

Równanie wielomianowe dające się sprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Równanie wielomianowe dające się sprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Aby rozwiązać równanie wielomianowe wyższego stopnia staramy się sprowadzić je do iloczynu równań liniowych lub kwadratowych. Jest to bardzo wygodna postać, ponieważ aby iloczyn kilku czynników równał się zero wystarczy, aby jeden z tych czynników był równy zero. Jedną z metod sprowadzania wielomianu do postaci iloczynowej jest metoda grupowania wyrazów.

Twoje cele

- Sprowadzisz równania wyższych stopni do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów.
- Rozwiążesz równania wielomianowe dające się sprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów.

Przeczytaj

Definicja: Równanie wielomianowe

Równaniem wielomianowym stopnia n ($n \in \mathbb{N}$), nazywamy równanie, które można zapisać w postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia n .

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu $W(x)$ staramy się ten wielomian rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego.

Równanie wielomianowe możemy sprowadzić do postaci iloczynowej na przykład metodą grupowania wyrazów. Metoda grupowania wyrazów polega na takim pogrupowaniu wyrazów, aby można było wyłączyć przed nawias wspólny czynnik.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$ metodą grupowania wyrazów.

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$$

Grupujemy wyrazy pierwszy z drugim oraz trzeci z czwartym. Z pierwszej pary wyłączamy przed nawias jednomian x^2 , z drugiej pary liczbę (-2) .

$$x^2(x + 3) - 2 \cdot (x + 3) = 0$$

Następnie wspólny czynnik $(x + 3)$ wyłączamy przed nawias.

$$(x + 3)(x^2 - 2) = 0$$

Otrzymaliśmy równanie wielomianowe zapisane w [postaci iloczynowej](#). Aby iloczyn dwóch wyrażeń był równy zero, przynajmniej jedno z tych wyrażeń musi być równe zero.

$$x + 3 = 0 \text{ lub } x^2 - 2 = 0$$

$$x = 3 \text{ lub } x = -\sqrt{2} \text{ lub } x = \sqrt{2}$$

Rozwiązaniem równania są liczby $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 3 .

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $x^5 + x^3 - x^2 - 1 = 0$ [metodą grupowania wyrazów](#).

$$x^5 + x^3 - x^2 - 1 = 0$$

Grupujemy wyrazy.

$$x^3(x^2 + 1) - (x^2 + 1) = 0$$

Wyłączamy wspólny czynnik $(x^2 + 1)$ przed nawias.

$$(x^2 + 1)(x^3 - 1) = 0$$

$$x^2 + 1 = 0 \text{ lub } x^3 - 1 = 0$$

Suma algebraiczna $x^2 + 1$ przyjmuje zawsze wartości dodatnie.

$$x^2 + 1 > 0 \text{ dla } x \in \mathbb{R}$$

Zatem równanie $x^2 + 1 = 0$ nie posiada rozwiązań.

$$x^3 - 1 = 0$$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1$$

Równanie ma jedno rozwiązanie $x = 1$.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $x^2 - 7x + 6 = 0$ metodą grupowania wyrazów.

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

Jednomian $-7x$ zapiszemy jako sumę algebraiczną $-x - 6x$.

$$x^2 - x - 6x + 6 = 0$$

Grupujemy wyrazy.

$$x(x - 1) - 6 \cdot (x - 1) = 0$$

Wyłączamy wspólny czynnik $(x - 1)$ przed nawias.

$$(x - 1)(x - 6) = 0$$

$$x - 1 = 0 \text{ lub } x - 6 = 0$$

$$x = 1 \text{ lub } x = 6$$

Równanie ma dwa rozwiązania $x = 1, x = 6$.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $x^5 + x^4 + x^3 + 8x^2 + 8x + 8 = 0$.

Tym razem równanie jest sumą sześciu jednomianów.

Z pierwszych trzech jednomianów wyłączymy przed nawias x^3 , zaś z pozostałych jednomianów wyłączymy przed nawias liczbę 8.

$$x^3(x^2 + x + 1) + 8 \cdot (x^2 + x + 1) = 0$$

$$(x^2 + x + 1)(x^3 + 8) = 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{ lub } x^3 + 8 = 0$$

Rozwiążemy najpierw równanie $x^2 + x + 1 = 0$.

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

Równanie nie posiada rzeczywistych rozwiązań.

Zajmiemy się teraz rozwiązaniem drugiego równania.

$$x^3 = -8$$

$$x = -2$$

Równanie ma jedno rozwiązanie $x = -2$.

Słownik

postać iloczynowa równania

zapisanie równania za pomocą iloczynu czynników, z których każdy jest niższego stopnia niż dane równanie

metoda grupowania wyrazów

polega na takim pogrupowaniu wyrazów, aby można było wyłączyć przed nawias wspólny czynnik

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj animację i zapoznaj się z metodą sprowadzania równań wielomianowych do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów.




Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D14jIDSng>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej grupowania wyrazów w równaniach wielomianowych.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie $3x^4 - 48 + 2x^3 - 8x = 0$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie wielomianowe dające się sprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które się dają doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sprowadza równania wyższych stopni do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów
- rozwiązuje równania wielomianowe dające się sprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów
- tworzy algorytmy rozwiązywania równań różnych typów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda wędrujących plakatów
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej przez nauczyciela uczniowie podają przykłady prostych równań, zapisanych w postaci iloczynu dwóch równań liniowych. Uczniowie podają rozwiązania tych równań.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach 4 osobowych pracują metodą wędrujących plakatów. Celem jest przypomnienie sposobu doprowadzania wielomianów do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów. Rozpoczyna grupa wybrana losowo – zapisuje na plakacie przygotowany wcześniej przykład. Kolejna grupa dodaje swój przykład itd. W ten sposób uczniowie przypominają metodę rozkładu wielomianu na czynniki.
2. Uczniowie w parach oglądają animację i następnie omawiają ją wraz z nauczycielem.
3. Uczniowie w parach rozwiązują zadania interaktywne 1 – 6. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące sposobów rozwiązywania równań dających się sprowadzić do postaci iloczynowej metodą grupowania wyrazów.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Równania stopnia trzeciego w postaci iloczynu](#)
- [Pierwiastki równań](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem.