Zadania na dowodzenie – wykorzystanie cech przystawania trójkątów

Zadania na dowodzenie – wykorzystanie cech przystawania trójkątów

Źródło: Evgeny Tkachenko, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

O dowodzeniu twierdzeń

Geometria przez setki, a nawet tysiące lat opierała się na wyciąganiu wniosków z kilku przesłanek zwanych aksjomatami i na intuicyjnym rozumieniu niektórych pojęć, takich jak punkt, czy prosta. Ostatnie dwieście lat to czas, gdy matematycy próbują zaksjomatyzować niemal wszystko. Niewykluczone, że w praktyce szkolnej zdarzyło Ci się spotkać z aksjomatyczną definicją rachunku prawdopodobieństwa. Podejmując studia na kierunkach ścisłych czy technicznych, niemal na początku poznasz aksjomaty teorii mnogości, a nawet aksjomatyczną definicję liczb naturalnych. Ale matematyka nie tkwi w owych aksjomatach, które można przyjmować w różnym kształcie, ale w ścisłym, uporządkowanym i logicznie konsekwentnym wyciąganiu wniosków, które mają wykazać, czyli dowieść prawdziwości wypowiadanych zdań. To wyciąganie wniosków, na podstawie przyjętych założeń, jest często określane jako dowodzenie. Byłoby trudne takie realizowanie procesu kształcenia matematycznego, w którym na przykład zdobywanie wiedzy i umiejętności z geometrii byłoby od początku do końca oparte o aksjomaty Euklidesa i wprowadzone przez niego pojęcia pierwotne oraz przyjęte, znane z logiki formalnej, zasady dowodzenia. Ograniczenia wynikają nie tylko z czasu, jaki należałoby na to poświęcić, a którego „zawsze” brakuje, ale także z relacji między intuicją, związaną z kształtowaniem pewnych pojęć już od lat dziecinnych, a formalizmem, który jest czymś naturalnym dla naukowca zajmującego się daną dziedziną. Rozwiązywanie problemów np. związanych z zastosowaniem twierdzenia Pitagorasa, nie wymaga od nas pogłębionej refleksji dotyczącej znajomości dowodu tego twierdzenia – tym samym niektórzy adepci szkolnej matematyki korzystają z tego narzędzia nawet wówczas, gdy nigdy z jego dowodem się nie spotkali. Co więcej ich rozwiązania przez nikogo nie będą kwestionowane, bowiem pewne fakty przyjmuje się jako powszechnie znane i jednym z takich faktów jest z pewnością relacja znana pod nazwą twierdzenia Pitagorasa.

Twoje cele

- Zastosujesz cechy przystawania trójkątów, w tym trójkątów prostokątnych, do badania związków miarowych w wielokątach i dowodzenia twierdzeń.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

O cechach przystawania trójkątów

Przypomnijmy krótko trzy twierdzenia znane powszechnie jako cechy przystawania trójkątów:

- cecha *bbb*: dwa trójkąty są przystające, jeśli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta;
- cecha *bkb*: dwa trójkąty są przystające, jeśli dwa boki i kąt leżący między tymi bokami w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi leżącemu między tymi bokami w drugim trójkącie;
- cecha *kbk*: dwa trójkąty są przystające, jeśli bok i dwa kąty przyległe do tego boku w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm kątom przyległym do tego boku w drugim trójkącie.

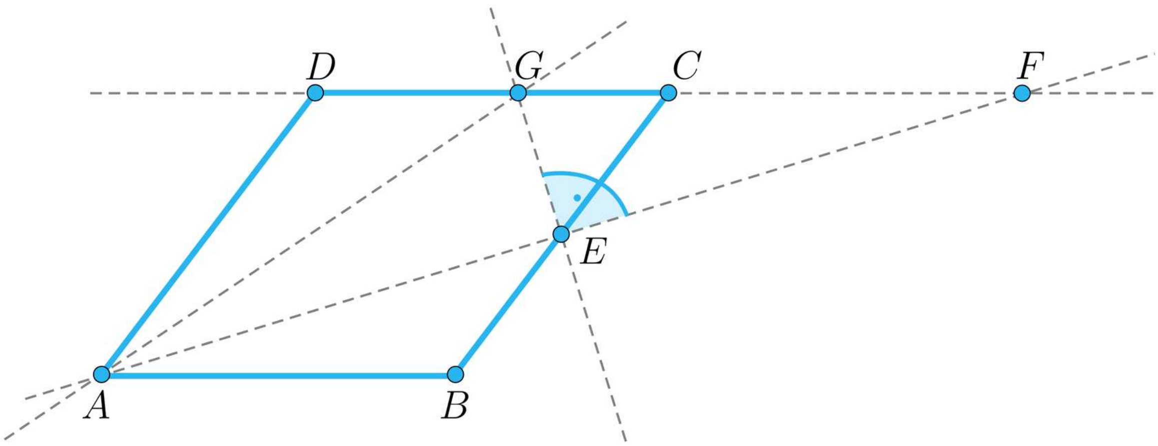
W przypadku trójkątów prostokątnych, można i warto dołączyć do tego zestawu poniższe cztery twierdzenia, wynikające z wcześniej zacytowanych:

- jeżeli przeciwprostokątna i jedna z przyprostokątnych jednego trójkąta są odpowiednio równe przeciwprostokątnej i jednej z przyprostokątnych drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające;
- jeżeli dwie przyprostokątne jednego trójkąta są odpowiednio równe dwóm przyprostokątnym drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające;
- jeżeli przyprostokątna i jeden z kątów ostrych jednego trójkąta są odpowiednio równe przyprostokątnej i jednemu z kątów ostrych drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające;
- jeżeli przeciwprostokątna i jeden z kątów ostrych jednego trójkąta są odpowiednio równe przeciwprostokątnej i jednemu z kątów ostrych drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.

Z twierdzeń tych będziemy korzystać rozwiązując niżej podane problemy.

Przykład 1

Punkt E jest środkiem boku BC równoległoboku $ABCD$. Prosta AE przecina w punkcie F prostą CD. Punkt G jest takim punktem boku CD, że odcinek EG jest prostopadły do prostej AE, jak na rysunku.



Wykażemy, że trójkąty AEG i FEG są przystające.

Oczywiście trójkąty AEG i FEG są prostokątne. Skorzystamy z cechy, która orzeka, że jeżeli dwie przyprostokątne jednego trójkąta są odpowiednio równe dwóm przyprostokątnym drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające. Odcinek EG jest wspólną przyprostokątną w obu trójkątach.

Pozostaje wykazać, że $|AE| = |FE|$. W tym celu skorzystamy z faktu, że trójkąty ABE i FCE są przystające. Istotnie:

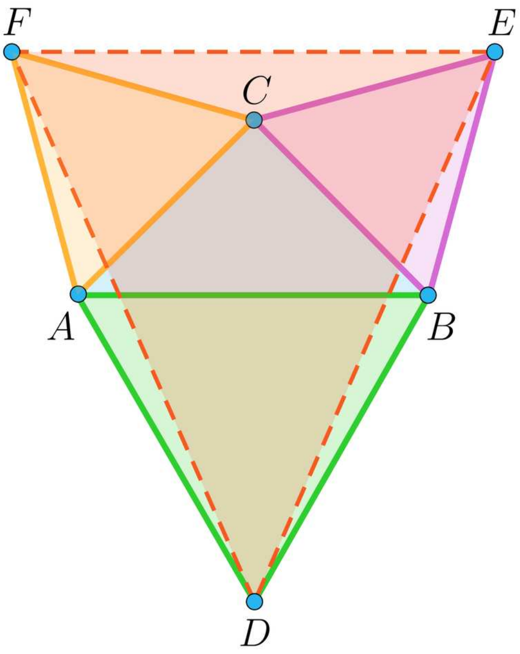
- kąty AEB i FEC jako wierzchołkowe są równe;
- kąty BAE i CFE jako naprzemianległe są równe.

Stąd wynika równość kątów FCE i ABE. Ale to oznacza, że kąty przyległe do boku BE w trójkącie ABE i boku CE w trójkącie FCE są odpowiednio równe. Ale boki BE i CE, równe połowie boku BC, są sobie równe. Zatem na mocy cechy *kbk* trójkąty ABE i FCE są przystające. Co pozwala stwierdzić, że odcinki AE i FE mają równą długość. Co należało wykazać.

Zauważmy, że z powyższego twierdzenia wynika w szczególności, że prosta AF jest dwusieczną kąta BAG.

Przykład 2

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Na bokach tego trójkąta zbudowano trzy trójkąty równoboczne: ABD, BCE, ACF, jak na rysunku.



Pokażemy, że trójkąt EDF jest równoramienny.

Dowód sprowadza się do wykazania, że $\triangle DBE \equiv \triangle DAF$, czyli, że trójkąty te są przystające.

Przyjmijmy oznaczenie $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| = \alpha$.

Zauważmy, że $|BE| = |BC|$ oraz $|AF| = |AC|$, co wynika z faktu, że dobudowane trójkąty są równoboczne. Ale $|AC| = |BC|$, zatem $|BE| = |AF|$.

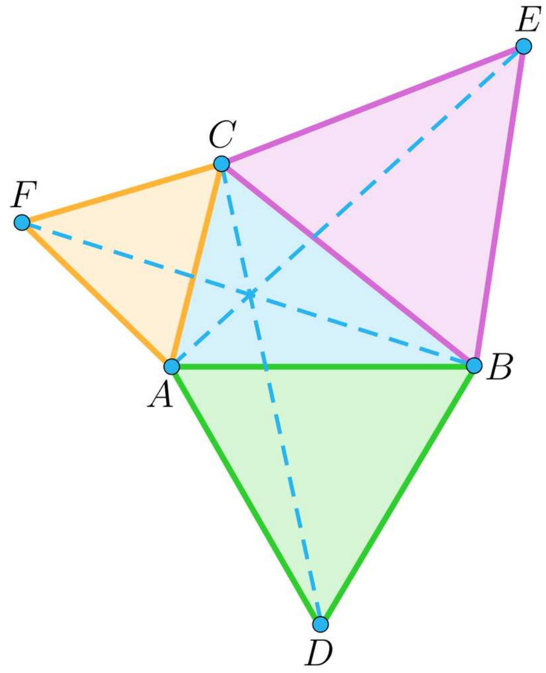
Zauważmy dalej, że $|AD| = |BD|$ oraz $|\sphericalangle DAF| = 60^\circ + \alpha + 60^\circ = 120^\circ + \alpha$. Ale $|\sphericalangle DBE| = 60^\circ + \alpha + 60^\circ = 120^\circ + \alpha$.

Zatem w trójkątach DBE i DAF dwa boki i kąt leżący między tymi bokami są odpowiednio równe, czyli na mocy cechy *bkb* te trójkąty są przystające. W szczególności boki leżące naprzeciw kątów DBE i DAF są równe.

Stąd $|ED| = |FD|$, co należało wykazać.

Przykład 3

Rozważymy teraz związki miarowe, gdy trójkąty równoboczne zbudujemy na bokach dowolnego trójkąta. Dany jest trójkąt ABC. Na bokach tego trójkąta zbudowano trzy trójkąty równoboczne: ABD, BCE, ACF, jak na rysunku.



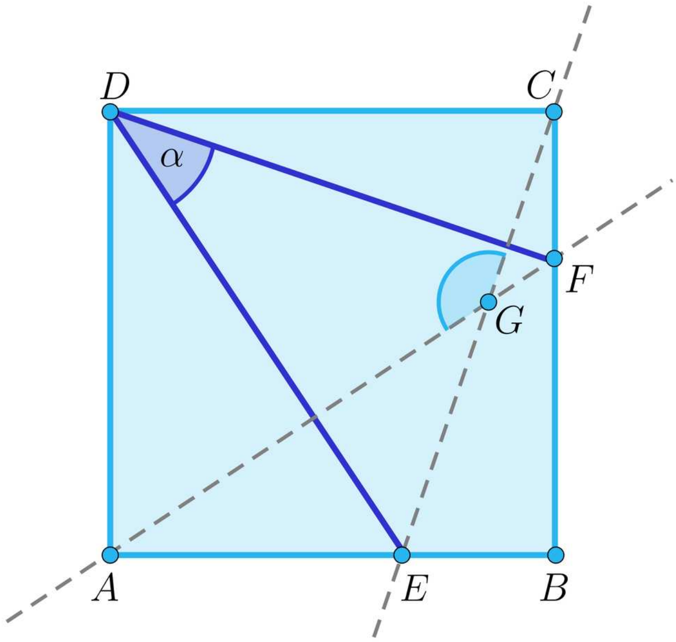
Pokażemy, że $|AE| = |BF| = |CD|$.

Pokażemy najpierw, że $\triangle ACE \equiv \triangle FCB$. Przyjmijmy oznaczenie $|\sphericalangle ACB| = \gamma$. Wtedy $|\sphericalangle FCB| = 60^\circ + \gamma$. Podobnie $|\sphericalangle ACE| = \gamma + 60^\circ$, zatem te kąty są równe. Pozostaje zauważyć, że boki FC i BC w trójkącie FCB są odpowiednio równe bokom AC i CE w trójkącie ACE. Zatem na mocy cechy *bkb* te trójkąty są przystające. W szczególności boki AE i BF są równe.

Pokażemy teraz, że $\triangle ABE \equiv \triangle DBC$. Przyjmijmy oznaczenie $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Wtedy $|\sphericalangle ABE| = \beta + 60^\circ$. Podobnie $|\sphericalangle DBC| = 60^\circ + \beta$, zatem te kąty są równe. Pozostaje zauważyć, że boki AB i BE w trójkącie ABE są odpowiednio równe bokom BD i BC w trójkącie DBC. Zatem na mocy cechy *bkb* te trójkąty są przystające. W szczególności boki AE i CD są równe. Co należało wykazać.

Przykład 4

Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ obrano takie punkty E i F, że $|EB| = |CF|$. Proste AF i CE przecinają się w punkcie G, jak na rysunku.



Miara kąta EDF jest równa α. Wykażemy, że miara kąta AGC jest równa $180^{\circ} - \alpha$.

Przyjmiemy oznaczenia: $|\sphericalangle BAF| = \beta$, $|\sphericalangle BCE| = \gamma$. Wtedy
$|\sphericalangle AGC| = 360^{\circ} - |\sphericalangle DAF| - |\sphericalangle ADC| - |\sphericalangle DCE|$, czyli
$|\sphericalangle AGC| = 360^{\circ} - (90^{\circ} - \beta) - (90^{\circ} - \gamma) - 90^{\circ} = 90^{\circ} + \beta + \gamma$.

Ale trójkąty EBC i FCD są przystające, w szczególności $|\sphericalangle CDF| = |\sphericalangle BCE| = \gamma$.
Podobnie trójkąty AED i BFA są przystające, w szczególności $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle BAF| = \beta$.
Ale $|\sphericalangle ADE| + \alpha + |\sphericalangle CDF| = 90^{\circ}$, stąd $|\sphericalangle ADE| + |\sphericalangle CDF| = \beta + \gamma = 90^{\circ} - \alpha$.

Zatem $|\sphericalangle AGC| = 90^{\circ} + \beta + \gamma = 90^{\circ} + (90^{\circ} - \alpha) = 180^{\circ} - \alpha$. Co należało wykazać.

Słownik

cechy przystawania trójkątów

zestaw twierdzeń określających warunki równoważne występowania relacji przystawania między dwoma trójkątami

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami pokazanymi w animacji, a następnie wykonaj polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DEYMlbjYJ

Film nawiązujący do treści materiału

Polecenie 2

Wykaż, że symetralna odcinka jest zbiorem punktów, których odległość od obu końców tego odcinka jest taka sama.

Polecenie 3

Wykaż, że środek okręgu wpisanego w kąt wypukły leży na dwusiecznej tego kąta.

Polecenie 4

Wykaż, że jeśli przekątne trapezu, który nie jest równoległobokiem, dzielą ten trapez na cztery trójkąty, z których dwa są przystające, to ten trapez jest równoramienny.

Sprawdź się

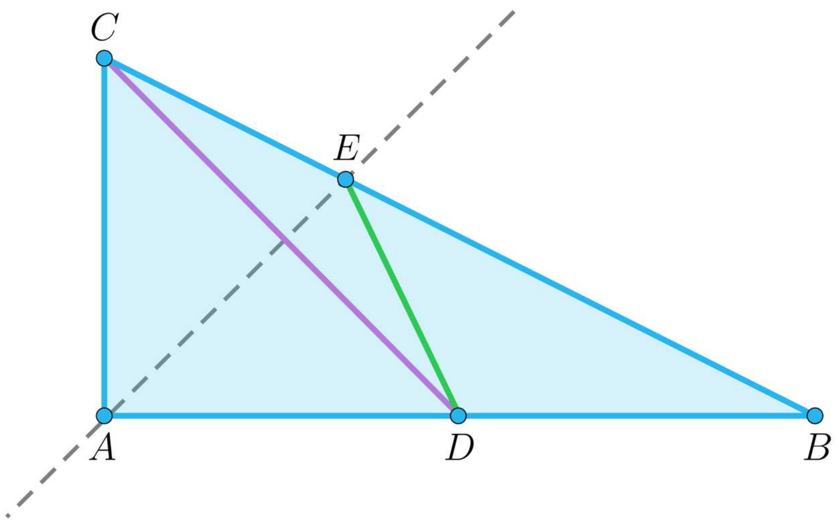
Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Udowodnij, nie korzystając z pojęcia pola, że jeśli dwie wysokości trójkąta są równe, to trójkąt ten jest równoramienny.

Ćwiczenie 2

W trójkącie ABC, w którym $|\sphericalangle BAC| = 90^{\circ}$ i $|AB| = 2 \cdot |AC|$ poprowadzono środkową CD. Prosta przechodząca przez A i prostopadła do poprowadzonej środkowej przecina przeciwprostokątną w punkcie E, jak na rysunku.

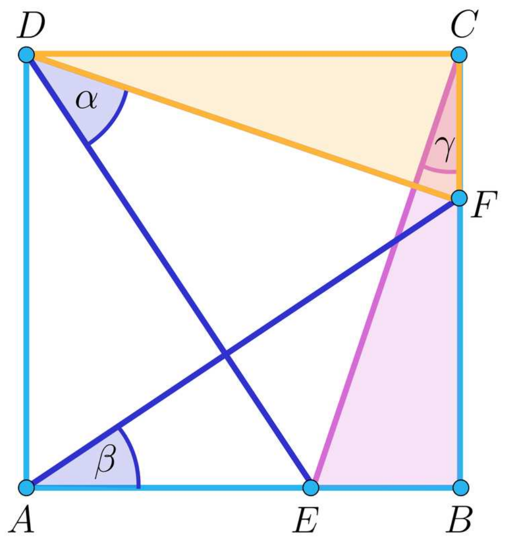


Wykaż, że $|CE| = |DE|$.

Ćwiczenie 3

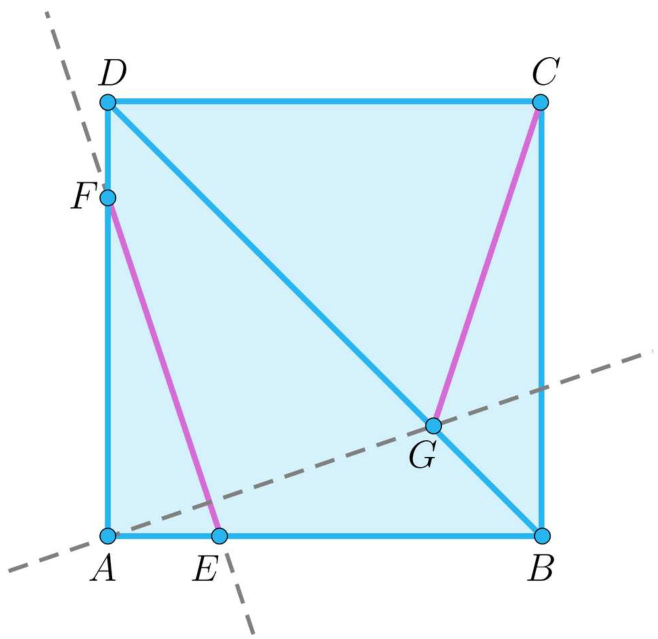
Zaznacz poprawną odpowiedź.

Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkty E, F leżą odpowiednio na bokach AB i BC tego kwadratu. Trójkąty EBC i FCD są przystające jak na rysunku.



Ćwiczenie 4

Dany jest kwadrat $ABCD$. Na jego bokach AB i AD leżą odpowiednio punkty E, F takie, że $|AE| = |DF|$. Prosta prostopadła do prostej EF przecina przekątną BD w punkcie G, jak na rysunku.

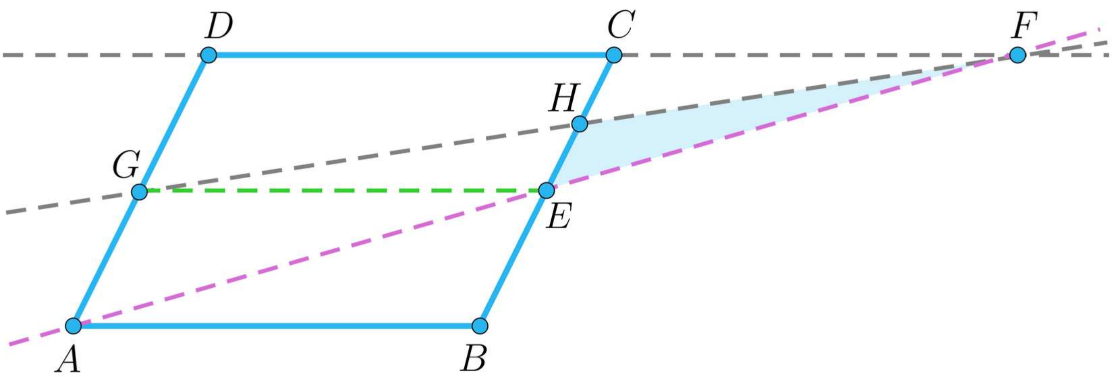


Wykaż, że $|EF| = |CG|$.

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Dany jest równoległobok $ABCD$ o polu równym P. Punkty E, G leżą odpowiednio na bokach BC i AD tego równoległoboku. Punkt F jest punktem wspólnym prostych CD i AE. Trójkąty ABE i FCE są przystające, podobnie trójkąty GEH i FCH są przystające jak na rysunku.



Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zadania na dowodzenie – wykorzystanie cech przystawania trójkątów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;

8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje pojęcie figur przystających
- stosuje pojęcie trójkątów przystających
- stosuje cechy przystawania trójkątów
- stosuje cechy przystawania trójkątów prostokątnych
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Nauczyciel prosi o podanie przykładów, aksjomatów i reguł dowodzenia.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie pojęcia przystawania trójkątów i cech przystawania trójkątów.
2. Następnie nauczyciel prezentuje problem opisany w Przykładzie 1 – wspólnie z uczniami przeprowadzają dowód przystawania trójkątów ABE i FCE. Następnie prosi o udowodnienie przedstawionej tezy – uczniowie w parach szukają rozwiązania. Wybrany uczeń prezentuje rozwiązanie.
3. Następnie nauczyciel prosi o uzasadnienie, że prosta AF jest dwusieczną kąta BAG.
4. Nauczyciel omawia konstrukcję figur powstałych przez dobudowanie trójkątów równobocznych do trójkąta (ew. równoległoboku). Następnie prezentuje problem opisany w Przykładzie 2, dotyczący trójkąta równoramiennego. Uczniowie pracują samodzielnie nad jego rozwiązaniem. Nauczyciel obserwuje uczniów i w razie potrzeby udziela wskazówek. Wybrany uczeń prezentuje rozwiązanie na tablicy.
5. Następnie nauczyciel prezentuje problem dotyczący dowolnego trójkąta – opisany w Przykładzie 3. Nauczyciel dzieli klasę na dwie grupy – jedna z nich będzie miała za zadanie wykazać przystawanie trójkątów $\triangle ACE \equiv \triangle FCB$, a druga przystawanie $\triangle ABE \equiv \triangle DBC$. Wybrani uczniowie prezentują dowód odpowiednich relacji

przystawania. Następnie, powołując się na przechodniość relacji równości, kończą dowód twierdzenia.
6. Następnie nauczyciel prezentuje problem opisany w Przykładzie 4. Może w tym miejscu zmienić tezę, odwołując się do czworokątów wpisanych w okrąg. Proponuje przyjęcie uczniom ujednoliconych oznaczeń miar kątów, a następnie prosi uczniów, by pracując ponownie w parach, rozwiązali problem. Wybrany uczeń prezentuje rozwiązanie na tablicy.
7. Na koniec nauczyciel prosi o uruchomienie aplikacji multimedialnej i wykonanie dołączonych poleceń.
8. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

Przystawanie trójkątów

Wskazówki metodyczne:

Animację można zastosować w ramach realizacji tematu o cechach przystawania trójkątów i własnościach trójkątów.