokątnych w sytuacjach typowych i problemowych
- wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów prostokątnych w dowodach geometrycznych

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

**Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

**Przebieg lekcji**

**Faza wstępna:**

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie cech podobieństwa trójkątów (zwraca uwagę na różnice między cechami podobieństwa trójkątów, a cechami przystawania trójkątów).
2. Nauczyciel prosi uczniów o podanie przykładów wielokątów i odcinków w tych wielokątach, które wyznaczają w tych wielokątach trójkąty podobne.
3. Po wykonaniu ćwiczenia wprowadzających nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

**Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Każdej z grup zleca opracowanie jednej z cech podobieństwa trójkątów z sytuacji, gdy trójkąty są prostokątne.
2. Każda z grup referuje wyniki własnych dociekań. Nauczyciel inicjuje dyskusję, której efektem powinno być sformułowanie cech podobieństwa trójkątów prostokątnych.
3. Nauczyciel podsumowuje dyskusję, formułując cechy podobieństwa trójkątów prostokątnych w postaci warunków koniecznych i wystarczających.
4. Uczniowie w grupach lub indywidualnie analizują przykłady 1 – 3.
5. Nauczyciel przypomina twierdzenie o stosunku pól figur podobnych, a następnie uczniowie rozwiązują przykład 4.
6. Nauczyciel poleca uczniom uruchomić aplet i prosi o wykonanie dołączonych poleceń.
7. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

**Faza podsumowująca:**

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

**Praca domowa:**

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć oraz przeprowadzili dowód zależności omawianej we wstępie.

**Materiały pomocnicze:**

- Cechy podobieństwa trójkątów
- Trójkąty prostokątne podobne

**Wskazówki metodyczne:**

Uczniowie na podstawie apletu mogą przygotować infografikę prezentującą cechy podobieństwa trójkątów prostokątnych.